В. В. Сергеев, А. В. Усачев

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ В ЗАДАЧАХ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

1. ОДНОМЕРНОЕ ДПХ

Важное место в задачах обработки сигналов занимает дискретное преобразование Фурье (ДПФ) N-точечной последовательности $y(n)$, которое определяется по формуле

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\exp(-i\frac{2\pi}{N}nk), \qquad k = 0,\ 1, \dots, N-1. \tag{1}$$

Исходная последовательность $y(n)$ может быть единственным образом восстановлена из ее спектра Фурье $Y(k)$ с помощью обратного преобразования

$$y(n) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)\exp(i\frac{2\pi}{N}nk), \quad n = 0,\ 1, \dots,\ N-1. \tag{2}$$

Как следует из формул (1) и (2), последовательность коэффициентов ДПФ $Y(k)$, а также последовательность $y(n)$, восстановленная из $Y(k)$ обратным преобразованием Фурье, могут рассматриваться как периодические с периодом N [1], т.е. для любых целых k и n

$$Y(k) = Y(k_{\mathrm{mod}N}), \quad y(n) = y(n_{\mathrm{mod}N}).$$

Наличие быстрых методов реализации ДПФ [2-4] делает его эффективным средством для вычисления свертки, корреляции двух функций целочисленного аргумента, оценки спектральной плотности и решения других задач, связанных со спектральным разложением сигналов.

Если последовательность $y(n)$ вещественна, то преобразование Фурье является информационно избыточным, а именно: вещественная часть $Y(k)$ - четная функция, мнимая - нечетная [1], т.е. с учетом периодичности

$$Y(N-k) = Y^{*}(k), \tag{3}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Для использования указанной симметрии в целях ускорения вычислений может быть применен алгоритм совмещенного ДПФ [5], что примерно вдвое сокращает временные затраты.

Более эффективным средством (чем алгоритм совмещенного ДПФ) обработки вещественных сигналов является дискретное преобразование Хартли (ДПХ) [6], которое при введенном определении дискретного преобразования Фурье представляет собой разность действительной (четной) и мнимой (нечетной) частей преобразования Фурье, ДПХ можно записать в виде [7]:

$$Y_H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\,\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), \quad k = 0,\ 1,\ldots,N-1, \tag{4}$$

где $\mathrm{cas}\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha$. Обратное преобразование Хартли совпадает с прямым с точностью до масштабного коэффициента N^{-1}:

$$y(n) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} Y_H(k)\,\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), \quad n = 0,\ 1,\ldots,N-1.$$

ДПХ связано с ДПФ следующими формулами [8]:

$$2\mathrm{Re}[Y(k)] = Y_H(k) + Y_H(N-k);$$
$$2\mathrm{Im}[Y(k)] = -Y_H(k) + Y_H(N-k). \tag{5}$$

Заметим, что для четной функции $y(n)$ выполняется соотношение $Y_H(N-k) = Y_H(k)$, и тогда из (5) следует, что $Y(k) = Y_H(k)$, т.е. ДПФ совпадает с ДПХ.

Известны быстрые алгоритмы вычисления ДПХ [7, 9, 10]. Их применение с последующим выполнением операций (5) позволяет, так же как и использование алгоритма совмещенного ДПФ, сократить затраты времени на вычисление дискретного спектра Фурье почти вдвое.

Но преобразование Хартли имеет ряд дополнительных преимуществ. Во-первых, ядро обратного ДПХ совпадает с ядром прямого преобразования, во-вторых, при реализации ДПХ используется только вещественная арифметика. Кроме того, нет необходимости всегда вычислять действительную и мнимую часть преобразования Фурье по формулам (5), многие задачи можно решить, непосредственно используя значения спектра Хартли, определяемые формулой (4). Рассмотрим возможность использования ДПХ в некоторых конкретных задачах.

2. ОДНОМЕРНАЯ СВЕРТКА

Циклическая свертка z(n) двух вещественных периодических (с периодом N) последовательностей x(n) и y(n) определяется соотношением

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6}$$

Непосредственное вычисление свертки по формуле (6) является весьма трудоемкой операцией для больших N, и при расчетах на ЭВМ выражений типа (6) используется метод ДПФ, который основан на известном соотношении [1] для Фурье-спектров сигналов:

$$Z(k) = X(k) \cdot Y(k),$$

где Z(k), X(k), Y(k) - дискретные преобразования Фурье последовательностей z(n), x(n), y(n) соответственно. При этом вычисление свертки сводится к вычислению трех ДПФ (двух прямых и обратного), а также к перемножению спектров входных сигналов x(n) и y(n).

В работе [7] показана связь между спектрами Хартли последовательностей, участвующих в свертке:

$$2Z_H(k) = X_H(k)[Y_H(k) + Y_H(N-k)] + X_H(N-k)[Y_H(k) - Y_H(N-k)], \tag{7}$$

где $Z_H(k)$, $X_H(k)$ и $Y_H(k)$ - ДПХ последовательностей z(n), x(n) и y(n) соответственно. Выражение (7) показывает, что вместо ДПФ для реализации циклической свертки может быть применен аппарат ДПХ.

Если одна из функций, например y(n), является четной, то ее ДПХ - также четная последовательность: $Y_H(N-k) = Y_H(k)$, и равенство (7) сводится к умножению спектров Хартли:

$$Z_H(k) = X_H(k)Y_H(k).$$

В этом случае применение ДПХ эквивалентно применению ДПФ.

3. ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ

Спектральная плотность мощности периодического сигнала y(n) определяется как взвешенный квадрат модуля его Фурье-спектра:

$$\Phi_y(k) = N^{-1}|Y(k)|^2.$$

Так как для вещественного сигнала y(n) выполняется равенство (3), то $|Y(N-k)|^2 = |Y(k)|^2$, и тогда из формул (5) следует, что

$$2\Phi_y(k) = 2\Phi_y(N-k) = N^{-1}[|Y_H(k)|^2 + |Y_H(N-k)|^2]. \tag{8}$$

Равенство (8) означает, что спектральная плотность мощности сигнала может быть рассчитана непосредственно на ДПХ.

4. ОЦЕНКА АВТОКОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Автоковариационная функция (АКФ) периодического сигнала $y(n)$

$$B_y(n) = N^{-1}\sum_{m=0}^{N-1} y(m)y(m+n), \qquad n = 0,\ 1, \dots, N-1$$

может быть представлена в виде циклической свертки

$$B_y(n) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{y}(k)y(n-k), \qquad n = 0,\ 1, \dots, N-1,$$

где $\bar{y}(k) = y(-k)$, и вычислена методом ДПФ.

В соответствии с дискретной формой теоремы Винера-Хинчина, АКФ связана со спектром мощности следующим соотношением:

$$B_y(n) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\Phi_y(k)\exp(\frac{2\pi}{N}nk), \qquad n = 0,\ 1, \dots, N-1.$$

В силу четности спектральной плотности мощности $\Phi_y(k)$ вещественной функции для вычисления АКФ вместо обратного ДПФ можно использовать обратное ДПФ:

$$B_y(n) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} \Phi_y(k)\operatorname{cas}(\frac{2\pi}{N}nk), \qquad n = 0,\ 1, \dots, N-1.$$

Во всех описанных выше задачах использование ДПХ вместо классического ДПФ позволяет добиться существенного (примерно в два раза) сокращения вычислительной сложности.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Двумерное ДПФ функции $y(n_1, n_2)$ целочисленных аргументов и обратное ДПФ определяются по формулам:

$$\begin{gathered} Y(k_1,\ k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} y(n_1,\ n_2)\exp[-i\frac{2\pi}{N}(n_1k_1 + n_2k_2)], \\ k_1,\ k_2 = 0,\ 1, \dots, N-1; \\ y(n_1,\ n_2) = N^{-2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} Y(k_1,\ k_2)\exp[i\frac{2\pi}{N}(n_1k_1 + n_2k_2)] \\ n_1,\ n_2 = 0,\ 1, \dots, N-1. \end{gathered} \tag{9}$$

Обычно для эффективной реализации ДПФ используют свойство разделимости преобразования (9), т.е. тот факт, что

$$\exp[-i\frac{2\pi}{N}(n_1k_1 + n_2k_2)] = \exp[-i\frac{2\pi}{N}n_1k_1]\exp[-i\frac{2\pi}{N}n_2k_2].$$

Двумерное ДПФ выполняется с помощью последовательности одномерных преобразований: сначала осуществляется ДПФ по строкам с помощью ядра

$\exp(-i\frac{2\pi}{N}n_2k_2)$, а затем с помощью ядра $\exp(-i\frac{2\pi}{N}n_1k_1)$ - по столбцам.

Двумерное ДПХ может быть задано двумя способами [11]. Во-первых, по аналогии с одномерным ДПХ как сумма действительной и мнимой частей двумерного ДПФ, и тогда

$$Y_H(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} y(n_1, n_2)\mathrm{cas}[\frac{2\pi}{N}(n_1k_1 + n_2k_2)], \qquad (10)$$

$$k_1,\ k_2 = 0,\ 1,\dots,N-1.$$

Это преобразование, в отличие от двумерного ДПФ, не является разделимым, что затрудняет его эффективную реализацию. Можно определить двумерное ДПХ и по-другому, как разделимое преобразование

$$Y_R(k_1,\ k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} y(n_1,\ n_2)\mathrm{cas}(\frac{2\pi}{N}n_1k_1)\mathrm{cas}(\frac{2\pi}{N}n_2k_2),$$

$$k_1,\ k_2 = 0,\ 1,\dots,N-1.$$

При этом выполнение двумерного преобразования (как и двумерного ДПФ) сводится к последовательности 2N одномерных преобразований.

Обратные преобразования для введенных ДПХ совпадают с прямыми с точностью до масштабирующего коэффициента N^{-2}.

Неразделимое ДПХ (формула (10)) по аналогии с одномерным случаем связано с ДПФ следующими формулами [11]:

$$2\mathrm{Re}[Y(k_1,\ k_2)] = Y_H(k_1,\ k_2) + Y_H(N-k_1,\ N-k_2); \qquad (11.1)$$

$$2\mathrm{Im}[Y(k_1,\ k_2)] = -Y_H(k_1,\ k_2) + Y_H(N-k_1,\ N-k_2). \qquad (11.2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для разделимого ДПХ справедливы соотношения

$$2\mathrm{Re}[Y(k_1,\ k_2)] = Y_R(N-k_1,\ k_2) + Y_R(k_1,\ N-k_2); \qquad (12.1)$$

$$2\mathrm{Im}[Y(k_1,\ k_2)] = -Y_R(k_1,\ k_2) + Y_R(N-k_1,\ N-k_2). \qquad (12.2)$$

Из формул (12) следует, что элементы разделимого ДПХ могут быть получены из комплексных коэффициентов ДПФ следующим образом:

$$Y_R(k_1,\ k_2) = \mathrm{Re}[Y(N-k_1, k_2)] - \mathrm{Im}[Y(k_1,\ k_2)]. \qquad (13)$$

Вычитая равенство (11.2) из (11.1) и равенство (12.2) из (12.1), легко убедиться в справедливости приведенного в работе [11] соотношения для пересчета спектров Хартли:

$$2Y_H(k_1,\ k_2) = Y_R(k_1,\ k_2)+Y_R(N-k_1,\ k_2)+Y_R(k_1,\ N-k_2)-Y_R(N-k_1,\ N-k_2). \qquad (14)$$

Складывая попарно равенства (11.1), (11.2) и (12.1), (12.2), получаем аналогичную формулу для расчета разделимого преобразования из ДПХ с неразделимым ядром:

$$2Y_R(k_1,\ k_2) = Y_H(k_1,\ k_2)+Y_H(N-k_1,\ k_2)+Y_H(k_1,\ N-k_2)-Y_H(N-k_1,\ N-k_2). \qquad (15)$$

Известно несколько способов [12] вычисления двумерного неразделимого преобразования Хартли, но, по-видимому, наиболее эффективным является способ, связанный с предварительным вычислением разделимого ДПХ, а затем пересчетом спектра по формуле (14).

Если $y(n_1, n_2)$ - четная функция, т. е. обладает центральной симметрией: $y(N-n_1,\ N-n_2) = y(n_1, n_2)$, то ее преобразования (как Фурье, так и Хартли в обеих формах) также центрально-симметричны. Тогда выражения (11)-(15) значительно упрощаются и вместо них мы имеем:

$$Y(k_1, k_2) = Y_H(k_1, k_2); \qquad (16)$$

$$Y(k_1, k_2) = Y_R(N-k_1, k_2). \qquad (17)$$

Из равенств (16) и (17) следует, что для осесимметричной (по обеим осям) функции $y(n_1, n_2)$ все три преобразования тождественны.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ СВЕРТКИ ПРИ ПОМОЩИ ДПФ

Пусть $z(n_1, n_2)$ - циклическая свертка двух вещественных последовательностей $x(n_1, n_2)$ и $y(n_1, n_2)$. В работе [1] приведена формула для расчета ДПХ функции $z(n_1, n_2)$ через ДПХ последовательностей $x(n_1, n_2)$ и $y(n_1, n_2)$:

$$\begin{aligned} 2Z_H(k_1, k_2) = {} & X_H(k_1, k_2)[Y_H(k_1, k_2) + Y_H(N-k_1,\ N-k_2)]+ \\ & + X_H(N-k_1,\ N-k_2)[Y_H(k_1, k_2) - Y_H(N-k_1,\ N-k_2)]. \end{aligned} \qquad (18)$$

При этом вычисление свертки сводится к вычислению трех преобразований Хартли (двух прямых и одного обратного) и расчету спектра Хартли функции $z(n_1, n_2)$ по формуле (18).

Поскольку спектры $X_H(k_1, k_2)$ и $Y_H(k_1, k_2)$ пересчитываются из ДПХ с разделимым ядром $X_R(k_1, k_2)$ и $Y_R(k_1, k_2)$ соответственно, то вычисление ДПХ последовательности $z(n_1, n_2)$ можно сделать более эффективным. Заметим, что из формул (11), (12) следует, что

$$\begin{aligned} Y_H(k_1, k_2) + Y_H(N-k_1,\ N-k_2) &= Y_R(N-k_1, k_2) + Y_R(k_1,\ N-k_2), \\ Y_H(k_1, k_2) - Y_H(N-k_1,\ N-k_2) &= Y_R(k_1, k_2) - Y_R(N-k_1,\ N-k_2). \end{aligned} \qquad (19)$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
2Z_H(k_1,k_2) &= X_H(k_1,k_2)[Y_R(N-k_1,\ k_2) + Y_R(k_1,\ N-k_2)] + \\
&+ X_H(N-k_1,\ N-k_2)[Y_R(k_1,k_2) - Y_R(N-k_1,\ N-k_2)].
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Применение формулы (20) для расчета разделимого ДПХ последовательности $z(n_1,n_2)$ позволяет избежать пересчета спектров Хартли последовательности $y(n_1,n_2)$. Пересчет спектров Хартли функций $x(n_1,n_2)$ и $z(n_1,n_2)$ целесообразно производить по схеме, изложенной в [12]. С учетом домножения на масштабирующий множитель процедура вычисления спектра $Z_R(k_1,k_2)$ из разделимых ДПХ $X_R(k_1,k_2)$ и $Y_R(k_1,k_2)$ с использованием формулы (20) включает в себя 3,5 N^2 умножений и 5,5 N^2 сложений.

Из равенства $Z(k_1,k_2) = X(k_1,k_2)Y(k_1,k_2)$ с помощью формул (12) и (13) можно получить выражение, непосредственно связывающее элементы разделимых ДПХ:

$$
\begin{aligned}
&4Z_R(k_1,k_2) + X_R(k_1,k_2)\Big[Y_R(k_1,k_2) + Y_R(N-k_1,k_2) + Y_R(N-k_1,\ N-k_2)\Big] + \\
&+ X_R(N-k_1,k_2)\Big[Y_R(k_1,k_2) - Y_R(N-k_1,k_2) + Y_R(k_1,N-k_2) - Y_R(N-k_1,N-k_2)\Big] + \\
&+ X_R(k_1,\ N-k_2)\Big[Y_R(k_1,k_2) + Y_R(N-k_1,k_2) - Y_R(k_1,N-k_2) - Y_R(N-k_1,N-k_2)\Big] + \\
&+ X_R(N-k_1,N-k_2)\Big[Y_R(k_1,k_2) - Y_R(N-k_1,k_2) - Y_R(k_1,N-k_2) + Y_R(N-k_1,N-k_2)\Big].
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Расчет ДПХ $Z_R(k_1,k_2)$ непосредственно по формуле (21) может быть выполнен с использованием $5N^2$ умножений и $5N^2$ сложений. Таким образом, способ вычисления разделимого ДПХ свертки $z(n_1,n_2)$ из разделимых ДПХ $X_R(k_1,k_2)$ и $Y_R(k_1,k_2)$ с промежуточным вычислением неделимых ДПХ $X_H(k_1,k_2)$ и $Y_H(k_1,k_2)$ (формула (20)) представляется более эффективным, чем непосредственный расчет $Z_R(k_1,k_2)$ по формуле (21).

Если одна из функций, участвующих в свертке, например $y(n_1,n_2)$ - четная, то выражения (18) и (21) упрощаются и принимают соответственно вид:

$$
Z_H(k_1,k_2) = X_H(k_1,k_2)Y_H(k_1,k_2) \tag{22}
$$

и

$$
\begin{aligned}
2Z_R(k_1,k_2) &= X_R(k_1,k_2)\Big[Y_R(k_1,k_2) + Y_R(N-k_1,k_2)\Big] + \\
&+ X_R(N-k_1,\ N-k_2)\Big[Y_R(k_1,k_2) - Y_R(N-k_1,k_2)\Big].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

В случае, когда функция $y(n_1, n_2)$ обладает свойством осевой симметрии (по обеим осям), $Y_R(N-k_1, k_2) = Y_R(k_1, k_2)$ и равенство (23) может быть записано как

$$Z_R(k_1, k_2) = X_R(k_1, k_2) Y_R(k_1, k_2). \tag{24}$$

Равенства (22) и (24) означают, что если одна из функций, участвующих в свертке, обладает свойством какой-либо симметрии, то для вычисления свертки вместо ДПФ может быть использовано преобразование Хартли без дополнительных затрат при вычислении спектра свертки: для центральной симметрии - ДПХ с неразделимым ядром, для осевой симметрии - разделимое ДПХ.

Равенство (23) может быть использовано при применении разделимого преобразования Хартли для вычисления свертки двух функций, одна из которых центрально-симметрична.

7. ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ И АКФ ДВУМЕРНОГО СИГНАЛА

С учетом формул (11) легко получить выражение для спектральной плотности мощности двумерного сигнала:

$$4\Phi_y(k_1, k_2) = 4N^{-2}|Y(k_1, k_2)|^2 = N^{-2}\left\{\left[Y_H(k_1, k_2) + Y_H(N-k_1,\ N-k_2)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[Y_H(k_1,\ k_2) - Y_H(N-k_1,\ N-k_2)\right]^2\right\},$$

откуда

$$2\Phi_y(k_1,\ k_2) = N^{-2}\left[Y_H^2(k_1,\ k_2) + Y_H^2(N-k_1,\ N-k_2)\right].$$

Аналогично для разделимого ДПХ с помощью формул (12) получим:

$$4\Phi_y(k_1, k_2) = N^{\,2}\left\{\left[Y_R(k_1, k_2) - Y_R(N-k_1,\ N-k_2)\right]^2 + \left[Y_R(N-k_1, k_2) + Y_R(k_1, N-k_2)\right]^2\right\}.$$

АКФ двумерного сигнала $y(n_1, n_2)$ может быть вычислена как обратное ДПФ функции $\Phi_y(k_1, k_2)$, т.е.

$$B_y(n_1, n_2) = N^{-2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\Phi_y(k_1, k_2)\exp\left[i\,\frac{2\pi}{N}\,(n_1k_1 + n_2k_2)\right].$$

Спектральная плотность $\Phi_y(k_1, k_2)$ - центрально-симметричная функция, поэтому для нее ядро обратного ДПФ совпадает с ядром прямого преобразования, и тогда, воспользовавшись формулами (16) и (17) для четной функции, получим:

$$B_y(n_1, n_2) = N^{-2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} \Phi_y(k_1, k_2) \operatorname{cas}\left[\frac{2\pi}{N} (n_1 k_1 + n_2 k_2) \right]$$

и

$$B_y(N-n_1, n_2) = N^{-2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} \Phi_y(k_1, k_2) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N} n_1 k_1 \right) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N} n_2 k_2 \right). \qquad (25)$$

Таким образом, для оценки АКФ двумерного вещественного сигнала следует вычислить обратное неразделимое ДПХ его спектральной плотности. Использование разделимого преобразования для этой цели приводит, в соответствии с формулой (25), к необходимости перестановки результирующей матрицы для размещения отсчетов АКФ на своих местах.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье была рассмотрена возможность применения дискретного преобразования Хартли вместо ДПФ при вычислении свертки, оценке спектральной плотности мощности и автоковариационной функции цифрового сигнала. Исследовано различие двух форм ДПХ: с разделимым и неразделимым ядром. Показано, что оба варианта преобразования Хартли равно применимы в указанных задачах. Приведены формулы для пересчета спектров в различных базисах. Сделан вывод о целесообразности использования разделимого ДПХ при обработке двумерных сигналов.

Литература

1. *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ. - М.: Связь, 1979. - 416 с.

2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. - М: Мир, 1978. - 848 с.

3. *Burrus C.S., Eschenbasher P.W.* An in-place, in-order prime factor FFT algorithm. - IEEE, Trans. Acoust., Speach, Signal Processing, 1981, ASSP-29, N 4, p. 806-817.

4. *Капорин И.Е.* Новый алгоритм БПФ. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1980, т. 20, N 4, с. 1054-1058.

5. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. - М.: Советское радио, 1979. - 312 с.

6. *Сороко Л.М., Стриж Т.А.* Спектральные преобразования на ЭМВ. - Дубна: ОИЯИ, 1972. - 136 с.

7. *Брейсуэлл Р.Н.* Быстрое преобразование Хартли. ТИИЭР, 1984, т. 72, N 8, с. 19-28.

8. *Bracewell R.N.* Discrete Hartley Transform. JOSA, 1983, v. 73, N 12, p. 1832-1835.

9. *Прадо Ж.* Замечания к статье «Быстрое преобразование Хартли». ТИИЭР, 1985, т. 73, N 12, с. 182-183.

10. *Сергеев В.В., Усачев А.В.* Новый алгоритм быстрого преобразования Хартли. - В наст. сборнике.

11. *Кумарсен Р., Гупта П.К.* Алгоритм с векторным основанием для вычисления двумерного дискретного преобразования Хартли. ТИИЭР, 1986, т. 74, N 5, с. 149-151.

12. *Брейсуэлл Р.Н., Бьюнеман О., Хао Х., Вилласенор Дж.* Быстрое двумерное преобразование Хартли. ТИИЭР, 1986, т. 74, N 9, с. 128-129.