М.А. Зуев, А.Б. Шварцбург

КВАЗИДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Широкий класс задач нелинейного распространения электромагнитных сигналов традиционно описывается приближением медленных амплитуд. При этом разнообразие геометрических конфигураций полей практически не сказывается на структуре эволюционных уравнений. Представляется целесообразным рассмотреть общую схему квазидинамического разложения уравнений нелинейной электродинамики, приводящую к эволюционным системам Шредингеровского типа. Первая попытка такого рассмотрения была предпринята в [1] и развивается в данной работе.

Запишем нелинейные уравнения Максвелла в виде

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial(\vec{D} + \vec{P}^{\text{нел}})}{\partial t} + \vec{j}, \tag{1}$$

где $\vec{P}^{\text{нел}}$ - нелинейная добавка поляризуемости к линейной части электрической индукции $\vec{D}$.

Для описания распространения квазимонохроматического сигнала с несущей частотой ω положим

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{\mathrm{E}}\cdot e^{-i\omega t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega\cdot e^{-i\Omega t}\cdot\vec{E}_\Omega(\vec{r});$$

$$\vec{H} = \vec{\mathrm{H}}\cdot e^{-i\omega t},\ \vec{P}^{\text{нел}} = \vec{\mathrm{P}}^{\text{нел}}\cdot e^{-i\omega t},$$

где $\vec{\mathrm{E}}$, $\vec{\mathrm{H}}$, $\vec{\mathrm{P}}^{\text{нел}}$ - слабо зависящие от t комплексные амплитуды, а $\vec{E}_\Omega$ (и аналогично определяемые $\vec{D}_\Omega$, $\vec{B}_\Omega$, $\vec{H}_\Omega$, $\vec{j}_\Omega$) - Фурье-компоненты полей.

Пусть материальные связи между Фурье-компонентами описываются изотропными соотношениями

$$D_\Omega = \ddot{\varepsilon}_\Omega\cdot\vec{E}_\Omega;$$
$$\vec{B}_\Omega = \mu_\Omega\cdot\vec{H}_\Omega;$$
$$\vec{j}_\Omega = \sigma_\Omega\cdot\vec{E}_\Omega,$$

где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \Delta\varepsilon^{нер}$ включает в себя нерегулярную добавку $\Delta\varepsilon^{нер}$ к вещественной невозмущенной диэлектрической проницаемости ε. При этом, как нетрудно показать,

$$\vec{D} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{i^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K \varepsilon}{\partial \omega^k} \cdot \frac{\partial^K \vec{E}}{\partial t^k} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Аналогично выражаются $\vec{B}$ через μ, $\vec{H}$ и $\vec{j}$ через σ, $\vec{E}$. Тогда из (1), опуская громоздкие выкладки, можно получить общее квазидинамическое разложение

$$\Delta\vec{E} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{i^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \cdot \frac{\partial^K}{\partial \omega^K} \cdot \left\{\omega^2 \mu\varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon}) + \left[\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \mathrm{rot}\ \vec{E}\right]\right\} = -\vec{A}, \tag{2}$$

$$\vec{A} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{i^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \cdot \frac{\partial^K}{\partial \omega^K} \left\{\omega^2 \mu\varepsilon \cdot i\gamma \cdot \vec{E} + i\vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla}\gamma}{1+i\gamma}) + \omega\mu \cdot \vec{Q} + \vec{\nabla}(\frac{\mathrm{div}\ \vec{Q}}{\omega\varepsilon \cdot (1+i\gamma)})\right\} \tag{3}$$

Здесь безразмерная величина $\gamma = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} - i \cdot \frac{\Delta\varepsilon^{нер}}{\varepsilon}$ характеризует влияние поглощения и нерегулярности. В (2) и (3) по ω дифференцируются материальные параметры ε, μ, γ, а по времени t – амплитуды $\vec{E}$ и $\vec{Q} = \omega \cdot \vec{P}^{нел} + i\frac{\partial \vec{P}^{нел}}{\partial t}$. При этом в дифференцировании по ω вектор $\vec{Q}$ (как и $\vec{E}$) не участвует, несмотря на явную зависимость $\vec{Q}$ от ω.

Следует отметить, что структура уравнений эволюции медленных амплитуд (2) и (3) несколько сложнее традиционных соотношений для Фурье-компонент. Однако характерные нелинейные отклики $\vec{P}^{нел}$ определяются, как правило, не Фурье-компонентами, а амплитудами полей, что и является решающим аргументом в пользу построения общей теории на основе (2) и (3).

Конкретизируем полученные соотношения для описания эволюции формы импульса в многомодовом волноводе с продольной осью z. Положим в нулевом приближении (2): $\vec{A} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, что приводит к традиционной задаче о поперечном распределении мод

$$\vec{E}_m = \vec{e}_m(\vec{r}_\perp)\exp(ik_m \cdot z),\ \vec{H}_m = \vec{h}_m(\vec{r}_\perp)\exp(ik_m z),$$

удовлетворяющих стационарному линейному регулярному варианту исходной системы (1): $\mathrm{rot}\ \vec{E}_m = i\omega\mu\vec{H}_m$, $\mathrm{rot}\ \vec{H}_m = -i\omega\varepsilon \cdot \vec{E}_m$. При этом сшивка поперечных граничных условий позволяет определить спектр продольных волновых чисел k_m и поля мод $\vec{e}_m$, $\vec{h}_m$, которые в дальнейшем будем считать заданными. Кроме того, ниже используются традиционные для волноводов условия $\vec{\nabla}\mu = 0$, $\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = 0$, причем μ, ε – вещественные. Таким образом, $\vec{e}_m$ удовлетворяет модовым уравнениям

$$\begin{gathered}\Delta_\perp \vec{e}_{m_\perp} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{e}_{m_\perp} + \vec{\nabla}_\perp(\vec{e}_{m_\perp} \cdot \frac{\vec{\nabla}_\perp \varepsilon}{\varepsilon}) = k_m^2 \cdot \vec{e}_{m_\perp}, \\ e_{mz} = \frac{i}{k_m} \cdot \left[\mathrm{div}\ \vec{e}_{m_\perp} + (\vec{e}_{m_\perp} \cdot \frac{\vec{\nabla}_\perp \varepsilon}{\varepsilon})\right].\end{gathered} \tag{4}$$

Следует также отметить используемое далее свойство ортогональности поперечных модовых компонент [2,3]: $\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx \cdot dy \cdot \left[\vec{e}_{m_\perp} \times \vec{h}_{n_\perp}\right] = 0$ при $k_n \neq k_m$. Преобразуя данный интеграл в более наглядную форму, введем ортонормированный оператор поперечного усреднения $\hat{\Pi}_n$:

$$\hat{\Pi}_n\cdot\vec{a} = \frac{\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot dx\cdot dy\cdot(\vec{e}_{n_\perp} - \frac{i}{k_n}\cdot e_{nz}\cdot div_\perp)\cdot\vec{a}}{\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\cdot dy\cdot(\vec{e}_{n_\perp} - \frac{i}{k_n} e_{nz}\cdot div_\perp)\cdot\vec{e}_{n_\perp}}, \tag{5}$$

для которого

$$\hat{\Pi}_n\cdot\vec{e}_{m_\perp} = \delta_{mn} = \begin{cases}1 \text{ для } k_n = k_m\\ 0 \text{ для } k_n \neq k_m\end{cases}$$

Ниже при конкретизации общих соотношений будем использовать простейшие TE_{on}-моды осесимметричного волновода радиуса a с параболическим профилем диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_{max}\cdot(1 - 2\cdot\Delta\cdot\frac{r^2}{a^2})$. В этом случае для $\vec{e}_n = (0, e_{n\varphi}(r)\cdot\exp(ik_n z), 0)$ имеем [4,5]:

$$k_n^2 = \omega^2\cdot\mu\cdot\varepsilon_{max} - \frac{4v}{a^2}\cdot n,\quad v = \omega\sqrt{\mu\cdot\varepsilon_{max}}\cdot a\sqrt{2\cdot\Delta}, \tag{6}$$

$$e_{n\varphi} = const\cdot R\cdot e^{-\frac{v\cdot R^2}{2}}\cdot L^1_{n-1}(v\cdot R^2),\quad R = \frac{r}{a},$$

где $L^1_N(x)$ - полиномы Лагерра: $L^1_o(x) = 1$, $L^1_1(x) = 2 - x, \ldots$

Важными особенностями указанных мод, позволяющими упростить конечные результаты, являются очевидные соотношения

$$e_{nz} = 0,\quad div((\vec{e}_m\cdot\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_{n_\perp}) = 0,$$

$$\hat{\Pi}_n\cdot\vec{a} = \int\limits_o^\infty 2\pi R\cdot dR\cdot e_{n\varphi}\cdot a_\varphi/\int\limits_o^\infty 2\pi R\cdot dR\cdot e^2_{n\varphi}. \tag{7}$$

Ниже используются нормированные TE_{on}-моды, для которых

$\int\limits_o^\infty 2\pi R\cdot dR\cdot e_{m\varphi}\cdot e_{n\varphi} = \delta_{mn}$, т.е. в (6) $const = \frac{v}{\sqrt{\pi\cdot n}}$. В частности, для угловых компонент TE_{o1} и TE_{o2} мод имеем

$$e_1 = \frac{v\cdot R}{\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{vR^2}{2}),\quad e_2 = \frac{v\cdot R}{\sqrt{2\pi}}\cdot(2 - v\cdot R^2)\cdot\exp(-\frac{vR^2}{2}), \tag{8}$$

причем в случае слабонаправляющего волновода ($\Delta \ll 1$) можно положить:

$$k_n \approx \omega\sqrt{\mu\cdot\varepsilon_{max}}.$$

Для описания эволюции модовых амплитуд введем квазидинамическое разложение по модам поперечной составляющей электрического поля

$$\vec{E}_\perp = \sum_n\sum_{K=0}^{\infty}\frac{i^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K F_n}{\partial t^K}\cdot\vec{e}^{(K)}_{n_\perp} = \sum_n(F_n\cdot\vec{e}_{n_\perp} + i\frac{\partial F_n}{\partial t}\cdot\vec{e}'_{n_\perp} - \ldots) \tag{9}$$

Здесь и далее $F_n = f_n(t,z)\cdot\exp(ik_n z)$, где f_n - слабо зависящие от (t,z) комплексные амплитуды, $\vec{e}^{(K)} \equiv \frac{\partial^K\vec{e}}{\partial\omega^K}$, $\vec{e}' = \frac{\partial\vec{e}}{\partial\omega}$. Соотношение (9) является прямым следствием аддитивного разложения Фурье-компонент поля по ортогональному набору поперечных модовых векторов $\vec{E}_{\Omega_\perp} = \sum_n C_{n\Omega}(z)\cdot\vec{e}_{n_\perp}(\Omega, \vec{r}_\perp)$. При этом будем учитывать лишь дискретный спектр k_n, опуская вытекающие моды.

Следует отметить, что в отличие от случая стационарной монохроматической волны поперечная структура импульса каждой моды эволюционирует согласно (9) уже в первом приближении теории дисперсии. Данное обстоятельство игнорируется во многих работах (см. например, [6-9]). Между тем последовательное развитие предлагаемой теории указывает на то, что фиксация поперечного распределения модовых импульсов, т.е. использование вместо (9) разложения $\vec{E}_\perp = \sum_n F_n(t,z)\cdot \vec{e}_{n\perp}(\vec{r}_\perp)$, приводит к физически необоснованным эффектам (например, ко взаимовлиянию импульсов различных мод в линейном регулярном волноводе). Учитывая важность данного утверждения, продемонстрируем его обоснованность на простейшем, легко проверяемом примере. Пусть TE-моды планарного волновода ($E_x = E_z = 0$, $E_y = E(t,z,x)e^{-i\omega t}$) распространяются в линейной, неоднородной, диспергирующей среде: $\mu = \mathrm{const}$, $\varepsilon = \varepsilon_\omega(x)$. Тогда волновое уравнение для медленной амплитуды примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E + \omega^2\mu\varepsilon E + i(\omega^2\mu\varepsilon)'_\omega \cdot \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{(\omega^2\mu\varepsilon)''}{2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \ldots = 0 \tag{9.1}$$

Нулевое приближение (9.1) $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\mu\varepsilon\right)\cdot E = 0$ с учетом граничных условий дает спектр волновых чисел k_m и модовых векторов $e_m(\omega,x)$

$E_m = e_m(\omega,x)\cdot\exp(ik_m z)$, причем

$$\frac{\partial^2 e_m}{\partial x^2} + (\omega^2\mu\cdot\varepsilon_\omega(x) - k_m^2)e_m = 0. \tag{9.2}$$

Если теперь ввести традиционное (но неверное !) разложение амплитуды $E(t,z,x)$ по модам

$$E = \sum_m f_m(t,z)\cdot e_m(\omega,x)\cdot\exp(ik_m z), \tag{9.3}$$

то в первом дисперсионном приближении из (9.1) имеем

$$\sum_m\left[2ik_m\cdot\frac{\partial f_m}{\partial z} + i\left(\omega^2\mu\varepsilon_\omega(x)\right)'_\omega\cdot\frac{\partial f_m}{\partial t}\right]\cdot e_m\cdot\exp(ik_m z) = 0. \tag{9.4}$$

Используя вытекающую из (9.2) ортогональность модовых функций $\int dx\cdot e_m\cdot e_n = 0$ при $m \neq n$, домножим (9.4) на e_n и проинтегрируем. При этом неоднородность $\varepsilon_\omega(x)$ по x не позволяет ортогонализировать коэффициенты при $\frac{\partial f_m}{\partial t}$

$$2k_n\cdot\frac{\partial f_n}{\partial z} + \sum_m\frac{\partial f_m}{\partial t}\cdot e^{i(k_m-k_n)z}\cdot\frac{\int dx\cdot(\omega^2\mu\varepsilon_\omega(x))'_\omega\cdot e_m\cdot e_n}{\int dx\cdot e_n^2} = 0. \tag{9.5}$$

Таким образом, распространение мод в модели (9.1-9.3) не независимо даже в первом дисперсионном приближении, что не позволяет, например, ввести понятие групповой скорости отдельной моды. Скрытая причина подобного абсурда - некорректность традиционного разложения (9.3), т.е. недопустимость фиксации поперечного распределения моды в импульсе. Действительно, каждая гармоника импульса имеет свой профиль: e_m зависит от ω, причем, как показано ниже на конкретных примерах, эта зависимость отнюдь не мала.

Возвращаясь к общей теории, подставим (9) в (2). Тогда, ограничиваясь описанием вперед-бегущих волн ($k_m > 0$), можно получить эволюционные уравнения для медленных амплитуд $f_m(t,z)$ в виде

$$\hat{D}_m\cdot f_m = R_m, \tag{10}$$

где левая часть определяется дифференциальным оператором

$$\hat{D}_m \cdot f_m = \frac{\partial f_m}{\partial z} - i \sum_{K=1}^{\infty} \frac{i^K}{K!} k_m^{(K)} \cdot \frac{\partial^K f_m}{\partial t^K} = \tag{11}$$

$$= \frac{\partial f_m}{\partial z} + k_m' \cdot \frac{\partial f_m}{\partial t} + \frac{ik_m''}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_m}{\partial t^2} - \frac{k_m'''}{6} \cdot \frac{\partial^3 f_m}{\partial t^3} - \ldots,$$

а правая часть R_m связана с наличием возмущающих факторов, описанных согласно (3) вектором $\vec{A}$.

Интересно отметить, что временную часть дифференциального оператора (11) можно перевести в интегральную форму, полезную при анализе ряда задач

$$\hat{D} \cdot f(t,z) = \frac{\partial f}{\partial z} - i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cdot f(t+\tau) \cdot S_{\omega}(\tau), \tag{11.1}$$

где ядро $S_{\omega}(\tau)$ суммирует информацию обо всех степенях дисперсионного разложения волнового вектора

$$S_{\omega}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot e^{i(\Omega-\omega)\cdot\tau} \cdot (k_{\Omega} - k_{\omega}). \tag{11.2}$$

Определяя структуру R_m, учтем модовый характер возмущающих факторов. Это позволяет выделить в $\vec{A}$ медленные амплитуды, положив

$$\vec{A}_{\perp} = \sum_n \vec{A}_{n\perp} \cdot e^{iq_n \cdot z}. \tag{12}$$

В классе задач, требующих условия фазового синхронизма, можно принять $q_n = k_n$. В более общем случае q_n определяется комбинациями волновых векторов. Используя (12), ограничимся первыми производными от медленных амплитуд $A_{n\perp}$. Тогда при условии $q_n > -k_n$, опуская громоздкие преобразования, получим

$$R_m = \sum_n \Phi_{mn} \cdot e^{i(q_n - k_m)\cdot z}, \tag{12.1}$$

где

$$\Phi_{mn} = \frac{i\Pi_m \cdot \vec{A}_{n\perp}}{(k_m+q_n)} + \frac{\hat{\Pi}_m \cdot (k_m' \cdot \frac{\partial \vec{A}_{n\perp}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}_{n\perp}}{\partial z})}{(k_m+q_n)^2} + \sum_K \frac{(\hat{\Pi}_m \cdot \vec{e}_K')}{(k_m+q_n)} \cdot \hat{\Pi}_K \cdot \frac{\partial \vec{A}_{n\perp}}{\partial t}. \tag{12.2}$$

Дальнейшее развитие теории для конкретизации R_m (12) с помощью $\vec{A}$ (3) будем проводить, пренебрегая членами $\sim O^2$, где $O = \max\left\{(\frac{1}{\omega T})^2,\ |\gamma|,\ \frac{|\vec{P}^{нел}|}{\varepsilon \cdot |\vec{E}|}\right\}$, и удерживая члены $\sim (\frac{1}{\omega T}) \cdot O$ (что неявно предполагалось и при выводе (12). Здесь T - характерная длительность импульса: $\frac{\partial}{\partial\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sim (\frac{1}{\omega T})$, а входящие в O факторы определяют соответствующие масштабы длин: дисперсионного расплывания, затухания и нелинейного самовоздействия.

При таком допущении:

1) вектор $\vec{A}$ в (3) распадается на нерегулярную и нелинейную части, позволяющие разделить и $R_m = R_m^{(\gamma)} + R_m^{(нел)}$;

2) необходимое для определения $\vec{A}$ продольное поле E_z также удается представить в аддитивной квазидинамической форме

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \sum_n i \sum_{K=0}^{\infty} \frac{i^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K (k_n e_{nz})}{\partial \omega^K} \cdot \left[\frac{\partial^K F_n}{\partial t^K} - \sum_n iF_n \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{\nabla}\gamma) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial F_n}{\partial t} \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{\nabla}\gamma)'_\omega \right] - \frac{\operatorname{div} \vec{P}^{нел}}{\varepsilon} - i(\frac{1}{\varepsilon})'_\omega \cdot \operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}^{нел}}{\partial t} . \tag{13}$$

При этом игнорирование в $\vec{A}$ членов $\sim O^2$ позволяет использовать для его вычисления первое приближение $E_z^{(1)}$, в котором опущены члены $\sim O$. Тогда из (13) можно получить

$$E_z^{(1)} = \sum_n (F_n e_{nz} + i \frac{\partial F_n}{\partial t} \cdot e'_{nz}), \tag{13.1}$$

что соответствует квазидинамической структуре поперечного поля (9).

Используя (9) и (13.1), нетрудно выделить в рамках (3) и (12) влияние нерегулярных (связанных с поглощением) факторов

$$R_m^{(\gamma)} = \sum_n (-\Gamma_{mn}^{(0)} \cdot f_n + i\Gamma_{mn}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial t}) e^{i(k_n - k_m)\cdot z}, \tag{14}$$

где

$$\Gamma_{mn}^{(0)} = \frac{(\hat{\Pi}_m \cdot \vec{G}_n)}{(k_m + k_n)}, \quad \vec{G}_n = \omega^2 \mu\varepsilon\gamma \vec{e}_{n\perp} + \vec{\nabla}_\perp (\vec{e}_n \cdot \vec{\nabla}\gamma),$$
$$\Gamma_{mn}^{(1)} = \sum_K \frac{(\hat{\Pi}_K \cdot \vec{G}_n) \cdot (\hat{\Pi}_m \cdot \hat{e}'_K)}{(k_m + k_n)} - \hat{\Pi}_m \cdot (\frac{G_n}{k_m + k_n})' . \tag{14.1}$$

Влияние нелинейной поляризации произвольного вида в рамках (3) описывается (с отбрасыванием членов $\sim O^2$) выражением:

$$\vec{A}^{нел} = (1 + i \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t}) \cdot (\omega^2 \mu \vec{P}^{нел} + \vec{\nabla} \frac{\operatorname{div} \vec{P}^{нел}}{\varepsilon}), \tag{15}$$

где по ω дифференцируются $(\omega^2 \mu)$ и $(1/\varepsilon)$. При этом, чтобы воспользоваться результатом формул (12), необходимо выделить в $\vec{P}^{нел}$ медленные амплитуды, положив:

$$\vec{P}^{нел} = \sum_n \vec{P}_n (t, z, r_\perp) \cdot e^{iq_n z}, \tag{16}$$

где индекс n соответствует комбинации мод.

Например, для изотропной кубической нелинейности $\vec{P}^{нел} = \alpha \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}^*)\vec{E} \simeq \sum_{ijm} f_i f_j^* f_m \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^*) \vec{e}_m \cdot \exp[(i(k_i - k_j + k_m)z]$, т.е. $q_n = k_i - k_j + k_m$. Тогда из (12) и (15), опуская громоздкие преобразования, получим

$$R_m^{нел} = \sum_n (\Phi_{mn}^{(0)} + \Phi_{mn}^{(1)}) e^{i(q_n - k_m)\cdot z}, \tag{17}$$

где

$$\Phi_{mn}^{(0)} = \frac{i}{(k_m + q_n)} \cdot \hat{\Pi}_m \left[\omega^2 \cdot \mu \vec{P}_{n\perp} + \vec{\nabla}_\perp (\frac{\operatorname{div} \vec{P}_{n\perp} + iq_n \cdot P_{nz}}{\varepsilon})\right], \tag{17.1}$$

$$\Phi_{mn}^{(1)} = \frac{i}{(k_m + q_n)} \cdot \left[(\frac{\partial}{\partial z} + q'_n \cdot \frac{\partial}{\partial t}) \Phi_{mn}^{(0)} + \hat{\Pi}_m \cdot \vec{\nabla}_\perp (\frac{\partial P_{nz} / \partial z}{\varepsilon})\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_K \hat{\Pi}_K\cdot\left\{a_{mnK}\cdot\vec{P}_{n\perp}+\vec{\nabla}_\perp\left[b_{mnK}\cdot(\operatorname{div}\vec{P}_{n\perp}+iq_nP_{nz})\right]\right\},\tag{17.2}$$

$$a_{mnK}=\left(\frac{\omega^2\mu}{k_m+q_n}\right)\cdot(\hat{\Pi}_m\cdot\vec{e}\,'_K)-\left(\frac{\omega^2\mu}{k_m+q_n}\right)'_\omega\cdot\delta_{Km},$$

$$b_{mnK}=\frac{(\hat{\Pi}_m\cdot\vec{e}\,'_K)}{\varepsilon(k_m+q_n)}-\left(\frac{1/\varepsilon}{k_m+q_n}\right)'_\omega\cdot\delta_{Km}.\tag{17.3}$$

Полученные общие выражения легко конкретизировать для ряда описываемых ниже случаев.

Одночастотная ситуация с безынерционной кубической нелинейностью. Тогда из [10]

$$\vec{P}^{\text{нел}}=\alpha\cdot(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\vec{E}+\beta(\vec{E}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E}^*\tag{18}$$

Одномодовая ситуация

$$\vec{E}=(f\cdot\vec{e}+i\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\vec{e}\,'+\dots)\cdot\exp(ikz).\tag{19}$$

Уравнение эволюции медленной амплитуды f в рамках указанных допущений примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial z}+k'\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{ik''}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{k'''}{6}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=R^{(\gamma)}+R^{\text{нел}},\tag{20}$$

$$R^{(\gamma)}=-\Gamma_0\cdot f+i\Gamma_1\cdot\frac{\partial f}{\partial t},\tag{20.1}$$

$$R^{\text{нел}}=i\varkappa_0\,|f|^2\cdot f+\varkappa_1\cdot\frac{\partial}{\partial t}(|f|^2\cdot f)+\Delta\varkappa_1\cdot f\cdot\frac{\partial}{\partial t}|f|^2,\tag{20.2}$$

где

$$\begin{cases}\Gamma_0=\hat{\Pi}\cdot\vec{V},\quad \Gamma_1=(\hat{\Pi}\cdot\vec{e}\,')\cdot\Gamma_0-\Pi\cdot\vec{V}',\\ \vec{V}=\frac{\omega^2\mu\varepsilon}{2k}\cdot\gamma\cdot\vec{e}_\perp+\vec{\nabla}_\perp\left(\frac{\vec{e}\cdot\vec{\nabla}\gamma}{2k}\right),\end{cases}\tag{21.}$$

$$\begin{cases}\varkappa_0=\hat{\Pi}\cdot\vec{U}_0,\ \varkappa_1=(\hat{\Pi}\cdot\vec{e}\,')\cdot\varkappa_0-\hat{\Pi}\cdot\vec{U}_0',\ \Delta\varkappa_1=\hat{\Pi}\cdot\vec{U}_1,\\ \vec{U}_0=\frac{\omega^2\mu}{2k}\cdot\vec{C}_{0\perp}+\vec{\nabla}_\perp\cdot\left(\frac{\operatorname{div}C_{0\perp}+ikC_{0z}}{2k\varepsilon}\right),\\ \vec{U}_1=\frac{\omega^2\mu}{2k}\cdot\vec{C}_{1\perp}+\vec{\nabla}_\perp\cdot\left(\frac{\operatorname{div}\vec{C}_{1\perp}+ik\cdot C_{1z}}{2k\varepsilon}\right),\\ \vec{C}_0=\alpha\cdot(\vec{e}\cdot\vec{e}^*)\vec{e}+\beta\cdot(\vec{e}\cdot\vec{e})\vec{e}^*\\ \vec{C}_1=\vec{C}_0'+\alpha\cdot(\vec{e}\cdot\vec{e}^{*\prime})\vec{e}+\beta\cdot(\vec{e}\cdot\vec{e})\vec{e}^{*\prime}\end{cases}\tag{21.1}$$

(при этом α, β в дифференцировании по ω не участвуют).

Следует отметить, что выражения для $\vec{U}$ и $\vec{V}$ в (21) и (21.1) содержат слагаемые, пропорциональные $\nabla_\perp$. Эти слагаемые, как и члены $\sim\operatorname{div}_\perp$ в операторе поперечного усреднения (5) - порядка $\left(\frac{1}{k\cdot r_\perp}\right)^2$ от основных. Традиционное пренебрежение ими оправдано лишь в "толстых" волноводах, либо для простейших ТЕ-поляризаций.

Влияние дисперсии нелинейности, связанное с коэффициентами $\varkappa_1$ и $\Delta\varkappa_1$ в (20.2) рассматривалось в ряде работ [11-14]. Эти слагаемые становятся существенными для сверхкоротких импульсов (в оптических волноводах - десятки, сотни фемтосекунд [11]). При этом традиционный интерес проявляется, как правило, к симметричному члену ($\sim\varkappa_1$), а наличие слагаемого $\sim\Delta\varkappa_1$ игнорируется [12], что связано с пренебрежением дисперсией модовых векторов $\vec{e}_\omega(\vec{r}_\perp)$. Однако даже для простейшей TE_{01} моды согласно (8) $\frac{\partial \ln e_\omega}{\partial\omega} \sim \frac{\partial \ln k}{\partial\omega}$, что обязывает включать в рассмотрение члены $\sim\vec{e}\,'_\omega$. Тем не менее, как показано ниже, "обнуление" $\Delta\varkappa_1$ может быть достигнуто для особой нормировки мод, которую каждый раз следует оговаривать. Таким образом, при вычислении $\varkappa_1$ и $\Delta\varkappa_1$ возникает необходимость корректного рассмотрения вопроса о нормировке модовых векторов $\vec{e}$, например, выбор const в (6). Действительно, нормировочный множитель (обозначим его η_ω) является функцией частоты ω, т.е. участвует в дифференцировании $\partial\vec{e}/\partial\omega$. Детальный анализ показывает: при замене $\vec{e}_\omega(\vec{r}_\perp)$ на $\tilde{\vec{e}} = \frac{\vec{e}}{\eta_\omega}$ инвариантность формы (9) для поля $\vec{E}$ требует введения вместо f функции $\tilde{f} = \eta_\omega \cdot f + i\eta' \cdot \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\eta''}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \ldots$ При этом уравнение эволюции (20) $\hat{D}\cdot f = R$ переходит в $\hat{D}\cdot\tilde{f} = \tilde{R} = \eta\cdot R + i\eta'\cdot\frac{\partial R}{\partial t}$, что фактически сводится к замене коэффициентов в (20.1 и 20.2):

$$\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0, \ \tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1, \ \tilde{\varkappa}_0 = \frac{\varkappa_0}{\eta^2}$$
$$\tilde{\varkappa}_1 = \frac{\varkappa_1}{\eta^2} + \frac{2\eta'}{\eta^3}\cdot\varkappa_0; \quad \Delta\tilde{\varkappa}_1 = \frac{\Delta\varkappa_1}{\eta^2} - \frac{4\eta'}{\eta^3}\cdot\varkappa_0. \tag{22}$$

В частности, как отмечалось выше, надлежащим выбором нормировки моды η_ω из (20.2) устраняется слагаемое $\Delta\tilde{\varkappa}_1\cdot\tilde{f}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left|\tilde{f}\right|^2$, т.к. согласно (20) имеем $\Delta\tilde{\varkappa} = 0$ при $\eta'_\omega = \frac{\eta}{4}\cdot\frac{\Delta\varkappa_1}{\varkappa_0}$.

В данной работе конкретизируются коэффициенты (21 и 21.1) для случая нормированной TE_{01} моды осесимметричного волновода (8). Тогда с учетом (7) получим:

$$\varkappa_0 = \frac{(\alpha+\beta)\cdot\omega^2\mu\cdot v}{8\pi k}, \ \varkappa_1 = -\varkappa_0' + \frac{v'}{4v}\cdot\varkappa_0, \ \Delta\varkappa_1 = \frac{v'}{v}\cdot\varkappa_0. \tag{23}$$

При этом равенство $\Delta\tilde{\varkappa}_1 = 0$ достигается, если $\eta = v^{1/4}$, т.е.

$$\tilde{e}_1 = v^{3/4}\cdot\exp(-v\cdot R^2/2).$$

В случае слабонаправляющего волновода, полагая для простоты $\gamma'_\omega = \mu'_\omega = \Delta'_\omega = \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} = 0$, имеем:

$$\Gamma_0 = \frac{\gamma}{2}\omega\sqrt{\mu\cdot\varepsilon_{max}}, \quad \Gamma_1 = -\left(\frac{1}{\omega} + \frac{\varepsilon_m'}{2\varepsilon_m}\right)\cdot\Gamma_0,$$

$$\varkappa_0 = \frac{(\alpha+\beta)\omega^2\mu\cdot a\sqrt{2\cdot\Delta}}{8\pi}, \ \varkappa_1 = \left(\frac{\varepsilon_m'}{8\varepsilon_m} - \frac{7}{4\omega}\right)\cdot\varkappa_0, \ \Delta\varkappa_1 = \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\varepsilon_m'}{2\varepsilon_m}\right)\varkappa_0.$$

Двухмодовая одночастотная ситуация с безинерционной кубической нелинейностью. В этом случае члены, характеризующие дисперсию нерегулярности и нелинейности рассматривать не будем. Тогда при вычислении $\vec{P}^{нел}$ (18) можно положить $\vec{E} = f_1\cdot\vec{e}_1\cdot\exp(ik_1\cdot z) + f_2\cdot\vec{e}_2\cdot\exp(ik_2 z)$. Ограничиваясь требованием фазового синхронизма, из (10), (14), (17) можно получить эволюционную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial z} + k_1'\cdot\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{ik_1''}{2}\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = i(R_{11}\cdot|f_1|^2 + R_{12}\cdot|f_2|^2)\cdot f_1 - \Gamma_1\cdot f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} + k_2'\cdot\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{ik_2''}{2}\cdot\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = i(R_{21}\cdot|f_1|^2 + R_{22}\cdot|f_2|^2)\cdot f_2 - \Gamma_2\cdot f_2, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\Gamma_m = \hat{\Pi}_m\cdot\left[\frac{\omega^2\mu\varepsilon\gamma}{2k_m}\cdot\vec{e}_{m_\perp} + \vec{\nabla}_\perp\left(\frac{\vec{e}_m\cdot\nabla\gamma}{2k_m}\right)\right], \qquad (24.1)$$

$$R_{mn} = \hat{\Pi}_m\cdot\left[\frac{\omega^2\mu}{2k_m}\cdot\vec{a}_\perp^{mn} + \vec{\nabla}_\perp\left(\frac{\operatorname{div}\vec{a}_\perp^{mn} + ik_m\cdot a_z^{mn}}{2k_m\cdot\varepsilon}\right)\right], \qquad (24.2)$$

$$\vec{a}^{mn} = \alpha\cdot(\vec{e}_m\cdot\vec{e}_n^*)\vec{e}_n + \beta(\vec{e}_m\cdot\vec{e}_n)\vec{e}_n^* +$$
$$+ (1-\delta_{mn})\cdot\left[\alpha\cdot(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n^*)\vec{e}_m + \beta\cdot(\vec{e}_m\cdot\vec{e}_n)\vec{e}_n^*\right]. \qquad (24.3)$$

Структура системы (24) обобщает целый класс задач нелинейной оптики (в частности, процессы нестационарного ВКР), описывая ряд практически важных эффектов [15,16]. В простейшем случае осесимметричных TE_{01}, TE_{02} мод, подставляя (8) с учетом (7), получим

$$R_{11} = R_{12} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot\omega^2\mu\cdot v}{8\pi k_1}, \quad R_{21} = \frac{k_1}{k_2}\cdot R_{11}, \quad R_{22} = \frac{5}{8}\cdot R_{21}. \qquad (25)$$

Для слабонаправляющего волновода при $\partial\gamma/\partial\varphi = 0$ имеем (25.1)

$$\Gamma_m = \frac{\gamma}{2}\omega\sqrt{\mu\cdot\varepsilon_{max}}.$$

Двухчастотная ситуация с безынерционной кубической нелинейностью. Пусть $\vec{E}_m = \vec{E}_m(t,r)\cdot e^{-i\omega_m\cdot t}$, $\vec{P}_m^{нел} = \vec{P}^{нел}\cdot e^{-i\omega_m t}$, $(m = 1,2)$.

Тогда с учетом самовоздействия из [10] имеем

$$\vec{P}_1^{нел} = \alpha_1\cdot(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1^*)\vec{E}_1 + \beta_1\cdot(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1)\cdot\vec{E}_1^* +$$
$$+ \xi_1\cdot(\vec{E}_2\cdot\vec{E}_2^*)\cdot\vec{E}_1 + \eta_1\cdot(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2^*)\vec{E}_2 + \lambda_1(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2)\cdot\vec{E}_2^* \qquad (26)$$

и симметричное по индексам 1 и 2 выражение для $\vec{P}_2^{нел}$. Опуская дисперсию нелинейности, для медленных амплитуд $f_m(\vec{E}_m = f_m\cdot\vec{e}_m(r_\perp,\omega_m)\cdot\exp(ik_m\cdot z))$ с учетом фазовой синхронизации получим снова систему (24). При этом коэффициенты Γ_m и R_{mn} определяются выражениями (24.1) и (24.2) с заменой ω на ω_m, а для $\vec{a}_{mn}$ теперь имеем

$$\begin{cases} \vec{a}^{11} = \alpha_1\cdot(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1^*)\vec{e}_1 + \beta_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1^*, \quad \vec{a}^{22} = \alpha_2\cdot(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2^*)\vec{e}_2 + \beta_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2^*, \\ \vec{a}^{12} = \xi_1\cdot(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2^*)\vec{e}_1 + \eta_1\cdot(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2^*)\vec{e}_2 + \lambda_1\cdot(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2^*, \\ \vec{a}^{21} = \xi_2\cdot(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1^*)\vec{e}_2 + \eta_2\cdot(\vec{e}_1^*\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_1 + \lambda_2\cdot(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_1^*. \end{cases} \qquad (27)$$

В частности, если обе моды $\vec{e}_m(r_\perp,\omega_m)$ соответствуют осесимметричной TE_{01}, то из (8) с учетом (7) получим

$$R_{11} = \frac{(\alpha_1+\beta_1)\cdot\omega_1^2\cdot\mu_1\cdot v_1}{8\pi k_1}, \quad R_{22} = \frac{(\alpha_2+\beta_2)\cdot\omega_2^2\cdot\mu_2\cdot v_2}{8\pi k_2} \qquad (28)$$
$$R_{12} = \frac{(\xi_1+\eta_1+\lambda_1)\cdot\omega_1^2\cdot\mu_1\cdot v_1^2\cdot v_2^2}{\pi\cdot k_1\cdot(v_1+v_2)^3}, \quad R_{21} = \frac{(\xi_2+\eta_2+\lambda_2)\cdot\omega_2^2\cdot\mu_2\cdot v_1^2\cdot v_2^2}{\pi\cdot k_2\cdot(v_1+v_2)^3}.$$

При этом с заменой ω на ω_m выполняется (25.1).

В заключение авторы выражают признательность И.Н. Сисакяну и А.Ю. Шерману за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Водяницкий С.Я., Зуев М.А., Шапинский В.В., Шварцбург А.Б. Квазидинамическое моделирование нелинейной эволюции импульсов в нерегулярных многомодовых градиентных волноводах // Компьютерная оптика: Сборник / МЦНТИ, М., 1989, Вып. 6, С. 37-43.

2. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.

3. Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1978.

4. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.

5. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.

6. Хасегава А., Кодама Ю. // Труды ИИЭР, 1981, Т. 69, № 9, С. 57.

7. Crosignani B., Cutolo A. Di Porto P. // J. Opt. Soc. Am., 1982, Vol. 72, P. 1136.

8. Альтшулер Г.В., Карасев В.Б., Козлов С.А., Мурина Т.А., Розанов Н.Н. // Оптика и спектроскопия, 1986, Т. 61, Вып. 2, С. 359.

9. Абдуллаев Ф.Х., Дарманян С.А., Хабибуллаев П.К. Оптические солитоны. Ташкент: Фан, 1987.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982.

11. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных импульсов. М.: Наука, 1989.

12. Дианов Е.М., Никонова З.С., Серкин В.Н. Самовоздействие сверхкоротких импульсов в волоконных световодах. ИОФАН, препринт № 8, 1988.

13. Kodama Y., Nozaki K. // Optics letters, 1987, Vol. 12, N 12, P. 1038.

14. Kodama Y., Hasegawa A. // IEEE J. Quantum Electron. 1987, Vol. 23, B. 510.

15. Шерман А.Ю. Нелинейное взаимодействие солитонных импульсов в многомодовом оптическом волокне // Компьютерная оптика: Сборник / МЦНТИ, М., 1989, Вып. 6.

16. Дианов Е.М., Никонова З.С., Прохоров А.М., Серкин В.Н. // Письма в ЖТФ, 1985, Т. 11, Вып. 17, С. 1030.