

Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников

ФАЗОВАЯ ПРОБЛЕМА И СИНТЕЗ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Фазовая проблема и синтез оптических полей по интенсивности связаны с получением информации о поле по его энергетическим характеристикам и являются поэтому родственными задачами. Легко видеть, однако, и их существенное различие: физическая реализуемость поля с заданной интенсивностью заложена в самой постановке фазовой проблемы, тогда как для задачи синтеза вопрос существования поля с заданной интенсивностью является одним из центральных. В связи с этим важен поиск закономерностей формирования и преобразования полей, критериев их физической реализуемости.

Изучение задачи восстановления двумерного поля $F(x, y) = \sqrt{I(x, y)} \exp(i\varphi(x, y))$ по его интенсивности $I(x, y)$ в зоне Френеля выявило важную роль вихревых свойств вектора потока световой энергии $\vec{j} = \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x}, I \frac{\partial \varphi}{\partial y}, kI \right)$. Для данного рассмотрения важны следующие результаты. Как показано в [1], для всех световых полей должно выполняться условие сохранения:

$$\int_{R^2} (\text{rot } \vec{j})_1 dS = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } (\text{rot } \vec{j})_1 = \frac{1}{k} (\nabla I \times \nabla \varphi)_1 = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

При этом в изолированных нулях интенсивности имеет место соотношение

$$|(\text{rot } \vec{j})_1| = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right)^2}. \quad (2)$$

При распространении поля в зоне Френеля изолированные нули образуются парами с противоположными знаками $(\text{rot } \vec{j})_1$ в них. Численные эксперименты показали, что, во-первых, проблема восстановления полей по интенсивности связана с вихревыми свойствами векторного поля \vec{j} , во-вторых, информация о знаке и модуле $(\text{rot } \vec{j})_1$ в изолированных нулях интенсивности определяет в основном структуру поля и обеспечивает устойчивое восстановление векторного поля \vec{j} .

К настоящему времени в общем случае не решен вопрос определения знаков $(\text{rot } \vec{j})_1$ в изолированных нулях. Используя аппарат теории функций комплексной переменной, удастся лишь разделить нули по парам с противоположными знаками $(\text{rot } \vec{j})_1$.

Для задачи синтеза эта неопределенность означает, что могут существовать близкие (или равные) по интенсивности поля, обладающие существенно различной структурой, и пренебрежение соотношениями типа (1) при постановке задачи может привести к тому, что соотношение (1) все же реализуется, но при этом результат синтеза может отличаться от исходно заданного.

Например, соотношение (1) «запрещает» отдельные варианты изменения интенсивности при распространении поля: покажем, что невырожденный минимум интенсивности не может стать невырожденным нулем (см. рис. 16). Невырожденность нуля здесь понимается в смысле невырожденности для функции $F(x, y)$, то есть $F(x, y) = 0$, но $\nabla F(x, y) \neq 0$. Рассмотрим область

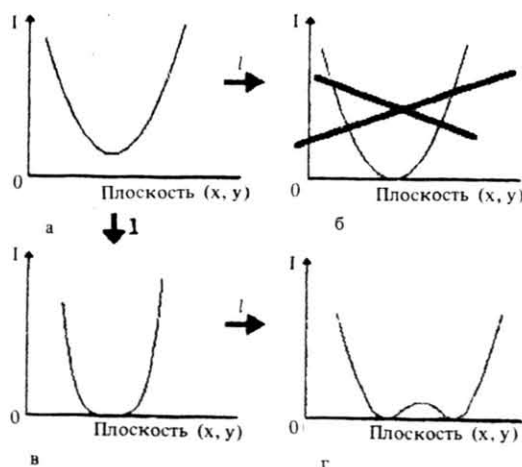


Рис. 1. Невозможный (б) и возможный (в, г) варианты реализации невырожденного нуля из локального минимума интенсивности (а) при распространении поля вдоль l

$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, I(x, y) \leq I_0 = \text{const} \right\}$, содержащую точку минимума (семейство таких областей всегда существует). Используя соотношение (1), получим

$$\int_{\partial\Omega} I \nabla \varphi d\vec{r} = I_0 \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi d\vec{r} = \iint_{\Omega} \text{rot} \vec{j}_1 dS = 0. \quad (3)$$

Так как $(\text{rot } \vec{j})_1$ - вещественная непрерывная по x, y, l функция, то существует кривая в области Ω , на которой $(\text{rot } \vec{j})_1$ равен нулю и которая в силу соотношения $(\text{rot } \vec{j})_1 = \frac{1}{k} (\nabla I \times \nabla \varphi)_1$ проходит через точку минимума. Пусть при распространении поля при некотором l интенсивность в минимуме достигает нулевого значения. В силу непрерывности $(\text{rot } \vec{j})_1$ линия нулевого ротора должна проходить через этот глобальный минимум. С другой стороны, в невырожденном нуле интенсивности $(\text{rot } \vec{j})_1$ в соответствии с (2) имеет конечное ненулевое значение. Следовательно, это вырожденный нуль (рис. 1в). При малом возмущении он распадается на пару невырожденных нулей с конечными значениями ротора, разделенных нулевой линией $(\text{rot } \vec{j})_1$. Поэтому ротор в этих нулях имеет противоположные знаки (рис. 1г).

В качестве примера учета вихревой составляющей при синтезе световых полей рассмотрим задачу фокусировки лазерного излучения в кольцо радиуса r_0 на расстоянии f_0 .

В параксиальном приближении известным решением, полученным по методу стационарной фазы [2], является фокусатор «сферическая линза + аксикон»:

$$\varphi_0(r) = -\frac{kr^2}{2f_0} + \frac{krr_0}{f_0}. \quad (4)$$

Легко видеть, что данное решение в приближении геометрической оптики реализует отображение $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ с нулевым якобианом:

$$x = \xi + f_0 \left(-\frac{\xi}{f_0} + \frac{r_0}{f_0} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) = r_0 \cos \alpha, \quad (5)$$

$$y = \eta + f_0 \left(-\frac{\eta}{f_0} + \frac{r_0}{f_0} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) = r_0 \sin \alpha.$$

Соответствующее дифракционное поле обладает нулевым ротором и в фокальной плоскости имеет вид:

$$F_0(\rho) = \frac{kE_0}{if_0} \exp \left(ikf_0 + \frac{ik\rho^2}{2f_0} \right) \int_0^a e^{\frac{ikrr_0}{f_0}} r j_0 \left(\frac{k\rho}{f_0} r \right) dr, \quad (6)$$

где

E_0 - амплитуда светового поля в плоскости (ξ, η) ;

ρ - полярный радиус;

a - радиус фокусатора.

График зависимости $I_0(\rho) = |F_0(\rho)|^2$ от полярного радиуса ρ приведен на рис. 2 ($n=0$). Появление локального максимума интенсивности в центре обусловлено различием между геометрическим приближением и его волновой реализацией. Из вышесказанного ясно, что устойчивая нулевая интенсивность в центре может существовать лишь при нулевом роторе.

Простейшими решениями фокусировки в кольцо с ненулевым ротором являются решения вида

$$\varphi_n(r, \alpha) = -\frac{kr^2}{2f_0} + \frac{krr_0}{f_0} + n\alpha, \quad (7)$$

где n - целое число, $\alpha = \arg(\xi + i\eta)$.

При этом дифракционное поле $F_n(\rho, \theta)$ примет вид

$$F_n(\rho, \theta) = \frac{kE_0}{if_0} \exp\left(ikf_0 + \frac{ik\rho^2}{2f_0} + in\theta + \frac{3\pi in}{2}\right) \cdot \int_0^a e^{\frac{ikrr_0}{f_0}} r j_n\left(\frac{k\rho}{f_0} r\right) dr. \quad (8)$$

Особенность при $r = 0$ не играет существенной роли: можно взять область $(r, \alpha) \in [\varepsilon, a] \times [0, 2\pi]$, где $\varepsilon \ll a$.

Графики зависимости $I_n(\rho) = |F_n(\rho)|^2$ от ρ для $n = 1, 2, 3$ показаны на рис. 2.

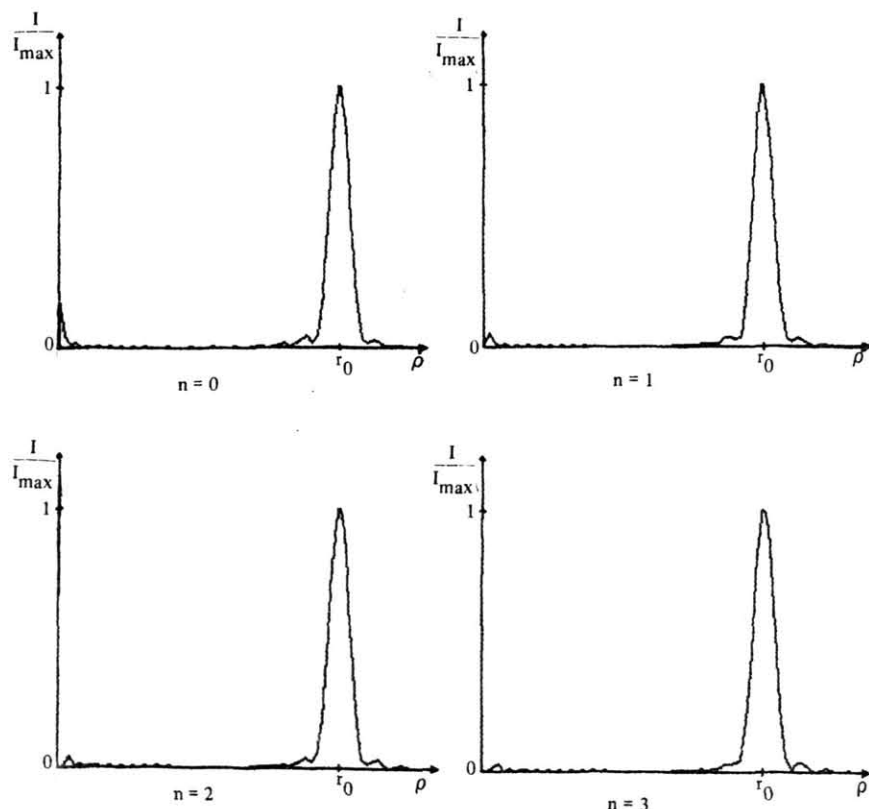


Рис. 2. Зависимость интенсивности от полярного радиуса для фаз, вычисляемых по формуле (7), при различных n

Если обратиться к аналогии между поведением жидкости и распространением энергии светового поля, то решения (7) и (4) соотносятся так же, как два способа создать воронку на поверхности жидкости: вращением и центрально-симметричным давлением на нее.

Фокусатор (7) реализует взаимно однозначное (при $r \neq 0$) отображение с ненулевым якобианом:

$$\begin{aligned} x &= r_0 \cos \theta - \frac{nf_0}{kr} \sin \theta, \\ y &= r_0 \sin \theta + \frac{nf_0}{kr} \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Однозначность отображения (9) означает, что фокусатор (7) не производит фокусировки в смысле метода стационарной фазы. Более того, положение максимума интенсивности r_{\max} приходится на область геометрической тени $r_{\max} < \sqrt{r_0^2 + \frac{n^2 f_0^2}{k^2 a^2}}$. Это обусловлено тем, что решения (7) являются волновыми и не могут быть получены в рамках геометрической оптики.

Соответствующая дискретная задача при конечном числе N градаций фазы $\varphi_n(r, \alpha)$ дает осцилляции интенсивности в области кольца. Например, при $N=6$ осцилляции не превышают 13%. На рисунках 3, 4 показаны сечения поверхностей интенсивности для шестиградационной фазы при $n = 0,1$ и распределение $I_1(\rho, \theta)$ на окружности, где достигается максимальная интенсивность.

Решения типа (7) легко обобщаются на ряд задач фокусировки в кривую (например, эллипс). Авторами разработаны несколько подходов к решению задач фокусировки в произвольные область и кривую.

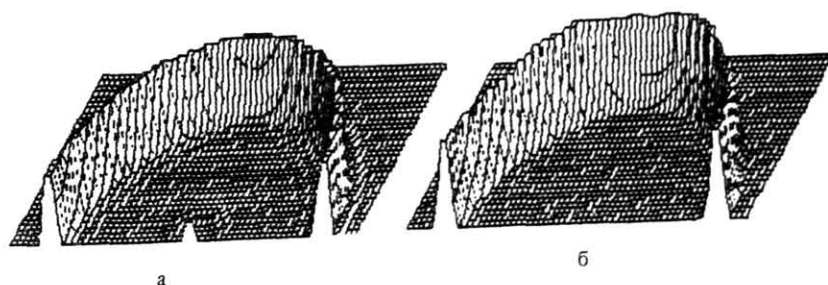


Рис. 3. Сечения профилей интенсивности при шести градациях фазы в безвихревом (а) и вихревом (б) случаях

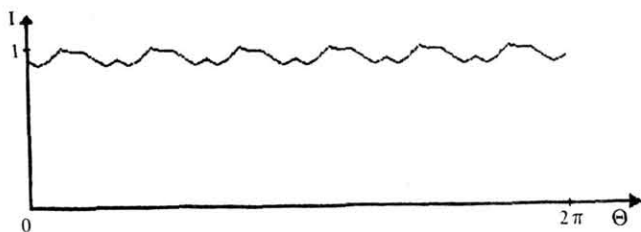


Рис. 4. Зависимость интенсивности от полярного угла на кольце максимальной интенсивности

Литература

1. *Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г., Малов А.Н.* К вопросу о двумерной фазовой проблеме в оптике // Рук. деп. ВИНТИ, N 3773-В87, Куйбышев, 1987, 14 с.

2. *Голуб М.А., Казанский Н.Д., Сусалян У.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И.* //Автометрия, 1987. N 6, с. 8-15.

==