

СИНТЕЗ СЛОИСТЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАДАНЫМ АМПЛИТУДНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

1. Введение

Многие оптические устройства работают с монохроматическим излучением фиксированной частоты. В связи с этим получение оптических слоистых систем с заданными коэффициентами пропускания или отражения для волны данной фиксированной частоты всегда интересовало специалистов. До последнего времени речь преимущественно шла о получении заданных энергетических коэффициентов пропускания или отражения. Для решения основных задач этого класса применялись широко исследованные четвертьволновые диэлектрические зеркала, различные просветляющие покрытия и т.п. Однако большой интерес представляет и получение слоистых систем с заданным амплитудным коэффициентом отражения, который определяется как отношение комплексных амплитуд отраженного и падающего поля. Фактически решается проблема получения одновременно заданных энергетических и фазовых свойств слоистой системы.

Одной из важнейших задач этого типа является согласование поверхности твердого тела с внешней средой, обеспечивающее полное прохождение падающего из внешней среды поля. Пусть $\tilde{n}_l = n_l + i\chi_l$ - комплексный показатель преломления твердого тела, n_0 - показатель преломления внешней среды. Амплитудный коэффициент отражения от поверхности тела при нормальном падении света равен

$$r_n = (n_0 - \tilde{n}_l) / (n_0 + \tilde{n}_l).$$

Квадрат модуля этой комплексной величины дает энергетический коэффициент отражения, а ее аргумент - фазовый сдвиг при отражении. Предположим теперь, что на поверхность твердого тела нанесено слоистое покрытие с амплитудным коэффициентом отражения со стороны поверхности тела r_c (рис. 1). Общий амплитудный коэффициент отражения от поверхности с покрытием со стороны внешней среды равен [1]

$$r = e^{2i\varphi_t} \frac{r_n - r_c^*}{1 - r_c r_n}, \quad (1)$$

где φ_t - фазовый сдвиг при прохождении волны через слоистую систему, звездочка - знак комплексного сопряжения.

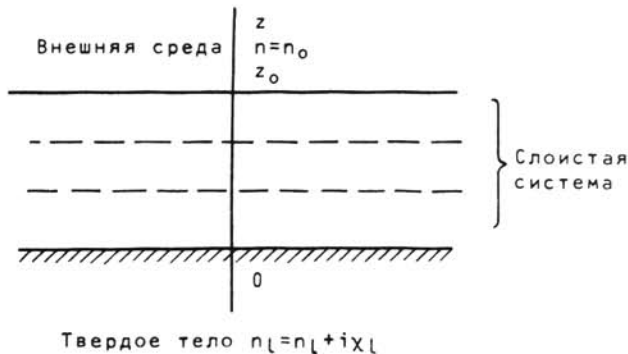


Рис. 1. Поверхность слоистым покрытием

Формула (1) показывает, что для обеспечения нулевого коэффициента отражения от поверхности (полного ее согласования с внешней средой) необходимо нанести на поверхность тела слоистое покрытие с амплитудным коэффициентом отражения

$$r_c = r_n^*$$

Помимо изложенной, существует большое число других важных для практики задач, в которых необходимо использовать слоистые системы с заданными амплитудными коэффициентами. Ниже будет рассмотрена задача синтеза слоистой системы с произвольно заданным амплитудным коэффициентом отражения.

2. Разрешимость задачи синтеза

Определим, всегда ли разрешима сформулированная задача синтеза. Для простоты изложения рассмотрим случай нормального падения света на слоистую систему. Получаемые результаты справедливы как в общем случае произвольного падения света, так и при произвольной его поляризации.

Пусть слоистая система ограничена двумя однородными средами. Первую из них, из которой падает волна, по-прежнему будем называть внешней средой, вторую - подложкой. Обозначим показатели преломления внешней среды и подложки n_0 и n_1 . Проведем ось z перпендикулярно слоистой системе в направлении от подложки к внешней среде. Координату границы раздела слоистой системы с подложкой примем за 0, а координату ее границы с внешней средой - за z_0 . Слоистую систему будем считать непоглощающей. Ее показатель преломления n зависит от координаты z (в случае системы однородных слоев $n(z)$ - кусочно-постоянная функция).

Амплитудный коэффициент отражения может быть выражен через входной адмитанс слоистой системы. Адмитанс X (отношение амплитуды магнитного к амплитуде электрического поля) удовлетворяет в слоистой системе следующему дифференциальному уравнению:

$$dX/dz = ik [n^2(z) - X^2(z)], \quad (2)$$

где k - волновое число падающей волны, связанное с ее длиной волны λ равенством $k = 2\pi/\lambda$.

Начальное условие для уравнения (2) задается на границе с подложкой и имеет вид

$$X(0) = -n_1. \quad (3)$$

Амплитудный коэффициент отражения связан с входным адмитансом (адмитансом на границе с внешней средой) равенством

$$r = [n_0 + X(z_0)] / [n_0 - X(z_0)]. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что задача получения заданного амплитудного коэффициента отражения эквивалентна задаче получения заданного входного адмитанса. При этом легко проверить, что естественное энергетическое условие $|r| < 1$ эквивалентно условию $\text{Re} X < 0$. Поэтому исследуем разрешимость задачи получения заданного входного адмитанса при условии $\text{Re} X < 0$.

Предположим, что функция $n(z)$ в (2) принимает лишь два значения n_1 и n_2 , то есть система состоит из слоев с чередующимися показателями преломления. Если доказать разрешимость задачи при этом условии, то она тем более разрешима в любом более широком классе возможных распределений $n(z)$.

Решение уравнения (2) в слое с постоянным показателем преломления n можно записать следующим образом:

$$X(z) = \frac{i n \sin kn(z-\hat{z}) + \hat{X} \cos kn(z-\hat{z})}{\cos kn(z-\hat{z}) + i(\hat{X}/n) \sin kn(z-\hat{z})}, \quad (5)$$

где \hat{X} - начальное значение для адмитанса в точке \hat{z} внутри слоя ($X(\hat{z}) = \hat{X}$).

Положим $\zeta = -\operatorname{ctg} kn(z-\hat{z})$ и перепишем (5) в виде

$$X = \frac{n + i \hat{X} \zeta}{i \zeta + \hat{X}/n}. \quad (6)$$

При изменении переменной z от \hat{z} до $\hat{z} + \pi/(kn) = \hat{z} + \lambda/(2n)$ переменная ζ "пробегает" действительную ось от $-\infty$ до $+\infty$. Будем изображать адмитанс точками в комплексной плоскости, которую назовем фазовой плоскостью адмитанса (рис. 2). Рассмотрим (6) как преобразование комплексной переменной ζ в комплексную переменную X . Преобразование (6) является дробно-линейным и по круговому свойству переводит действительную ось плоскости ζ в окружность в плоскости X . Таким образом, при изменении переменной z от \hat{z} до $\hat{z} + \lambda/(2n)$ переменная ζ "пробегают" значения от $-\infty$ до $+\infty$, а адмитанс X совершает полный обход окружности в фазовой плоскости адмитанса. Несложно определить параметры этой окружности. Центр окружности лежит на действительной оси фазовой плоскости в точке

$$\xi = (|\hat{X}|^2 + n^2) / (2 \operatorname{Re} \hat{X}), \quad (7)$$

ее радиус равен

$$R = \sqrt{\xi^2 - n^2} = \sqrt{|\hat{X}|^2 - n^2} / (-2 \operatorname{Re} \hat{X}). \quad (8)$$

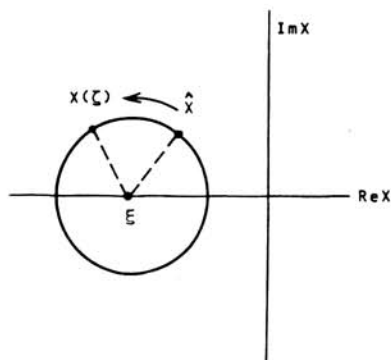


Рис. 2. Фазовая плоскость адмитанса

Как видно из формул (7) и (8), параметры окружности полностью определяются начальным значением адмитанса \hat{X} и показателем преломления слоя n . Окружность целиком лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} X < 0$. При увеличении z движение по ней всегда происходит против часовой стрелки. Начальное значение адмитанса \hat{X} также принадлежит этой окружности и соответствует точке $\zeta = \pm \infty$ или точкам $z = \hat{z}$, $z = \hat{z} + \lambda/(2n)$.

Выше сделано предположение, что показатели преломления слоев системы принимают одно из двух значений n_1 или n_2 . Изобразим на фазовой плоскости адмитанса два семейства окружностей C_{ξ}^1 и C_{ξ}^2 с центрами в точках $\xi < 0$ и радиусами соответственно $R_1 = \sqrt{\xi^2 - n_1^2}$ и $R_2 = \sqrt{\xi^2 - n_2^2}$. Окружности первого семейства выполнены сплошными линиями, второго семейства - шриховыми (рис. 3). Каждое из этих семейств в отдельности состоит из вложенных непересекающихся окружностей и полностью заполняет всю левую полуплоскость $\operatorname{Re} X < 0$. Окружности первого семейства вырождаются в точку при $\xi = -n_1$, второго - при $\xi = -n_2$. В зависимости от началь-

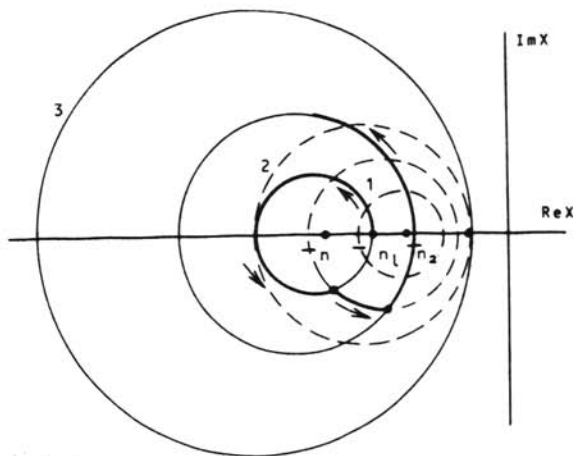


Рис. 3. Семейства траекторий в фазовой плоскости адмитанса

ного значения \hat{X} изменение адмитанса в слое с показателем преломления n_1 изображается движением точки в фазовой плоскости по одной из окружностей первого семейства, а в слое с показателем преломления n_2 - по одной из окружностей второго семейства. В целом точка, изображающая решение уравнения для адмитанса в системе слоев с чередующимися показателями преломления, пробегает в фазовой плоскости некоторую траекторию, состоящую из чередующихся дуг семейств окружностей C_E^1 и C_E^2 . В качестве примера на рис. 3 жирной линией выделена одна из возможных фазовых траекторий адмитанса при начальном условии $X(0) = -n_1$, показателе преломления первого слоя n_1 , показателе преломления второго слоя n_2 и т.д.

Из рис. 3 видно, что, поскольку окружности семейств C_E^1 и C_E^2 взаимно пересекаются, фазовая траектория адмитанса может попасть в любую точку левой полуплоскости. Внутри окружности, отмеченной на рис. 3 цифрой 2, лежат все те значения адмитанса, которые могут быть получены с помощью двухслойных систем. Аналогично внутри окружности 3 лежит область значений адмитанса, реализуемых с помощью трехслойных систем. Очевидно, что последовательность таких областей заполняет всю левую полуплоскость.

Таким образом, имеет место нижеследующая теорема.

Теорема 1. Для любого значения входного адмитанса, удовлетворяющего условию $\text{Re} X < 0$ (любого значения амплитудного коэффициента отражения), существует слоистая система, реализующая заданное значение.

Нетрудно получить аналитические оценки для минимального числа слоев системы, необходимого для получения заданного значения входного импеданса.

Обозначим C_2^2, C_4^2, \dots окружности второго семейства, ограничивающие максимально достижимую область адмитанса с помощью двухслойных, четырехслойных и т.д. систем, а E_2, E_4, \dots - координаты центров этих окружностей.

Пусть C_3^1, C_5^1, \dots - окружности первого семейства, ограничивающие аналогичные области для трехслойных, пятислойных и т.д. систем, и E_3, E_5, \dots - координаты их центров.

Для координат центров этих окружностей получаются следующие выражения (если первый слой имеет показатель преломления n_1):

$$\xi_{2m} = -\frac{1}{2} \left[\frac{n_1^2}{n_l} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2m-2} + n_l \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{2m} \right], \quad \xi_{2m+1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{n_1^2}{n_l} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2m} + n_l \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{2m} \right].$$

Пусть X_k - заданное значение входного адмитанса. Центры окружностей первого и второго семейства, на которых лежит значение X_k , находятся соответственно в точках η_1 и η_2 , определяемых выражениями

$$\eta_1 = (|X_k|^2 + n_1^2) / (2 \operatorname{Re} X_k), \quad \eta_2 = (|X_k|^2 + n_2^2) / (2 \operatorname{Re} X_k).$$

Если $\eta_1 < \xi_{2m+1}$ ($\eta_2 < \xi_{2m}$), то значение X_k реализуемо с помощью $2m+1$ -слойной ($2m$ -слойной) системы. Эти неравенства дают оценку минимального числа слоев системы.

Заметим, что при решении конкретных задач проще определять минимальное число слоев системы непосредственно из рис. 3, на котором проведены окружности C_2^2 , C_3^1 , C_4^2 , ...

3. Постановка задачи оптимального синтеза

При анализе картины фазовых траекторий легко заметить, что существует бесконечное множество различных фазовых траекторий, приходящих в одну и ту же конечную точку в фазовой плоскости адмитанса. Тем самым задача построения слоистой системы с заданным значением входного адмитанса имеет бесчисленное множество решений. Это означает, что можно поставить задачу оптимального синтеза, потребовав наряду с получением заданного входного адмитанса наилучшего выполнения еще какого-либо критерия. В качестве такого критерия выберем условие минимальности общей толщины слоистой системы z_0 и сформулируем задачу в несколько более общем по сравнению с данным в разделе 2 виде, потребовав получения заданного значения входного адмитанса X_k при произвольном начальном значении адмитанса X_H .

Итак, требуется найти такое распределение $n(z)$, при котором решение уравнения

$$dX/dz = ik[n^2(z) - X^2(z)] \quad (9)$$

одновременно удовлетворяет граничным условиям

$$X(0) = X_H, \quad X(z_0) = X_k \quad (10)$$

и при этом общая толщина слоистой системы z_0 минимальна

$$z_0 \rightarrow \min. \quad (11)$$

На показатель преломления искомой слоистой системы всегда накладываются условия физической реализуемости [3]. Как правило, они имеют вид

$$n_2 \leq n(z) \leq n_1, \quad (12)$$

где n_1 и n_2 - максимально и минимально возможные значения показателей преломления.

Условия (9)–(12) выражают математическую постановку сформулированной задачи оптимального синтеза. В такой постановке задача синтеза близка к задачам оптимального быстрогодействия в теории оптимального управления [4] и для нее также может быть получена теорема о необходимых условиях оптимальности в форме прин-

ципа максимума Понтрягина. Чтобы сформулировать эту теорему, введем в рассмотрение так называемое сопряженное уравнение. В нашем случае оно имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dz} = -2ik\Psi(z)\chi^*(z), \quad (13)$$

где

$\Psi(z)$ - комплекснозначная функция (сопряженная функция);

$\chi(z)$ - решение уравнения (9) для адмитанса;

звездочка - значок комплексного сопряжения (как и ранее).

Пусть $n_0(z)$ - оптимальное распределение показателя преломления, дающее решение сформулированной выше задачи оптимального синтеза, $\chi_0(z)$ - соответствующее ему решение уравнения (9), а $\Psi(z)$ - некоторое решение сопряженного уравнения (13) с $\chi_0^*(z)$ в правой части. Введем в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H[n(z), \chi_0(z), \Psi(z)] = ik[n^2(z) - \chi_0^2(z)]\Psi^*(z).$$

Необходимые условия оптимальности для поставленной задачи формулируются следующим образом.

Теорема 2. Существует такое решение сопряженного уравнения с $\chi_0^*(z)$ в правой части (13), что:

$$1) \operatorname{Re}H[n_0(z), \chi_0(z), \Psi(z)] \equiv \text{const};$$

2) действительная часть функции Гамильтона достигает на оптимальном распределении $n_0(z)$ максимума по всем допустимым значениям $n(z)$.

Второе утверждение приводит к неравенству

$$\operatorname{Re}\{ik\Psi^*(z)\}[n^2(z) - n_0^2(z)] \geq 0, \quad (14)$$

которое должно выполняться для всех n , удовлетворяющих ограничениям (12).

Обозначим

$$b(z) = \operatorname{Re}\{ik\Psi^*(z)\} = k\operatorname{Im}\Psi(z). \quad (15)$$

Из условия (14) следует, что при $b(z) > 0$ функция $n_0(z)$ должна принимать максимально возможное значение n_1 , а при $b(z) < 0$ - минимально возможное значение n_2 . Таким образом, оптимальная слоистая система должна состоять из слоев с чередующимися показателями преломления n_1 и n_2 . При этом на границах слоев функция $b(z)$ должна обращаться в ноль.

Рис. 4 иллюстрирует соответствие показателей преломления слоев оптимальной системы знаку функции $b(z)$.

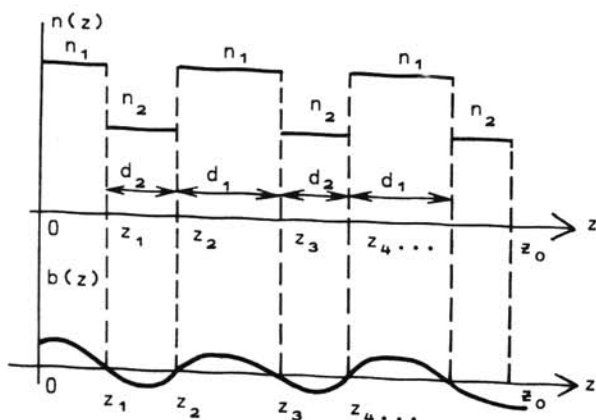


Рис. 4. Оптимальная слоистая система

4. Полное решение проблемы синтеза оптимальной слоистой системы

Для сформулированной задачи оптимального синтеза удастся получить ее полное решение, то есть указать алгоритм определения всех параметров оптимальной слоистой системы при любых начальном и конечном значениях адмитанса. Показатели преломления слоев оптимальной системы определены из положений теоремы 2. Найти толщины всех слоев позволяет использование результата, полученного Г.Д. Бабэ и Е.Л. Гусевым [5]. Для рассмотренной в [5] задачи минимизации энергетического коэффициента пропускания (отражения) ими было показано, что внутренние слои оптимальной слоистой системы с одинаковыми показателями преломления (n_1 или n_2) имеют и одинаковые толщины (d_1 или d_2). Кроме того, для оптимальной слоистой системы выполняется условие

$$n_1 \operatorname{ctg} k n_1 d_1 = -n_2 \operatorname{ctg} k n_2 d_2. \quad (16)$$

Такой же результат имеет место и для рассматриваемой оптимизационной задачи: все внутренние слои с показателем преломления n_1 имеют одинаковую толщину d_1 , а все внутренние слои с показателем преломления n_2 - толщину d_2 (см. рис. 4). При этом также справедливо равенство (16), связывающее толщины четных и нечетных внутренних слоев.

Можно показать, что задача оптимального синтеза является по существу однопараметрической. Поэтому можно ввести некоторый параметр μ , выразить через него все толщины слоев, затем получить условие для определения конкретного значения этого параметра, а уже через него и толщин всех слоев оптимальной структуры. Авторы предлагают именно такой путь решения проблемы оптимального синтеза.

Предположим, что первый от подложки слой имеет показатель преломления n_1 . Часто такой выбор показателя преломления делают из некоторых априорных соображений. В общем случае можно просто рассмотреть второй вариант (с показателем преломления первого слоя n_2) и сравнить два полученных оптимальных решения.

Введем параметр μ следующим образом:

$$\operatorname{ctg} k n_2 d_2 = \mu. \quad (17)$$

Тогда в соответствии с (16)

$$\operatorname{ctg} k n_1 d_1 = -(n_2/n_1)\mu. \quad (18)$$

Соотношения (17) и (18) выражают толщины всех внутренних слоев через параметр μ .

Для того чтобы выразить толщины первого и последнего слоя через параметр μ , воспользуемся еще одним результатом, полученным в [5]. Можно показать, что в каждом слое с постоянным показателем преломления n функция $b(z)$ имеет следующий вид

$$b(z) = C \sin 2kn(z - \hat{z}) + D \cos 2kn(z - \hat{z}) + E,$$
 где C, D, E - некоторые константы (разные для различных слоев), а \hat{z} - произвольная точка в слое, например, координата его левой границы. На границах слоев первая и вторая производные $b(z)$ непрерывны. Эти условия позволяют связать между собой константы C и D в соседних слоях. В первом слое положим $\hat{z}=0$. Тогда из условия обращения функции $b(z)$ в ноль на правой границе первого слоя z_1 получим

$$C \sin 2k n_1 z_1 + D \cos 2k n_1 z_1 + E = 0. \quad (19)$$

Это уравнение связывает между собой константы C, D, E первого слоя и его толщину z_1 . Второе уравнение, связывающее между собой эти величины, можно получить из условий непрерывности первой и второй производных $b(z)$ в точке z_1 в следующем виде

$$\frac{C \sin 2kn_1 z_1 + D \cos 2kn_1 z_1}{C \cos 2kn_1 z_1 - D \sin 2kn_1 z_1} = \frac{n_2}{n_1} \mu. \quad (20)$$

Обратимся теперь к уравнению (13) для сопряженной функции. Используя явное решение уравнения для адмитанса (5), можно показать, что в слое с постоянным показателем преломления n решение сопряженного уравнения имеет вид

$$\Psi(z) = \frac{\hat{\Psi}}{n^2} [n \cos kn(z-\hat{z}) - i \hat{X}^* \sin kn(z-\hat{z})]^2, \quad (21)$$

где \hat{z} - некоторая точка внутри слоя, а $\hat{\Psi}$ и \hat{X} - значения функций $\Psi(z)$ и $X(z)$ в этой точке. Положив в первом слое $\hat{z}=0$, получим $\hat{X}=X_H$. Далее, используя (15), можно выразить константы C, D, E первого слоя через $\hat{\Psi}$ и отсюда найти связь между ними. Окончательно получим

$$D(1-|X_H|^2/n^2) - 2C \operatorname{Im} X_H/n - E(1+|X_H|^2/n^2) = 0. \quad (22)$$

Уравнения (19), (20) и (22) позволяют исключить неизвестные константы C, D, E и получить уравнение для определения толщины первого слоя z_1 в следующем виде

$$\begin{aligned} (\mu - \operatorname{Im} X_H/n_1) \zeta_1^2 + (1 - |X_H|^2/n_1^2 + 2\mu \operatorname{Im} X_H/n_1) \zeta_1 + \\ + \mu |X_H|^2/n_1^2 + \operatorname{Im} X_H/n_1 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\zeta_1 = -\operatorname{ctg} kn_1 z_1$.

То, что для определения z_1 получено квадратное уравнение, совершенно естественно, так как существуют две возможные точки перехода с окружности одного семейства в фазовой плоскости адмитанса на окружность другого семейства. Из двух решений следует выбрать то, которое дает меньшее значение z_1 .

Аналогичным путем можно выразить через параметр μ и толщину последнего слоя. Пусть N - общее число слоев оптимальной системы (оно находится независимо - см. п. 2) и d_N - толщина последнего слоя. При четном значении N уравнение для определения толщины последнего слоя будет иметь вид

$$\begin{aligned} (-\operatorname{Im} X_k/n_2 + \mu) \zeta_N^2 - (1 - |X_k|^2/n_2^2 + 2\mu \operatorname{Im} X_k/n_2) \zeta_N + \\ + \mu |X_k|^2/n_2^2 + \operatorname{Im} X_k/n_2 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\zeta_N = -\operatorname{ctg} kn_2 d_N$.

При нечетном значении N следует заменить в (24) n_2 на n_1 и μ на $-\mu n_2/n_1$.

Итак, толщины всех слоев оптимальной системы выражены через один параметр μ . Остается получить соотношение для определения этого параметра, для чего надо связать между собой реальные части адмитанса в начальной и конечной точках фазовой траектории. Обозначим значения адмитанса на границах слоев z_1, z_2, \dots через X_1, X_2, \dots . Используя формулу пересчета адмитанса (6), получим следующие выражения:

$$\operatorname{Re} X_1 = \operatorname{Re} X_H \frac{1 + \zeta_1^2}{\zeta_1^2 + |X_H|^2/n_1^2 + 2\zeta_1 \operatorname{Im} X_H/n_1}, \quad (25)$$

$$\operatorname{Re} X_{N-1} = \operatorname{Re} X_k \frac{1 + \zeta_N^2}{\zeta_N^2 + |X_k|^2/n^2 - 2\zeta_N \operatorname{Im} X_k/n} . \quad (26)$$

В (26) равно n_2 или n_1 в зависимости от того, является число слоев четным или нечетным. Правые части (25) и (26) однозначно определяются параметром μ , поэтому можно записать

$$\operatorname{Re} X_1 = g_1(\mu), \quad \operatorname{Re} X_{N-1} = g_2(\mu).$$

Для внутренних слоев формулы пересчета реальной части адмитанса значительно упрощаются. При переходе через два слоя с показателями преломления n_2 и n_1 реальная часть X преобразуется по формуле

$$\operatorname{Re} X_3 = \operatorname{Re} X_1 \frac{n_1^2/n_2^2 + \mu^2}{1 + \mu^2} .$$

Поэтому легко связать между собой $\operatorname{Re} X_{N-1}$ и $\operatorname{Re} X_1$. Эта связь и дает искомое уравнение. Например, при четном $N=2m$ получаем

$$g_2(\mu) = \left(\frac{n_1^2/n_2^2 + \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^{m-1} \cdot g_1(\mu) . \quad (27)$$

В уравнении (27) $g_{1,2}(\mu)$ вычисляются исходя из (23)–(26).

Нетрудно построить итерационный процесс решения этого уравнения. Найдя корень μ , можно затем определить конкретные значения всех толщин слоев оптимальной структуры. Таким образом, предложенная схема дает полное решение проблемы оптимального синтеза при произвольных значениях X_N и X_k .

Заметим, что для отдельных конкретных случаев (например, при $X_N = -n_1$) расчетные формулы существенно упрощаются.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К а р д П.Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных фильтров. Таллинн: Валгус, 1971. - 235 с.
2. С в е ш н и к о в А.Г., Т и х о н р а в о в А.В. Математические методы в теории синтеза оптических тонкослойных систем. Сбъ Некорректные задачи естествознания. М.: Изд-во МГУ, 1987, С. 254-274.
3. Т и х о н р а в о в А.В. Синтез слоистых сред. М.: Знание, сер. математика-кибернетика, 1987, № 5.
4. П о н т р я г и н Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. - 392 с.
5. Б а б э Г.Д., Г у с е в Е.Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987. - 215 с.