*М.А. Голуб, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов*

# МЕТОД СОГЛАСОВАННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ФОКУСАТОРОВ В ПЛОСКУЮ ОБЛАСТЬ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрооптическому расчету фокусаторов в фокальную кривую посвящено большое число работ [1, 2, 3, 4]. Расчет фокусаторов в плоскую область геометрооптическим методом менее исследован. Фокусировка освещающего гауссового пучка в прямоугольник рассмотрена в работе [5] геометрооптическим методом, а в работах [6, 7] численно исследована градиентными методами. Общего метода расчета фокусаторов в плоскую область в настоящее время не разработано. В данной работе предложен новый численный метод расчета и полного исследования фокусаторов в сложные плоские области.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКУЮ ОБЛАСТЬ

Для уяснения физической сущности задачи фокусировки лазерного излучения рассмотрим рис. 1. На фокусатор Ф с апертурой G плоскости $\vec{u} = (u, v)$ падает пучок лазерного излучения с интенсивностью $I_0(\vec{u})$, эйконалом $\Psi_0(\vec{u})$, т.е. с комплексной амплитудой

$$W_0(\vec{u}) = \sqrt{I_0(\vec{u})}\,\exp\,[ik\Psi_0(\vec{u})], \quad \text{где } k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \lambda \text{ - длина волны.}$$

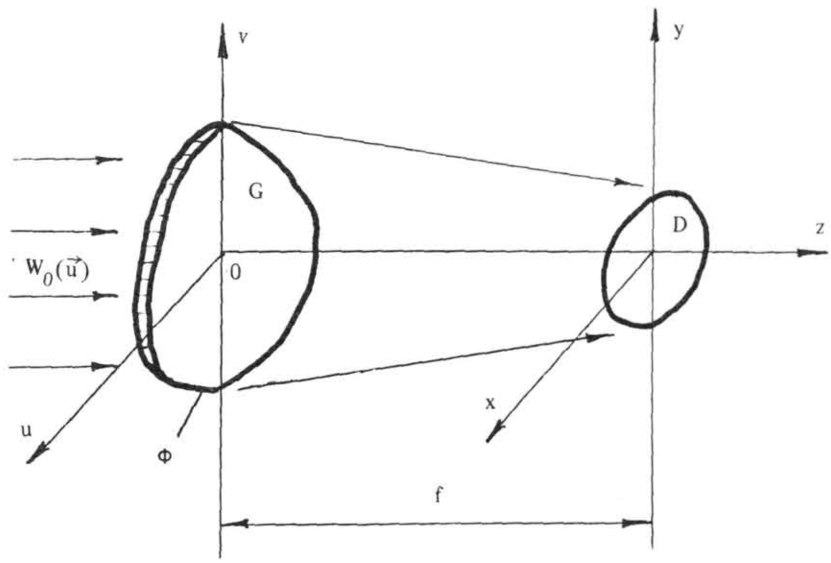


Рис. 1. Геометрия задачи фокусировки

В дальнейшем предполагается, что область G соответствует форме сечения падающего пучка. Требуется сформировать в области фокусировки D плоскости $\vec{x} = (x, y)$ волновое поле с заданным распределением интенсивности $I(\vec{x})$. Решение задачи фокусировки сводится к отысканию фазовой функции фокусатора $\varphi(\vec{u})$, обеспечивающей формирование требуемого волнового поля из освещающего пучка.

## 3. ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ В ПЛОСКУЮ ОБЛАСТЬ

Геометрооптическая фазовая функция фокусатора $\varphi(\vec{u})$ в параксиальном приближении может быть получена из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{u}) = k[\psi(\vec{u}) - \psi_0(\vec{u})] \\ x = u + f\,\Psi'_u(\vec{u}) \\ y = v + f\,\Psi'_v(\vec{u}) \\ \dfrac{I_o(\vec{u})}{I(\vec{x})} = | x'_u y'_v - x'_v y'_u | \\ x'_u = y'_v \,, \end{cases} \qquad (1)$$

где f - расстояние до плоскости фокусировки.

Решение вышеприведенной системы (1) в общем случае - очень сложная задача. Геометрооптическое решение задачи фокусировки существенно упрощается для прямоугольной апертуры фокусатора G, прямоугольной области фокусировки D при условии факторизуемости функций

$$W_0(\vec{u}) = W_1(u)W_2(v), \ I(x) = I_1(x)\ I_2(y),$$

то есть $I_0(\vec{u}) = I_{01}(u)I_{02}(v)$, $\psi_0(\vec{u}) = \psi_{01}(u) + \psi_{02}(v)$.

В этом случае решение двух одномерных задач позволяет определить двумерную фазовую функцию фокусатора $\varphi(\vec{u}) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$.

Фазовая функция $\varphi_1(u)$ одномерного (цилиндрического) фокусатора, осуществляющего заданное преобразование светового пучка, определяется из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(u) = k\,[\psi_1(u) - \psi_{01}(u)] \\ x = u + f\dfrac{d\psi_1}{du} \\ \dfrac{I_{01}(u)}{I_1(x)} = \dfrac{dx}{du}, \quad u_0 \le u \le u_1, \; x_0 \le x \le x_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение системы уравнений(2) существенно проще, чем решение системы уравнений (1). Например, для случая

$$I_1(x) = \begin{cases} I_1, & x_0 \le x \le x_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

решение системы уравнений (2) имеет вид:

$$\varphi_1(u) = k\left(-\frac{u^2}{2f} + \frac{1}{f}\int\limits_{u_0}^{u}\left[\frac{1}{I_1}\int\limits_{u_0}^{\xi} I_{01}(\eta)\,d\eta - x_0\right]d\xi - \psi_{01}(u)\right)$$

и, следовательно, двумерная фазовая функция фокусатора с прямоугольной апертурой в прямоугольную область фокусировки с постоянным распределением интенсивности имеет вид:

$$\varphi(\vec{u}) = k\left(-\frac{u^2+v^2}{2f} + \frac{1}{f}\int\limits_{u_0}^{u}\left[\frac{1}{I_1}\int\limits_{u_0}^{\xi} I_{01}(\eta)\,d\eta - x_0\right]d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{f}\int\limits_{v_0}^{v}\left[\frac{1}{I_1}\int\limits_{v_0}^{\xi} I_{02}(\eta)\,d\eta - y_0\right]d\xi - \psi_0(\vec{u}),\right) \qquad (3)$$

где $(x_0, y_0)$- координаты левого нижнего угла прямоугольника фокусировки.

## 4. МЕТОД СОГЛАСОВАННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

При непрямоугольной форме хотя бы одной из областей G и D, даже при факторизуемых функциях $W_0(\vec{u})$, $I(\vec{x})$, фазовая функция фокусатора уже не факторизуется и имеет значительно более сложный вид. В работе [5] расчет фокусатора круглой апертуры в прямоугольник приведен путем сведения к фокусатору в отрезок с соответствующими поправками. В данной работе предлагается новый метод «согласованных прямоугольников» для расчета фокусаторов при областях D и G произвольной формы при факторизующемся освещающем пучке и факторизующейся функции интенсивности в фокальной области. По этому методу область G и область D аппроксимируются наборами прямоугольников $G_i$ и $D_i$, $i = 1, N$ соответственно, и решается задача фокусировки из $G_i$ в $D_i$. Таким образом, апертура фокусатора приближается набором $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$ апертурных прямоугольников $G_i$, область фокусировки D также приближается набором $\tilde{D} = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$ соответствующих фокальных прямоугольников $D_i$. Функции $I_0(\vec{u})$, $I_1(\vec{x})$ предполагаются продолженными в области $\tilde{G}$ и $\tilde{D}$ соответственно. Для каждого прямоугольного сегмента $G_i$ рассчитывается фазовая функция $\varphi_i(\vec{u})$, обеспечивающая фокусировку излучения в соответствующий фокальный прямоугольник $D_i$. Рассмотрим описанный способ расчета более детально.

Пусть апертура фокусатора G ограничена кривыми $V = g_1(u)$, $V = g_2(u)$ и прямыми $u = u_{min}$, $u = u_{max}$ (рис. 2), а область фокусировки D - кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = x_{min}$, $x = x_{max}$ (рис. 3).

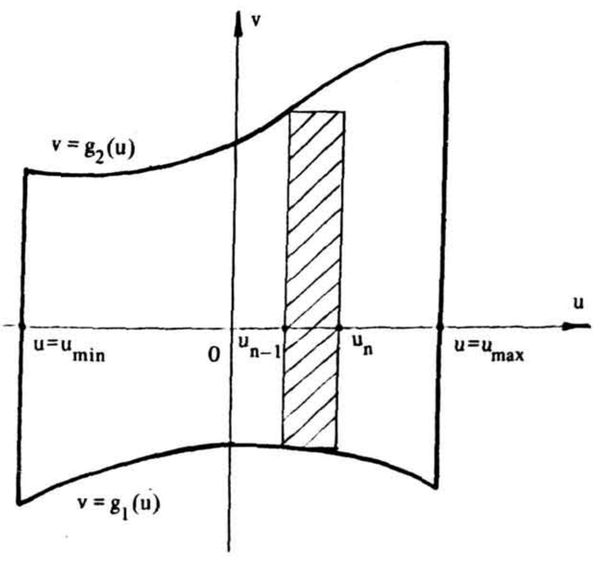

Рис. 2. Апертура фокусатора

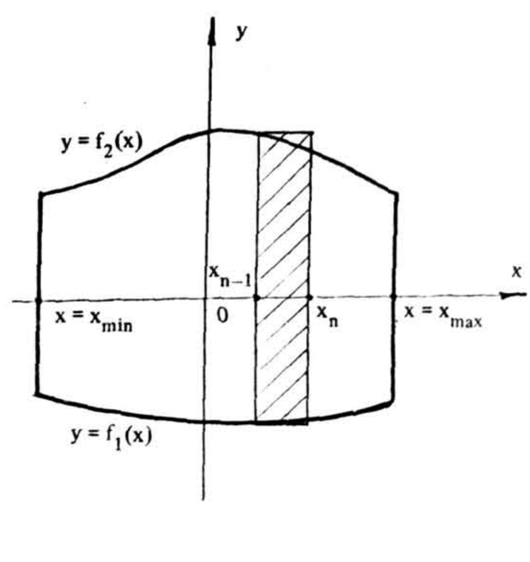

Рис. 3. Область фокусировки

Введем разбиение $u_i$, $i = 0, N$, $u_0 = u_{min}$, $u_N = u_{max}$ отрезка $[u_{min}, u_{max}]$ и апертурные прямоугольники $G_i = [u_{i-1}, u_i] \times [g_1(u_{i-1}), g_2(u_{i-1})]$. Разбиение $x_i$, $i = 0, N$, $x_0 = x_{min}$, $x_N = x_{max}$ отрезка $[x_{min}, x_{max}]$ определяется из решения следующего нелинейного рекуррентного уравнения:

$$\int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} \int\limits_{g_1(u_{i-1})}^{g_2(u_{i-1})} I_0(\vec{u})\, d^2\vec{u} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \int\limits_{f_1(x_{i-1})}^{f_2(x_{i-1})} I(\vec{x})\, d^2\vec{x} . \tag{4}$$

Уравнение (4) получено исходя из сохранения светового потока при распространении света из апертурного прямоугольника $G_i$ в соответствующий фокальный прямоугольник $D_i$.

$$W(\vec{x}) = \frac{ke^{ikf}}{2\pi if} A_0 \sum_{j=1}^{N} W_{j1} W_{j2},$$

$$W_{j1} = \int_{u_{j-1}}^{u_j} e^{i\varphi_{j1}(u)} e^{\frac{ik}{2f}(x-u)^2} du ,$$

$$W_{j2} = \int_{g_1(u_{j-1})}^{g_2(u_{j-1})} e^{i\varphi_{j2}(v)} e^{\frac{ik}{2f}(y-v)^2} dv. \tag{8}$$

В случае синтеза фокусатора плоского пучка в область с постоянным распределением интенсивности фазовые функции $\varphi_{j1}(u)$, $\varphi_{j2}(v)$ содержат квадратичные и линейные по u, v члены соответственно, и, следовательно, вычисление интегралов $W_{j1}$, $W_{j2}$ сводится к интегралу вида:

$$I(x;\xi_1,\xi_2,c,u_0,x_0) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left[\frac{ik}{f}\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{c(u-u_0)^2}{2}+ x_0 u + \frac{(x-u)^2}{2}\right)\right] du.$$

Путем несложных преобразований можно получить:

$$I(x;\xi_1, \xi_2, c, u_0, x_0) = \sqrt{\frac{2f}{kc}}\, e^{\frac{ikx^2}{2f}} e^{\frac{ik}{2f}(cu_0+cu_0^2 - x_0+x)} \times$$
$$\times \left[\mathrm{sign}(\gamma)\, C(\gamma) - \mathrm{sign}(\gamma_1) C(\gamma_1) + i\left(\mathrm{sign}(\gamma) S(\gamma) - \mathrm{sign}(\gamma_1) S(\gamma_1)\right)\right], \tag{9}$$

где $$\mathrm{sign}\,(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{kc}{2f}}\left(\xi_2 - u_0 - \frac{x_0}{c} + \frac{x}{c}\right),$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{kc}{2f}}\left(\xi_1 - u_0 - \frac{x_0}{c} + \frac{x}{c}\right),$$

$C(x)$, $S(x)$ - интегралы Френеля,

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt.$$

Используя (9), поле от фокусатора плоского пучка в произвольную плоскую область с постоянным распределением интенсивности можно представить в виде:

$$W(\vec{x}) = \frac{ke^{ikf}}{2\pi if} A_0 \sum_{j=1}^{N} \Big[ e^{i\tilde{\varphi}_j} I(x;\, u_{j-1},\, u_j,\, \frac{x_j - x_{j-1}}{u_j - u_{j-1}},\, u_{j-1},\, x_{j-1}) \times$$

$$\times I(y;\, g_1(u_{j-1}),\, g_2(u_{j-1}),\, \frac{f_2(x_{j-1}) - f_1(x_{j-1})}{g_2(u_{j-1}) - g_1(u_{j-1})}, \tag{10}$$

$$g_1(u_{j-1}),\, f_1(x_{j-1}))\Big].$$

## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для характеристики качества фокального изображения используются следующие величины: значения энергетической эффективности P и среднеквадратичного отклонения интенсивности $\delta$. Величина

$$P = \frac{\iint\limits_D I(\vec{x})\, d^2\vec{x}}{\iint\limits_G I_0(\vec{u})\, d^2\vec{u}}$$

характеризует долю энергии пучка, попавшую в область фокусировки. Величина

$$\delta = \frac{1}{\bar{I}} \left[ \frac{1}{|D|} \iint\limits_D (I(\vec{x}) - \bar{I})^2\, d^2\vec{x} \right]^{\frac{1}{2}}$$

характеризует близость распределения интенсивности $I(\vec{x})$ к постоянной величине, где $|D|$ – площадь области фокусировки, $\bar{I} = \frac{1}{|D|} \iint\limits_D I(\vec{x})\, d^2\vec{x}$ – среднее значение интенсивности в области фокусировки. Расчет поля от синтезированного в пункте 5 «круглого фокусатора в прямоугольник» проводился по формуле (10) при следующих физических параметрах: $\lambda = 10{,}6$ мкм, $f = 800$ мм, радиус освещающего пучка $R = 20{,}5$ мм, размер прямоугольника фокусировки $8 \times 4$ мм. Исходный фокусатор приближался набором шестидесяти прямоугольников, полученных разбиением отрезка $[-R,\, R]$ с постоянным шагом. Энергетическая эффективность фокусировки в прямоугольник составила 85,4%, а среднеквадратичное отклонение интенсивности – 34,4%. На рис. 4 представлено трехмерное распределение интенсивности в фокальной области, а на рис. 5 – изофоты трехмерного распределения.

По вышеописанному алгоритму был также синтезирован фокусатор с круглой апертурой, фокусирующий освещающий пучок круглого сечения с плоским волновым фронтом в «усеченный эллипс» (рис. 6) с постоянным распределением интенсивности («фокусатор в усеченный эллипс»).

Решив уравнение (4), получаем приближение области D набором прямоугольников

$$D_i = [x_{i-1}, x_i] \times [f_1(x_{i-1}), f_2(x_{i-1})], \ i = 1, N.$$

Для определения фазовой функции $\varphi_i(\vec{u}) = \varphi_{i1}(u) + \varphi_{i2}(v)$ прямоугольного сегмента $G_i$ необходимо дважды решить систему уравнений вида (2).

Фазовая функция фокусатора

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(u,v)\,\mathrm{rect}\left(\frac{2u-(u_{i-1}+u_i)}{2(u_i-u_{i-1})}\right) \times$$

$$\times\ \mathrm{rect}\left(\frac{2v-(g_1(u_{i-1})+g_2(u_{i-1}))}{2(g_2(u_{i-1})-g_1(u_{i-1}))}\right) - k\,\psi_0(u,v), \qquad (5)$$

где $\mathrm{rect}\,(u) = \begin{cases} 1, & |u| < \frac{1}{2} \\ 0, & |u| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$

терпит разрывы вдоль прямых $u = u_i$, $i = 1, N-1$, что приводит к интерференции на стыках прямоугольников фокусировки. Для уменьшения величины интерференционных эффектов фазовую функцию $\varphi(\vec{u})$ можно сделать непрерывной вдоль некоторой кривой $v = f(u)$. Для этого положим

$$\varphi_i(\vec{u}) = \varphi_i(\vec{u}) + \tilde{\varphi}_i,$$

где $\varphi_1 = 0$, $\tilde{\varphi}_i = \sum_{j=1}^{i-1} [\varphi_j(u_j, f(u_j)) - \varphi_{j+1}(u_j, f(u_j))]$.

## 5. СИНТЕЗ ФОКУСАТОРА ПУЧКА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИК С ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

В качестве примера рассмотрим синтез фокусатора с круглой апертурой, фокусирующего освещающий пучок круглого сечения с плоским волновым фронтом в прямоугольник с постоянной интенсивностью («круглый фокусатор в прямоугольник»).

Интенсивность освещающего пучка имеет вид:

$$I_0(\vec{u}) = \begin{cases} I_0 & \vec{u} \in G \\ 0, & \vec{u} \notin G, \end{cases}$$

где $G = \left\{(u,v) \ | u^2 + v^2 \leq R^2\right\}$ - апертура фокусатора;
R - радиус освещающего пучка.

Интенсивность в фокальной области $I(\vec{x}) = \begin{cases} I, & \vec{x} \in D \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$

где $D = [-b, b] \times [-a, a]$ - область расположения фокального прямоугольника.

В данном случае область G приближается набором прямоугольников

$$G_i = [u_{i-1}, u_i] \times [\sqrt{R^2 - u_{i-1}^2}, -\sqrt{R^2 - u_{i-1}^2}],$$

$i = 1, N$, $u_0 = -R$, $u_N = R$, а область D - набором прямоугольников

$$D_i = [x_{i-1}, x_i] \times [-a, a], \ i = 1, N, \ x_0 = -b, \ x_N = b.$$

Решение уравнения (4), определяющее разбиение фокальной области, имеет вид:

$$x_i = x_{i-1} + \frac{I_0(u_i - u_{i-1})\sqrt{R^2 - u_{i-1}^2}}{Ia}, \ i = 1, \ N-1.$$

Фазовая функция $\varphi_i(\vec{u})$, являющаяся геометрооптическим решением задачи фокусировки прямоугольника $G_i$ в прямоугольник $D_i$, может быть легко получена из (3), причем содержит квадратичные и линейные по u, v члены. Для синтезируемого фокусатора фазовая добавка $\tilde{\varphi}_i$ выбирается из условия непрерывности фазовой функции вдоль оси u:

$$\tilde{\varphi}_j = \begin{cases} 0, \ i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [\varphi_j(u_j, 0) - \varphi_{j+1}(u_j, 0)], \ 2 \le i \le N. \end{cases}$$

## 6. ДИФРАКЦИОННЫЙ РАСЧЕТ

Работоспособность вышеприведенного подхода к расчету фокусаторов может быть исследована средствами вычислительного эксперимента. В связи с этим ниже будет рассмотрен метод дифракционного расчета поля от синтезированных фокусаторов плоского пучка в область с постоянным распределением интенсивности. Для расчета поля в фокальной области будем использовать параксиальное приближение интеграла Кирхгофа

$$W(\vec{x}) = \frac{ke^{ikf}}{2\pi if} \int\limits_G\int A(\vec{u}) e^{ik\psi(\vec{u})} e^{\frac{ik}{2f}(\vec{x}-\vec{u})^2} d^2 \vec{u}, \tag{6}$$

где $W(\vec{x})$ — комплексная амплитуда в плоскости фокусировки;
$A(\vec{u})$ — амплитуда падающего пучка;
$k\psi(\vec{u})$ — фаза пучка за фокусатором.

Будем предполагать интенсивность освещающего пучка постоянной, $A(\vec{u}) = A_0$, а волновой фронт - плоским, $\psi_0(\vec{u}) = 0$. Фазовую функцию фокусатора $\varphi(\vec{u})$ считаем определенной согласно равенству (5). Тогда, по равенству (6), поле в фокальной области можно представить в виде:

$$W(\vec{x}) = \frac{ke^{ikf}}{2\pi if} A_0 \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{G_j} e^{i\varphi_j(\vec{u})} e^{\frac{ik}{2f}(\vec{x}-\vec{u})^2} d^2 \vec{u}, \tag{7}$$

где $\varphi_j(\vec{u})$ - фазовая функция сегмента $G_j$.

Учитывая факторизуемость функций $e^{i\varphi_j(\vec{u})} = e^{i\varphi_{j1}(u)} e^{i\varphi_{j2}(v)}$, $j = 1, N$, выражение (7) приводят к виду:

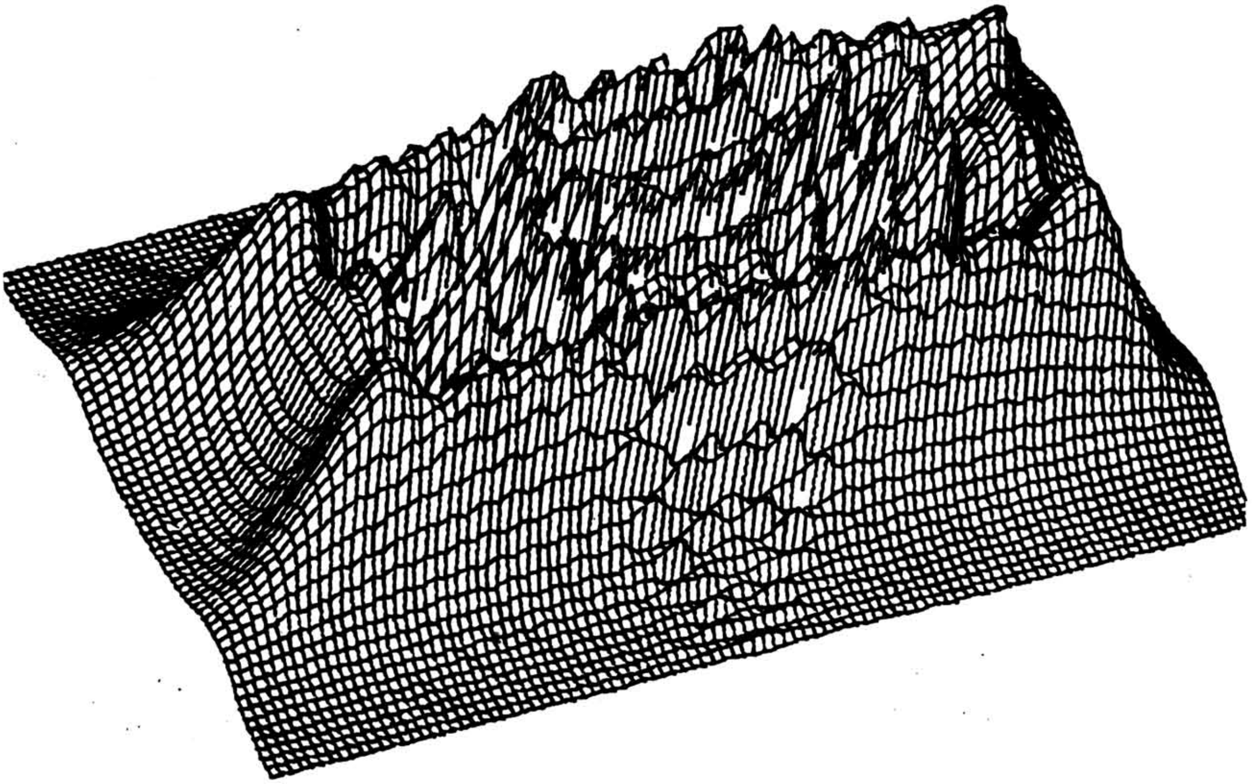

Рис. 4. Распределение интенсивности в фокальной плоскости фокусатора в прямоугольник

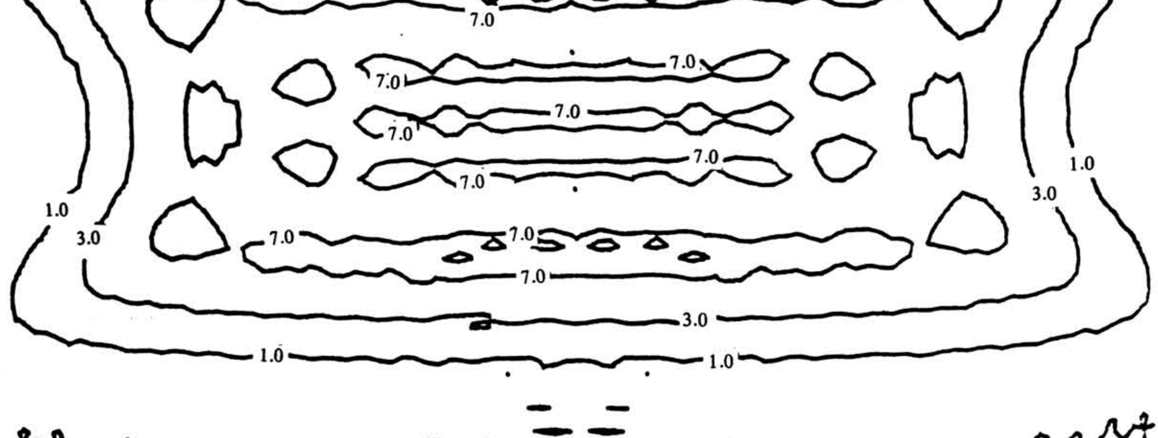


Рис. 5. Изофоты распределения интенсивности в фокальной плоскости фокусатора в прямоугольник

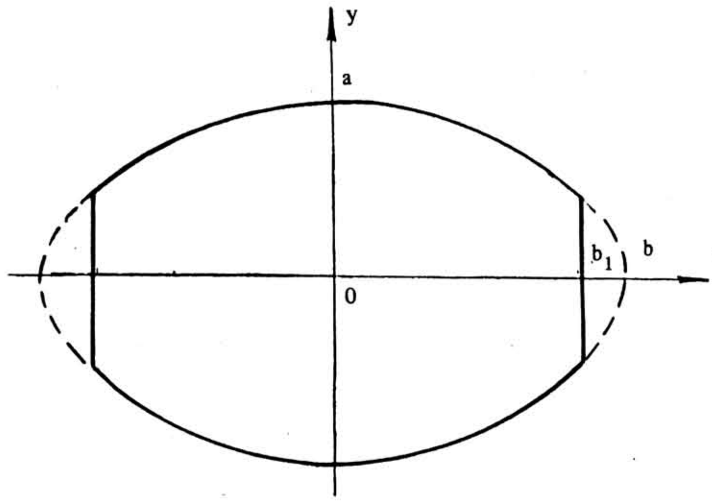


Рис. 6. "Усеченный эллипс"

Расчет поля от «фокусатора в усеченный эллипс» проводился по формуле (10) при $\lambda$ = 10,6 мкм, f = 800 мм, радиусе освещающего пучка R=20,5 мм для следующих характерных размеров усеченного эллипса: a = 2 мм, b = 4 мм, $b_1$ = 3,5 мм. Энергетическая эффективность фокусировки в усеченный эллипс составила 87,6%, а среднеквадратичное отклонение интенсивности - 38,2%.

На рис. 7 представлены изофоты трехмерного распределения интенсивности при фокусировке в усеченный эллипс.

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают работоспособность разработанного метода «согласованных прямоугольников» при геометрооптическом расчете сложных фокусаторов.

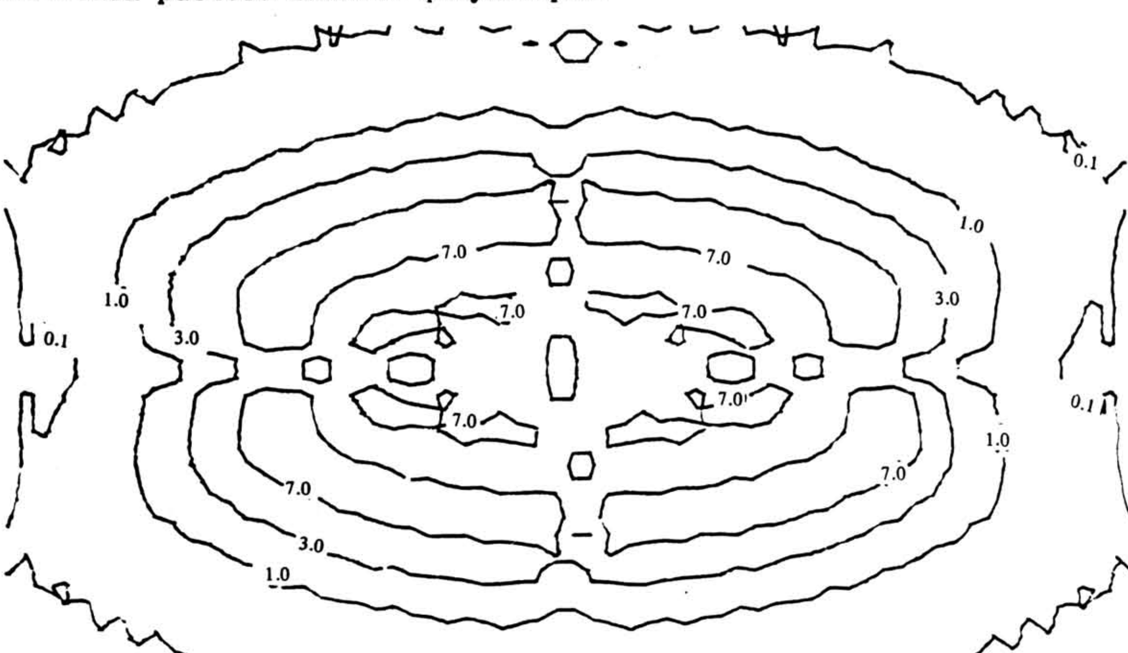


Рис. 7. Изофоты распределения интенсивности в фокальной плоскости "фокусатора в усеченный эллипс"

**Литература**


1. *Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В.* Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую. // ДАН АН СССР, 1983, т. 273, N 3, с. 605 - 608.

2. *Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М. Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы // Письма в ЖТФ - 1982 , т. 8, вып. 13, с. 810 - 815.

3. *Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сисакян Е.В., Сагателян Д.М., Сойфер В.А.* Оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в произвольную фокальную линию. // Препринт N 69, М.: ФИАН СССР, 1983 - 41 с.

4. *Гончарский А.В, Степанов В.В.* Обратные задачи когерентной оптики. Фокусировка в линию. // ЖВМ и МФ. 1986, т. 26, N 1, с. 80 - 91.

5. *Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В.* Плоские оптические элементы для фокусировки лазерного излучения. // Сб. «Волны и дифракция - 85». Девятый Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Телави, 1985, т. 2, с. 420 - 423.

6. *Воронцов М.А., Матвеев А.Н., Сивоконь В.П.* К расчету фокусаторов лазерного излучения в дифракционном приближении. // Компьютерная оптика. 1987, N 1, с. 74 - 78.

7. *Березный А.Е., Сисакян И.Н.* Синтезированные фазовые элементы для интегральных преобразований когерентных оптических полей. // Компьютерная оптика. 1989, с. 21 - 23.