С.Я. Водяницкий, М.А. Зуев,
В.В. Шапинский, А.Б. Шварцбург

КВАЗИДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ИМПУЛЬСОВ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ МНОГОМОДОВЫХ ГРАДИЕНТНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Как известно, широкий класс задач нелинейного распространения электромагнитных сигналов традиционно описывается приближением медленных амплитуд [1-11]. При этом разнообразие геометрических конфигураций полей практически не сказывается на структуре эволюционных уравнений. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть общую схему квазидинамического разложения уравнений нелинейной электродинамики, приводящую к эволюционным системам шредингеровского типа.

Запишем нелинейные уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial(\vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{P}}^{(\text{нел})})}{\partial t} + \vec{j}, \tag{1}$$

где $\mathcal{P}^{(\text{нел})}$ - нелинейная добавка поляризуемости к линейной части электрической индукции $\vec{\mathcal{D}}$.

Далее для описания распространения квазимонохроматического сигнала с несущей частотой ω положим:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}\cdot e^{-i\omega t}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H}\cdot e^{-i\omega t}, \quad \vec{\mathcal{P}}^{(\text{нел})} = \vec{P}^{(\text{нел})}\cdot e^{-i\omega t},$$

где $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{P}^{(\text{нел})}$ - слабо зависящие от t комплексные амплитуды.

Пусть материальные связи между Фурье-компонентами полей описываются изотропными соотношениями:

$$\vec{D}_\Omega = \hat{\varepsilon}_\Omega \cdot \vec{E}_\Omega, \ \vec{B}_\Omega = \mu_\Omega \cdot \vec{H}_\Omega, \quad \vec{j}_\Omega = \sigma_\Omega \cdot \vec{E}_\Omega,$$

где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \Delta\varepsilon^{(\text{нер})}$ включает в себя нерегулярную добавку $\Delta\varepsilon^{(\text{нер})}$ к вещественной невозмущенной диэлектрической проницаемости ε.

При этом, как нетрудно показать,

$$\vec{D} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varepsilon}{\partial \omega^k} \cdot \frac{\partial^k \vec{E}}{\partial t^k} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Аналогично выражаются $\vec{B}$ через μ, $\vec{H}$ и $\vec{j}$ через σ, $\vec{E}$. Тогда из (1), опуская громоздкие выкладки, можно получить общее квазидинамическое разложение:

$$\vec{H} = -i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \left(\frac{\operatorname{rot} \vec{E}}{\omega\mu}\right),$$

$$\Delta\vec{E} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \cdot \left\{\omega^2 \mu\, \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{\nabla}\left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \left[\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \operatorname{rot} \vec{E}\right]\right\} = -\vec{A}; \qquad (2)$$

$$\vec{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \left\{\omega^2 \mu\varepsilon i\gamma \cdot \vec{E} + i\vec{\nabla}\left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla}\gamma}{1+i\gamma}\right) + \omega\mu \cdot \vec{Q} + \vec{\nabla}\left(\frac{\operatorname{div} \vec{Q}}{\omega\varepsilon(1+i\gamma)}\right)\right\}. \quad (3)$$

Здесь по ω дифференцируются материальные параметры ε, μ, γ, а по времени t – амплитуды $\vec{E}$ и $\vec{Q} = \omega \cdot \vec{P}^{(\text{нел})} + i \dfrac{\partial \vec{P}^{(\text{нел})}}{\partial t}$. При этом в дифференцировании по ω вектор $\vec{Q}$ (как и $\vec{E}$) не участвует, несмотря на явную зависимость $\vec{Q}$ от ω. Нерегулярность и поглощение характеризуются безразмерным параметром $\gamma = \dfrac{\Delta\varepsilon^{(\text{нер})}}{i\varepsilon} + \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$.

Следует отметить, что структура уравнений эволюции медленных амплитуд (2)-(3) несколько сложнее традиционных соотношений для Фурье-компонент. Однако специфика представления характерных нелинейных откликов $\vec{P}^{(\text{нел})}$ через амплитуды полей является решающим аргументом в пользу построения общей теории на основе (2)-(3).

Конкретизируем полученные соотношения для описания эволюции формы импульса в многомодовом волноводе с продольной осью Z. Положим в нулевом приближении (2) $\vec{A} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$, что приводит к традиционной задаче о поперечном распределении мод:

$$\vec{E}_m = \vec{e}_m(\vec{r}_\perp) \cdot \exp(i \cdot k_m \cdot z), \ \vec{H}_m = \vec{h}_m(\vec{r}_\perp) \cdot \exp(ik_m z),$$

удовлетворяющих стационарному линейному регулярному варианту исходной системы (1):

$$\operatorname{rot} \vec{E}_m = i\omega\mu \cdot \vec{H}_m, \quad \operatorname{rot} \vec{H}_m = -i\omega\varepsilon \cdot \vec{E}_m.$$

При этом сшивка поперечных граничных условий позволяет определить спектр продольных волновых чисел k_m и поля мод $\vec{e}_m$, $\vec{h}_m$, которые в дальнейшем будем считать заданными. Кроме того, ниже используются традиционные для волноводов условия: $\vec{\nabla}\mu = 0$, $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} = 0$, причем μ, ε – вещественные. Таким образом, $\vec{e}_m$ удовлетворяет модовым уравнениям:

$$\nabla_\perp \vec{e}_{m\perp} + \omega^2\mu\varepsilon \cdot \vec{e}_{m\perp} + \vec{\nabla}_\perp\left(\vec{e}_{m\perp} \cdot \frac{\vec{\nabla}_\perp \varepsilon}{\varepsilon}\right) = k_m^2 \cdot \vec{e}_{m\perp} \quad ;$$

$$e_{mz} = \frac{i}{k_m} \cdot \left[\operatorname{div} \vec{e}_{m\perp} + \left(\vec{e}_{m\perp} \cdot \frac{\vec{\nabla}_\perp \varepsilon}{\varepsilon}\right)\right]. \qquad (4)$$

Для описания эволюции модовых амплитуд введем квазидинамическое разложение по модам поперечной составляющей электрического поля $\vec{E}_\perp$:

$$\vec{E}_\perp = \sum_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k F_n}{\partial t^k} \cdot \vec{e}^{\,(k)}_{n\perp} = \sum_n \left(F_n \cdot \vec{e}_{n\perp} + i \cdot \frac{\partial F_n}{\partial t} \cdot \vec{e}\,'_{n\perp} - \ldots\right). \qquad (5)$$

Здесь и далее $F_n = f_n(t,z) \cdot \exp(i \cdot k_n \cdot z)$, где f_n - слабо зависящие от (t,z) комплексные амплитуды; $\vec{e}^{\,(k)} \equiv \frac{\partial^k \vec{e}}{\partial \omega^k}$, $\vec{e}\,' \equiv \frac{\partial \vec{e}}{\partial \omega}$. Данное разложение является прямым следствием аддитивности модовых векторов, формирующих Фурье-компоненты поля:

$$\vec{E}_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot e^{-i\Omega t} \cdot \sum_n C_{n\Omega}(z) \cdot \vec{e}_{n\perp}(\Omega, \vec{r}_\perp).$$

При этом для определенности можно рассматривать однокоординатную структуру $\vec{E}_\perp$ (например, в осесимметричном случае при отсутствии зависимости от угловой координаты φ имеем $\vec{E} = (0, E_\varphi, 0)$ для TE-мод или $\vec{E} = (E_\rho, 0, E_z)$ для TM-распределений).

Следует отметить, что в отличие от случая стационарного монохроматического сигнала поперечная структура импульса каждой моды эволюционирует, согласно (5), уже в первом приближении теории дисперсии. Данное обстоятельство игнорируется во многих работах [4,6,7,11]. Между тем последовательное развитие предлагаемой теории указывает на то, что фиксация поперечного распределения модовых импульсов (то есть использование вместо (5) разложения $\vec{E}_\perp = \sum_n F_n(t,z) \cdot \vec{e}_{n\perp}(\vec{r}_\perp)$) приводит к физически необоснованным эффектам, например, к взаимовлиянию импульсов различных мод в линейном регулярном волноводе.

Воспользуемся далее свойством ортогональности поперечных модовых компонент [9, 10]:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dx \cdot dy \cdot \left[\vec{e}_{m\perp} \times \vec{h}_{n\perp}\right] = 0 \text{ при } k_n \neq k_m.$$

Преобразуя данный интеграл к более наглядной форме, введем ортонормированный оператор поперечного усреднения $\hat{\Pi}_n$:

$$\hat{\Pi}_n \cdot \vec{a} = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} dx \cdot dy \cdot \left(\vec{e}_{n\perp} - \frac{i}{k_n} \cdot e_{nz} \cdot \mathrm{div}_\perp\right) \cdot \vec{a}}{\iint_{-\infty}^{\infty} dx \cdot dy \cdot \left(\vec{e}_{n\perp} - \frac{i}{k_n} \cdot e_{nz} \cdot \mathrm{div}_\perp\right) \cdot \vec{e}_{n\perp}}. \qquad (6)$$

При этом

$$\hat{\Pi}_n \cdot \vec{e}_m = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ для } k_n = k_m \\ 0 \text{ для } k_n \neq k_m \end{cases} \qquad (6a)$$

Подставляя теперь (5) и (2) и опуская громоздкие выкладки, с учетом (6а) имеем:

$$\frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} (k_m^2)^{(k)} \cdot \frac{\partial^k F_m}{\partial t^k} = - \hat{\Pi}_m \cdot \vec{A}_\perp + i \cdot \sum_M (\hat{\Pi}_m \cdot \vec{e}\,'_{M\perp}) \cdot \left(\hat{\Pi}_m \cdot \frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t}\right) + \ldots \qquad (7)$$

При этом, как нетрудно показать, в линейном регулярном случае (когда $\vec{A} = 0$) решение (7) сводится к эволюционным уравнениям для медленных амплитуд:

$$\hat{D}_m f_m = 0,$$

где

$$\hat{D}_m f_m = \frac{\partial f_m}{\partial z} - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^K}{k!} \cdot k_m^{(k)} \cdot \frac{\partial^k f_m}{\partial t^k} = \tag{8}$$

$$= \frac{\partial f_m}{\partial z} + k_m' \cdot \frac{\partial f_m}{\partial t} + \frac{i \cdot k_m''}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_m}{\partial t^2} - \frac{k_m'''}{6} \cdot \frac{\partial^3 f_m}{\partial t^3} - \ldots$$

При $\vec{A} \neq 0$ эволюционные уравнения содержат возмущающие факторы R_m:

$$D_m \cdot f_m = R_m, \tag{9}$$

определение которых и составляет конечную цель данной работы.

Конкретизируя $\vec{A}$, примем, что при $\omega T \gg 1$ (T - характерная длительность импульса) влияние возмущающих факторов сказывается во втором порядке теории дисперсии, то есть $|\gamma| \sim \frac{|\vec{P}^{(нел)}|}{\varepsilon\,|\vec{E}|} \sim (\frac{1}{\omega T})^2$. Тогда масштабы затухания и самовоздействия соизмеримы с длиной дисперсионного расплывания импульса. При этом структура $\vec{A}_\perp$ распадается в (3) на нерегулярную и нелинейную части вплоть до членов $\sim (\frac{1}{\omega T})^3$, что позволяет принять в (9) $R_m = R_m^{(\gamma)} + R_m^{(нел)}$. Кроме того, можно показать, что необходимая для вычисления $\vec{A}_\perp$ продольная компонента поля E_z соответствует в первом приближении квазидинамической структуре (5):

$$E_z^{(1)} = \sum_n (F_n e_{nz} + i \cdot \frac{\partial F_n}{\partial t} \cdot e_{nz}'). \tag{10}$$

Определяя в рамках изложенного влияние нерегулярности, будем учитывать взаимосвязь соседних мод, ограниченных разросом волновых чисел $-k_m < k_n < 3 \cdot k_m$. Тогда во втором дисперсионном приближении получим

$$R_m^{(\gamma)} = -\sum_n \Gamma_{mn} \cdot f_n \cdot e^{i(k_n - k_m) \cdot z}, \tag{11}$$

где

$$\Gamma_{mn} = \hat{\Pi}_m \cdot \vec{a}_n^{(\gamma)} / (k_n + k_m); \tag{12}$$

$$\vec{a}_n^{(\gamma)} = \omega^2 \mu \varepsilon \gamma \cdot \vec{e}_{n\perp} + \vec{\nabla}_\perp (\vec{e}_n \cdot \vec{\nabla} \gamma). \tag{13}$$

Конкретизируем влияние нелинейности в рамках безынерционной кубической модели [1]:

$$\vec{P}^{(нел)} = \alpha \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \cdot \vec{E} + \beta \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E}^*. \tag{14}$$

При этом, подставляя, согласно (5), (10), $\vec{E}^{(0)} = \sum_n F_n \cdot \vec{e}_n$, имеем

$$\vec{P}^{(нел)} = \sum_{ijn} F_i F_j^* F_n \cdot \vec{C}^{ijn}, \tag{15}$$

где

$$\vec{C}^{ijn} = \alpha \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^*) \cdot \vec{e}_n + \beta \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_j^*. \tag{16}$$

Тогда из (3), (7) в том же приближении получим

$$R_m^{(нел)} = \sum_{ijn} i \cdot \varkappa_{mijn} \cdot f_i \cdot f_j^* \cdot f_n \cdot e^{i \cdot (k_i - k_j + k_n - k_m) \cdot z}, \tag{17}$$

где

$$\varkappa_{mijn} = \hat{\Pi}_m \cdot \vec{a}_{ijn}^{(нел)} / (k_i - k_j + k_n + k_m), \tag{18}$$

$$\vec{a}_{ijn}^{(\text{нел})} = \omega^2\mu\cdot\vec{c}_\perp^{\,ijn} + \vec{\nabla}_\perp \frac{\operatorname{div}\vec{c}_\perp^{\,ijn} + i(k_i-k_j+k_n)\cdot c_z^{ijn}}{\varepsilon} \tag{19}$$

(здесь так же, как и в (11), (12), разброс волновых чисел соседних мод ограничен $-k_m < k_i - k_j + k_n < 3\cdot k_m$).

Следует отметить, что найденные общие выражения (12) и (18) для матриц Γ_{mn} и $\varkappa_{mijn}$ резко упрощаются в "толстых" многомодовых волноводах, когда $\omega^2\mu\varepsilon\cdot r_\perp^2 \gg 1$. При этом в (6) можно проигнорировать наличие продольных модовых компонент, а в (13) и (19) удалить члены $\sim\vec{\nabla}_\perp$.

Тогда

$$\Gamma_{mn} = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx\cdot dy\cdot(\omega^2\mu\cdot\Delta\varepsilon^{(\text{нер})}/i + \omega\mu\sigma)\cdot(\vec{e}_{m\perp}\cdot\vec{e}_{n\perp})}{(k_n + k_m)\cdot\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx\cdot dy\cdot(\vec{e}_{m\perp}\cdot\vec{e}_{m\perp})} + \ldots \tag{20}$$

$$\varkappa_{mijn} = \frac{\omega^2\cdot\mu\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx\cdot dy\cdot\left[\alpha\cdot(\vec{e}_{i\perp}\cdot\vec{e}_{j\perp})\cdot(\vec{e}_{m\perp}\cdot\vec{e}_{n\perp}) + \beta\cdot(\vec{e}_{i\perp}\cdot\vec{e}_{n\perp})\cdot(\vec{e}_{m\perp}\cdot\vec{e}_{j\perp})\right]}{(k_i - k_j + k_n + k_m)\cdot\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx\cdot dy\cdot(\vec{e}_{m\perp}\cdot\vec{e}_{m\perp})} + \ldots \tag{21}$$

Однако при исследовании "тонких" маломодовых волноводов (когда $\omega^2\mu\varepsilon\cdot r_\perp^2 \lesssim 1$) и учете продольного поля отброшенные слагаемые могут конкурировать с основными и становиться определяющими.

Полученные соотношения (8), (9), (11), (17) позволяют описать эволюцию модовых амплитуд f_m и определить, согласно (5), (10), поля $\vec{E}_\perp$ и E_z, замыкая тем самым решение поставленной задачи.

Приложение

При исследовании эволюции коротких импульсов возникает, как известно, ряд особенностей (например, асимметрия фронтов), ответственность за которые несут члены третьего приближения теории дисперсии $\sim(\frac{1}{\omega T})^3$ [2,8]. Построенная квазидинамическая теория позволяет определить явный вид этих слагаемых, а именно: к выражению (11) следует добавить $\Delta R_m^{(\gamma)}$:

$$\Delta R_m^{(\gamma)} = \sum_n i\,\tilde{\Gamma}_{mn}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial t}\cdot e^{i(k_n-k_m)\cdot z}, \tag{22}$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{mn} = \hat{\Pi}_m\left[\sum_M \frac{(\hat{\Pi}_M\cdot\vec{a}_n^{(\gamma)})\cdot\vec{e}_{M\perp}^{\,\prime}}{(k_n + k_m)} - \left(\frac{\vec{a}_n^{(\gamma)}}{(k_n + k_m)}\right)'\right], \tag{23}$$

а к выражению (17) - $\Delta R_m^{(\text{нел})}$:

$$\Delta R_m^{(\text{нел})} = \sum_{ijn}\left[\tilde{\varkappa}_{mijn}^{i}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial t}\cdot f_j^*\cdot f_n + \tilde{\varkappa}_{mijn}^{i}\cdot f_i\cdot\frac{\partial f_j^*}{\partial t}\cdot f_n + \tilde{\varkappa}_{mijn}^{n}\cdot f_i\cdot f_j^*\cdot\frac{\partial f_n}{\partial t}\right]\cdot e^{i(k_i-k_j+k_n-k_m)\cdot z}, \tag{24}$$

где

$$\tilde{\varkappa}^{l}_{mijn} = \frac{(k_l + k_m)' \cdot \varkappa_{mijn} + \hat{\Pi}_m \cdot \left[\sum\limits_M (\hat{\Pi}_M \cdot \vec{a}_{ijn}) \cdot \vec{e}\,'_{M\perp} - (\vec{a}\,'_{ijn} \pm \vec{a}\,'^{(l)}_{ijn})\right]}{(k_i - k_j + k_n + k_m)} \tag{25}$$

Здесь при вычислении $\vec{a}\,'_{ijn}$ подразумевается, что в (19) по ω дифференцируются лишь коэффициенты $(\omega^2 \cdot \mu)$ и $(1/\epsilon)$, а при вычислении $\vec{a}\,'^{(l)}_{ijn}$ по ω в (19) дифференцируются k_l и $\vec{e}_l$ (последние, согласно (16), определяют $\vec{c}^{\,ijn}$). Знак перед $\vec{a}\,'^{(l)}_{ijn}$ задается индексом l: для $l = i$, $l = n$ имеем (+); для $l = j$ имеем (-).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.

3. Сисакян И.Н., Шварцбург А.Б. Квантовая электроника, 1984, т. 11, с. 1703.

4. Хасэгава А., Кодама Ю. Труды ИИЭР, 1981, т. 69, № 9, с. 57.

5. Беланов А.С., Головченко Е.А., Дианов Е.М., Никонова З.С., Прохоров А.М., Серкин В.Н. Труды ИОФАН, 1986, т. 5, с. 35.

6. Grosignani B., Cutolo A., Di Porto P. J. Opt. Soc. Am., 1982, v. 72, N 9, p. 1136.

7. Альтшулер Г.Б., Карасев В.Б., Козлов С.А., Муркина Т.А., Розанов Н.Н. Оптика и спектроскопия, 1986, т. 61, вып. 2, с. 359.

8. Выслоух В.А., Матвеева Т.А. МГУ, Физический факультет: Препринт № 24/1986.

9. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.

10. Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1978.

11. Абдуллаев Ф.Х., Дарманян С.А., Хабибуллаев П.К. Оптические солитоны. Ташкент.: ФАН, 1987.