

СИНТЕЗ ФАЗОВОГО ТРАСПАРАНТА С ЗАДАННОЙ ИНДИКАТРИСОЙ РАССЕЯНИЯ

1. Вывод явной формулы для функции пропускания случайного фазового транспаранта

В рамках задачи о синтезе элементов плоской компьютерной оптики представляется интерес поиск методов синтеза фазовых элементов со случайной функцией комплексного пропускания, формирующих световые поля с заданными статистическими характеристиками.

В работе предлагается новый метод расчета случайной фазовой функции транспаранта, создающего в дальней зоне дифракции световое поле с заданным распределением средней интенсивности. Приводятся результаты численного моделирования предложенного алгоритма.

Средняя интенсивность когерентного монохроматического света в дальней зоне дифракции связана с автокорреляцией функции комплексного пропускания случайного транспаранта (диффузора) преобразованием Фурье:

$$\langle I(\vec{x}) \rangle = \iint_{S'} G(\vec{\zeta}) \exp\left(\frac{ik}{z} \vec{x} \vec{\zeta}\right) d^2 \zeta, \quad (1)$$

где $G(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}') = \langle \exp[i\varphi(\vec{\zeta}) - i\varphi(\vec{\zeta}')] \rangle$ - автокорреляционная функция чисто фазового пространственно однородного случайного поля, формирующегося сразу за диффузором с функцией пропускания, равной $\exp[i\varphi(\vec{\zeta})]$;

$\langle I(\vec{x}) \rangle$ - средняя интенсивность света в дальней зоне дифракции;

$\langle \dots \rangle$ - знак усреднения по реализациям статистически подобных фазовых диффузоров;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число света с длиной волны λ ;

z - расстояние от диффузора до Фурье-плоскости;

S' - область задания функции пропускания диффузора.

Из (1) для функции $G(\vec{x})$ получается выражение

$$G(\vec{\zeta}) = \frac{1}{C} \iint_S \langle I(\vec{x}) \rangle \exp\left(-\frac{ik}{z} \vec{x} \vec{\zeta}\right) d^2 x, \quad (2)$$

где $C = \iint_S \langle I(\vec{x}) \rangle d^2 x$, S - область задания требуемой интенсивности.

Для дальнейшего потребуется ряд упрощающих предположений, необходимых для того, чтобы рассуждения можно было довести до конца. Так будем требовать нормальности распределения вероятности для фазовой функции диффузора $\varphi(\vec{x})$. При этом пусть имеют место соотношения:

$$\langle \varphi(\vec{x}) \rangle = 0, \quad \langle \varphi^2(\vec{x}) \rangle = \sigma^2,$$

$$\langle \varphi(\vec{x}) \varphi(\vec{x}') \rangle = \sigma^2 h(\vec{x} - \vec{x}'),$$

которые означают, что среднее значение фазы диффузора равно нулю, дисперсия постоянная и равна σ^2 , функция автокорреляции фазы $h(\vec{x} - \vec{x}')$ зависит от разности аргументов.

Для гауссовых случайных полей известно*, что автокорреляция поля $\exp[i\varphi(\vec{x})]$ и автокорреляция фазы $\varphi(\vec{x})$ связаны соотношением

$$G(\vec{x}) = \exp[-\sigma^2(1 - h(\vec{x}))], \quad (3)$$

из которого получается выражение для функции

$$h(\vec{x}) = 1 + \sigma^{-2} \ln G(\vec{x}). \quad (4)$$

Одну из реализаций фазы транспаранта $\varphi(\vec{x})$ можно смоделировать численно с помощью некоторого преобразования исходного белого шума $n(\vec{x})$, который задается датчиком псевдослучайных чисел. Покажем, что искомым преобразованием является следующее:

$$\varphi(\vec{x}) = \sigma \iint_{S'} \sqrt{H(\vec{\zeta})} n(\vec{\zeta}) \exp(-i\vec{x}\vec{\zeta}) d^2\zeta. \quad (5)$$

Действительно, так как $\langle n(\vec{\zeta}) n(\vec{\zeta}') \rangle = \delta(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}')$, то из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma^2 h(\vec{x} - \vec{x}') &= \langle \varphi(\vec{x}) \varphi(\vec{x}') \rangle = \\ &= \sigma^2 \iint_{S'} \iint_{S'} [H(\vec{\zeta}) H(\vec{\zeta}')]^{\frac{1}{2}} \langle n(\vec{\zeta}) n(\vec{\zeta}') \rangle \exp[i(\vec{x}\vec{\zeta} - \vec{x}'\vec{\zeta}')] d^2\zeta d^2\zeta' = \\ &= \sigma^2 \iint_{S'} H(\vec{\zeta}) \exp[i(\vec{x} - \vec{x}')\vec{\zeta}] d^2\zeta. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что функция $H(\vec{\zeta})$ из (5) является обратным преобразованием Фурье от автокорреляции фазы диффузора.

Из (2), (4), (5) и (6) следует окончательное выражение для вычисления реализации фазы синтезируемого диффузора через требуемое распределение интенсивности и через реализацию белого шума:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \sigma \iint_{S'} n(\vec{\zeta}) e^{-i\vec{x}\vec{\zeta}} \left[\iint_{S'} \{1 + \sigma^{-2} \ln [c^{-1} \iint_S \langle I(\vec{x}') \rangle \times \right. \\ &\left. \times e^{-i\vec{x}'\vec{x}''} d^2x']\} e^{i\vec{x}''\vec{\zeta}} d^2x'' \right]^{\frac{1}{2}} d^2\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Анализ полученной формулы

Проанализируем, каким ограничениям должна удовлетворять функция средней интенсивности спектра $\langle I(\vec{x}) \rangle$, чтобы можно было применять формулу (7).

Из (3) следует, что функция $G(\vec{x})$ должна быть действительной и удовлетворять неравенству

$$0 < G(\vec{x}) \leq 1, \quad (8)$$

причем $G(0) = 1$, что следует из (2). Действительность функции $G(\vec{x})$ будет обеспечена, если потребовать четности для функции средней интенсивности спектра или, в частном случае, ее радиальной симметричности. Это следует из известного факта, что Фурье-образ от четной действительной функции есть четная действительная функция. Положительную определенность функции $G(\vec{x})$ можно обеспечить, задавая функцию $\langle I(\vec{x}) \rangle$ в виде

$$\langle I(\vec{x}) \rangle = \alpha I_0(\vec{x}) + \beta \delta(\vec{x}), \quad (9)$$

*Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. М., Наука, 1978, 463 с.

где $I_0(\vec{x})$ - произвольная положительно определенная функция;

$\delta(\vec{x})$ - дельта функция.

Тогда из требования $G(\vec{x}) > 0$ следует связь параметров α и β из (9):

$$\beta > \alpha |G_{0 \min}|, \quad (10)$$

где $G_0(\vec{x}) = \iint_S I_0(\vec{\zeta}) e^{-\frac{i k}{z} \vec{x} \cdot \vec{\zeta}} d^2 \zeta$, $G_{0 \min}$ - минимальное значение функции $G_0(\vec{x})$.

Заметим, что представления средней интенсивности в виде (9) не требуется, если она имеет гауссовый вид

$$\langle I(\vec{x}) \rangle = \exp \left[-\left(\frac{|\vec{x}|}{a} \right)^2 \right],$$

так как Фурье-образ от гауссовой функции есть гауссова функция.

Выбор функции интенсивности в виде (9) означает, что часть световой энергии, рассеянной на синтезированном транспаранте, не будет давать вклад в формирование требуемого распределения интенсивности, а будет собираться в нулевой пространственной частоте.

Из (8) следует условие на функцию $h(\vec{x})$:

$$|h(\vec{x})| \leq 1,$$

которое накладывает ограничения на выбор значений дисперсии фазы, но не делает этот выбор однозначным. Например, если положить

$$\sigma_1^2 = |\ln G(\vec{x})|_{\max}, \quad (11)$$

то корреляционная функция фазы $h(\vec{x})$ будет неотрицательной и будет достигать нуля в точках, где функция $G(\vec{x})$ принимает минимальное значение. Если же, например, положить

$$\sigma_2^2 = |\ln G(\vec{x})|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty}, \quad (12)$$

то функция $h(\vec{x})$ будет принимать положительные и отрицательные значения, стремясь асимптотически к нулю на бесконечности. Причем $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Казалось бы, что лучше выбирать дисперсию фазы большую из возможных, чтобы при дифракции света на синтезированном диффузоре большая часть световой энергии попадала в область задания требуемой интенсивности. Однако численное моделирование показало, что фазы, рассчитанные по формуле (7) при σ_1 и σ_2 , определенных по (11) и (12), отличаются только на некоторую несущественную постоянную. Заранее это предположить трудно, так как из приведенных ниже результатов моделирования видно (сравнить рис. 2б, 2в и рис. 2г, 2д), что вид промежуточных кривых различный для σ_1 и σ_2 , хотя окончательная восстановленная интенсивность в обоих случаях одинакова (рис. 2ж).

Так как рассмотрение ограничивается четными функциями $\langle I(\vec{x}) \rangle$, то отсюда следует, что четными и действительными будут также функции $G(\vec{x})$, $h(\vec{x})$ и $N(\vec{x})$. Из (5) следует, что для того чтобы функция фазы $\phi(\vec{x})$ была действительной, требуется также четность функции $n(\vec{x})$, реализующей белый шум. Кроме того, из (5) следует требование неотрицательности функции $N(\vec{x})$. Так как неясно, какие дополнительные требования надо предъявить к средней интенсивности, чтобы гарантировать неотрицательность функции $N(\vec{x})$, то при численном моделировании работы алгоритма (7) все получающиеся отрицательные значения функции $N(\vec{x})$ заменялись нулевыми значениями. То есть вместо функции $N(\vec{x})$ в алгоритме использовалась видоизмененная функция $N'(\vec{x})$, равная

$$H'(\vec{x}) = \begin{cases} H(\vec{x}), & H(\vec{x}) \geq 0 \\ 0, & H(\vec{x}) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Замена, определенная в (13), приводит к искажению вида восстановленной функции интенсивности по сравнению с исходной заданной функцией интенсивности, но не меняет области задания интенсивности.

Заметим также, что аналогичную замену можно сделать с функцией $G(\vec{x})$, которая должна быть положительно определенной. То есть вместо функции $G(\vec{x})$ используется функция $G'(\vec{x})$, равная

$$G'(\vec{x}) = \begin{cases} G(\vec{x}), & G(\vec{x}) > 0 \\ \delta, & G(\vec{x}) \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $\delta = G_{\min} > 0$. В этом случае не требуется задавать функцию $\langle I(\vec{x}) \rangle$ в виде (9), так как алгоритм (7) при использовании замен (13) и (14) будет работать для любой исходной функции средней интенсивности.

Вид искажений восстановленной интенсивности по сравнению с исходной, которые появляются из-за использования замен (13) и (14), анализируется ниже.

3. Результаты численного моделирования работы алгоритма

Численное моделирование проводилось для одномерного варианта формулы (7). В качестве исходного распределения средней интенсивности выбиралась функция

$$\langle I(\vec{x}) \rangle = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right). \quad (15)$$

При общем числе точек массива, равном $N = 128$, варьировалась ширина прямоугольника; например, на рис. 1а показана исходная требуемая интенсивность с полушириной, равной $N_1 = 8$. На первом шаге алгоритма, в соответствии с (2), с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) вычислялась автокорреляционная функция $G(x)$, вид которой приведен на рис. 1б. Далее, после замены (14) при $\delta = 0,07$, обеспечивающей положительность функции $G'(x)$, по формуле (4) вычислялась автокорреляционная функция искомой фазы диффузора $h(x)$ при $\delta^2 = |\ln \delta|$, вид которой показан на рис. 1в. На следующем шаге, в соответствии с (6), вычислялось БПФ от полученной автокорреляции фазы $h(x)$, и рассчитанная функция $H(x)$ подвергалась замене (13), для обеспечения неотрицательности функции $H'(x)$ (рис. 1г). Далее с помощью подпрограммы генерировались псевдослучайные числа $n(x)$, равномерно заполняющие отрезок значений $[-0,5, 0,5]$. Эта последовательность показана на рис. 1д. На следующем шаге, в соответствии с (5), вычислялось БПФ от произведения двух полученных функций

$$\sqrt{H'(x) n(x)}.$$

Рассчитанная фазовая функция диффузора $\phi(x)$ показана на рис. 1е. Чтобы получить распределение интенсивности в спектре, которое будет давать рассчитанная реализация фазы диффузора, вычислялось БПФ от функции $\exp(i\phi)$. Полученная при этом интенсивность показана на рис. 1ж.

Из рис. 1ж видно, что малая часть энергии (около 1%) света, продифрагировавшего на рассчитанном диффузоре, дала вклад в формирование требуемого распределения интенсивности. Кроме того, замены (13) и (14), которые необходимо было осу-

ществить в соответствии с требованиями к функциям, входящим в формулу (7), привели к видоизменению восстановленной интенсивности по сравнению с исходной (сравнить рис. 1а и рис. 1 ж).

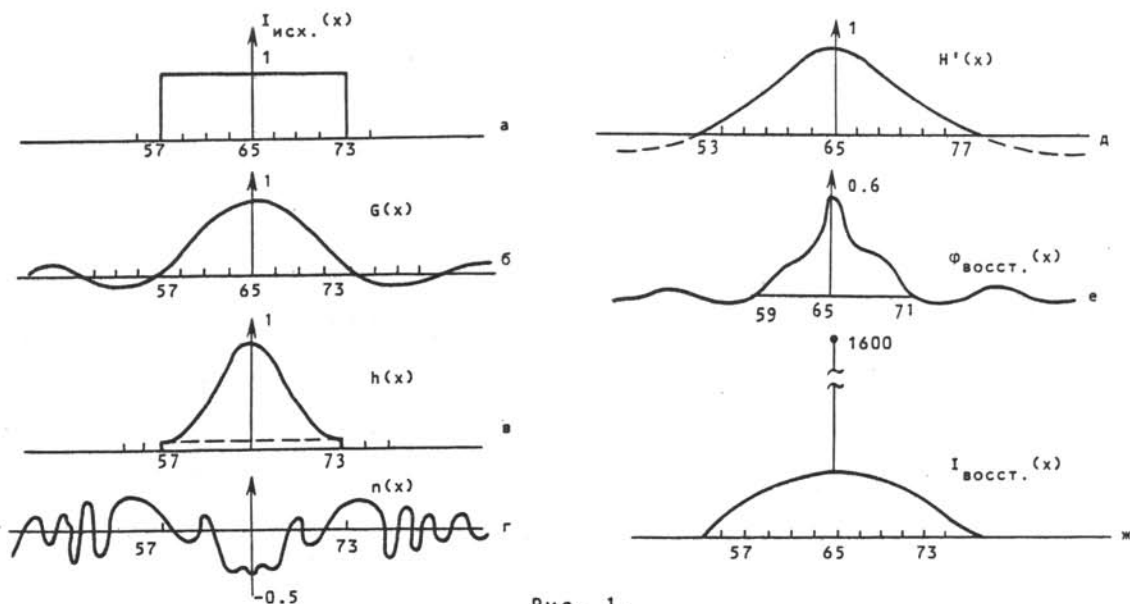


Рис. 1.

Для того, чтобы не делать замену (14), воспользуемся представлением исходной интенсивности в виде (9):

$$\langle I(x) \rangle = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + \beta \delta(x), \quad (16)$$

где $\beta = 8,5$, $N_1 = 8$. Тогда корреляционная функция поля $G(x)$, формирующего такую интенсивность, будет иметь вид, показанный на рис. 2а. Видно, что полученная функция строго положительная и необходимость в замене (14) отпадает. На рис. 2б, 2в показаны соответственно рассчитанные для случая (16) корреляционная функция фазы $h(x)$ и фурье-образ от нее $H'(x)$ после замены (13) (до замены функция показана пунктиром) и при

$$\sigma_1^2 = |\ln G(x)|_{x \rightarrow \infty} = |\ln 0,4|.$$

На рис. 2г, 2д показаны рассчитанные для того же случая (16) функции $h(x)$ и $H'(x)$, но при

$$\sigma_2^2 = |\ln G_{\min}| = |\ln 0,18|.$$

Видно, что при различных выборах дисперсии фазы получились разного вида функции $h(x)$ и $H'(x)$. Однако рассчитанные для обоих случаев фазовые функции оказались одинаковыми с точностью до константы, то есть $\varphi_{\sigma_1}(x) = \varphi_{\sigma_2}(x) + \text{const.}$

Вид полученной функции фазы $\varphi_{\sigma_1}(x)$ показан на рис. 2е. На рис. 2ж показан рассчитанный квадрат модуля фурье-образа от функции $\exp(i\varphi)$ или распределение интенсивности в спектре, полученное при дифракции света на фазовом диффузоре с фазой, изображенной на рис. 2е. Видно (см. рис. 2ж), что отличие восстановленной функции интенсивности от исходной заключается в подчеркивании "краев изображения".

Таким образом, осуществление двух замен (13) и (14) при расчете фазы диффузора по методу (7) приводит к уменьшению значений восстановленной интенсивности на краях заданной области по сравнению с исходной интенсивностью (см. рис. 1ж),

а осуществление только одной замены (13) приводит к увеличению значений восстановленной интенсивности на краях по сравнению с исходной интенсивностью (см. рис. 2ж).

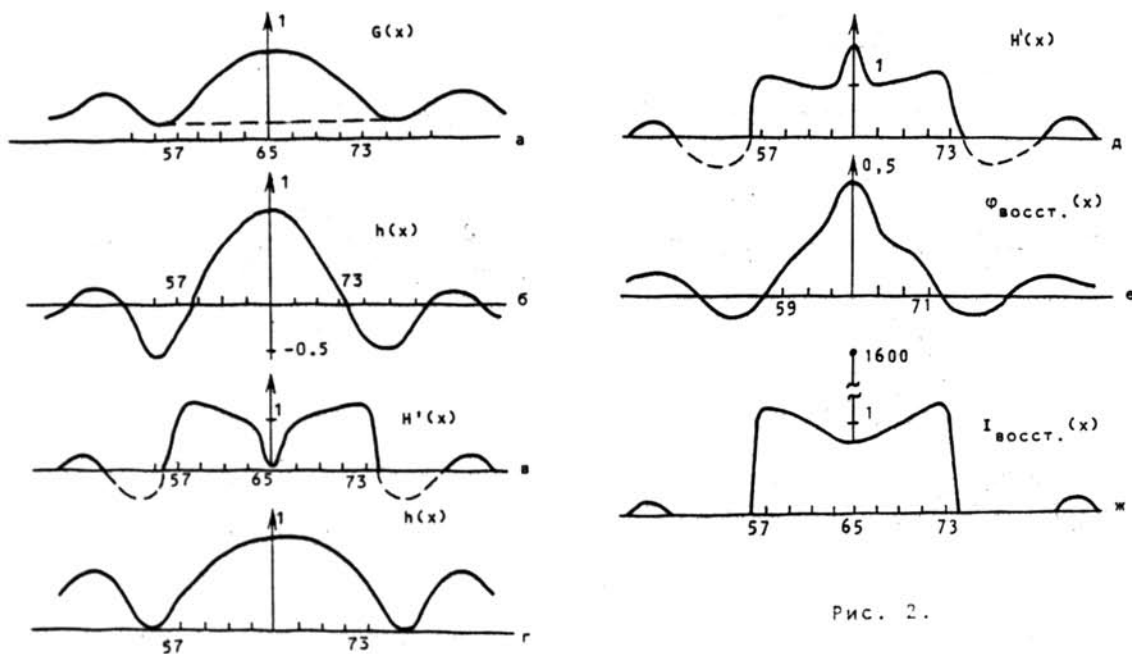


Рис. 2.

Избавиться от обеих замен (13) и (14) в алгоритме (7) можно, например, в случае гауссового вида функции исходной средней интенсивности. С целью выяснения зависимости эффекта "подчеркивания краев" в восстановленной интенсивности от вида исходной интенсивности проводилось моделирование работы алгоритма (7) в случае супергауссового вида функции $I_0(x)$:

$$I_0(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^L\right],$$

где $L = 2-10$. На рис. 3а показаны распределения исходной средней интенсивности для $L = 2$ - кривая 1, $L = 6$ - кривая 2, $L = 10$ - кривая 3. На рис. 3б показан вид рассчитанной по (7) фазы диффузора для случая $L = 10$, $\beta = 8,5$, $N_1 = 8$. На рис. 3в, 3г, 3д показаны исходные (кривые 1) и восстановленные (кривые 2) интенсивности в Фурье-спектре для случаев: $L = 2$ (рис. 3в), $L = 4$ (рис. 3г), $L = 8$ (рис. 3д). Видно, что замена (13) приводит к увеличению эффекта "подчеркивания краев" восстановленной интенсивности при увеличении L . Это связано с тем, что при увеличении L в функции $h(x)$ из (6) растут отрицательные значения боковых "лепестков", которые заменой (13) заменяются на нулевые значения.

На рис. 4 показаны исходная и восстановленные интенсивности при разных значениях параметра β из (9): $\beta = 8,5$ - кривая 1, $\beta = 5$ - кривая 2, $\beta = 2,5$ - кривая 3, при этом $L = 4$, $N_1 = 8$. Видно, что с уменьшением величины дельтаобразного пика в центре исходной интенсивности, с одной стороны, большая часть энергии попадает в область задания исходной интенсивности, но, с другой стороны, в большей степени проявляется искажение восстановленной интенсивности в виде усиления эффекта "подчеркивания краев".

Моделирование проводилось также с целью выяснения вопроса о зависимости энергии, попавшей в область задания исходной интенсивности, от величины диспер-

Из рис. 6 видно, что подбором множителя Q можно уменьшить эффект "подчеркивания краев". Видно, что при $Q = 4$, когда упомянутый эффект минимален (см. рис. 6, кривая 2), имеют место приближенные равенства $W_n/W_o \approx 11\%$, $W_p/W_o \approx 1\%$. Видно также, что отношение W_n/W_o достигает максимума (21%) при $Q = 8$, при этом выполнялось примерное равенство $Q\varphi(0) \approx \pi$, минимум отношения W_n/W_o достигается при $Q = 15$, когда $Q\varphi(0) \approx 2\pi$. При $Q = 11$ оба отношения выравниваются, то есть $W_n/W_o \approx W_p/W_o = 17\%$, при этом $Q\varphi(0) \approx \frac{3}{2}\pi$.

4. Выводы

В работе приведен метод (алгоритм) расчета фазовой функции случайного транспаранта, формирующего в дальней зоне дифракции (или в фокусе сферической линзы) заданное среднее распределение интенсивности.

Алгоритм будет работать для произвольного требуемого распределения интенсивности (описываемого четной функцией), если применять две замены (13) и (14), отфильтровывающие отрицательные значения промежуточных функций. Однако использование таких замен приводит к эффекту "сглаживания краев" восстановленной рассчитанным транспарантом интенсивности по отношению к исходной интенсивности.

Если исходная требуемая интенсивность, имея произвольный вид, содержит дельтаобразный пик интенсивности в центре, то в предложенном алгоритме можно обойтись только одной фильтрующей заменой (13), но это приводит к обратному эффекту "подчеркивания краев" восстановленной интенсивности по отношению к исходной.

Численно показано, что подбором числа, на которое нужно умножить рассчитанную фазу, можно уменьшить эффект "подчеркивания краев".

Энергия света, прошедшего рассчитанный диффузор и попавшего в область задания требуемой интенсивности, не превышает 20% от полной энергии при дисперсии фазы меньше 2π .

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЦЕНТР НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

подготавливает к изданию в 1991 году на русском языке сборник

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Выпуск 11

Сборник издается Международным центром научной и технической информации.

Тематика публикуемых материалов:

- построение автоматизированных информационных систем,
- разработка перспективных направлений информационной технологии,
- проблемы информационного обеспечения приоритетных направлений научно-технического прогресса,
- методы оценки технического уровня и качества новой техники и технологий.

Сборник ориентирован на работников информационных организаций стран - членов Международного центра научной и технической информации и специалистов, разрабатывающих и использующих автоматизированные информационные системы.

Ориентировочная цена одного выпуска 4 руб.

Телефоны для справок: 198-72-10, 198-73-41.

Заказы принимаются

как от учреждений и организаций, так и от индивидуальных подписчиков:

В СССР - магазином № 93 "Книга - почтой" по адресу: 117168, Москва, В-168, ул. Кржижановского, д. 14, корп. 1. Тел. 124-71-13.

В других странах - книготорговыми организациями, сотрудничающими с В/О "Международная книга". При оформлении заказов просим ссылаться на бюллетень "Новые книги СССР" (НК) № 20/1990.