

ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В основу многих процедур цифровой фильтрации и анализа изображений положена операция линейной обработки «скользящим окном», которая заключается в преобразовании дискретизированного двумерного сигнала КИХ-фильтром - линейной системой с постоянными параметрами, имеющей конечную (ограниченную по протяженности) импульсную характеристику [1, 2]. Как известно, значения сигнала на выходе КИХ-фильтра являются результатом цифровой свертки входного сигнала с импульсной характеристикой фильтра и могут быть вычислены взвешенным суммированием отсчетов входного сигнала в пределах окна обработки. Однако такое вычисление свертки (так называемая прямая реализация КИХ-фильтра) имеет практический смысл лишь для малых размеров окна, т. е. короткой импульсной характеристики, поскольку объем вычислений здесь пропорционален числу ненулевых отсчетов последней. Для больших окон (в задачах восстановления сильно расфокусированных изображений, обнаружения пространственно протяженных объектов и т. д.) прямое вычисление свертки оказывается чрезмерно трудоемким. Разработанные многочисленные алгоритмы быстрой свертки для КИХ-фильтров общего вида [3] также далеко не всегда решают проблему вычислительной сложности. В этом контексте представляется удивительным, что до сих пор в обработке изображений не находят широкого применения алгоритмы, воплощающие прозрачную идею параллельной рекурсивной реализации КИХ-фильтров [4, 5]. Такие алгоритмы способны резко (на порядок и более) сократить необходимый объем вычислений при сохранении высокого качества обработки двумерного сигнала [6].

Следует заметить, что подход к рекурсивному построению цифровых линейных фильтров с конечной импульсной характеристикой сложился достаточно давно. Именно он реализуется известными структурами КИХ-фильтров в форме с частотной выборкой [1]. Рекурсивные КИХ-фильтры иногда применяются при скользящем спектральном анализе сигналов [7, 8]. Но только в работе [4] (и позже в [5]) обоснована, наконец, возможность и целесообразность использования данного подхода для решения широкого класса задач обработки одно- и многомерных сигналов.

Вместе с тем и в [4, 5] не раскрываются все аспекты синтеза параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров. Выглядит неоправданно суженным класс рассматриваемых базисов разложения импульсных характеристик (правда, впоследствии этот недостаток отчасти устранен в работе [9]). Принятый аппроксимационный принцип расчета параметров фильтров (с анализом точности представления «требуемой» импульсной характеристики) не всегда хорошо согласуется с критериями эффективности конкретных процедур обработки

изображений. Отсутствуют количественные данные, демонстрирующие выигрыш от параллельно-рекурсивной реализации КИХ-фильтров в различных практических ситуациях.

Предлагаемый цикл статей представляет собой попытку восполнения имеющихся пробелов в вопросах расчета и обоснования применимости параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров при обработке изображений «скользящим окном». Ниже описывается общая структура рассматриваемых фильтров, обсуждается проблема выбора рекурсивно реализуемых базисов для их импульсных характеристик. В статье [10] решается задача расчета фильтров для некоторых типовых процедур обработки сигналов. В [6] приводятся оценки эффективности этих процедур в сопоставлении с аналогичными оценками для прямой реализации КИХ-фильтров. Статья [11] содержит описание и некоторые результаты исследования одного из вариантов аппаратной реализации двумерного параллельно-рекурсивного КИХ-фильтра для обработки изображений.

1. ОДНОМЕРНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ

Рассмотрим сначала более простой и наглядный случай одномерных сигналов. Преобразование КИХ-фильтром бесконечной последовательности отсчетов входного сигнала $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ описывается соотношением свертки

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=M}^{M+N-1} h(m)x(n-m), \quad (1)$$

где $h(m)$ - импульсная характеристика фильтра, равная нулю вне интервала $[M, M+N-1]$; величина M задает положение окна обработки относительно формируемого выходного отсчета, а N - размер окна. В общем случае на значения импульсной характеристики в пределах окна не налагается никаких ограничений. Однако мы, преследуя цель ускоренного вычисления свертки (1), сузим класс КИХ-фильтров и будем рассматривать только те из них, которые представляются в виде K параллельно соединенных звеньев (при $K \ll N$) и, следовательно, для которых

$$h(m) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m), \quad (2)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k y_k(n), \quad (3)$$

$$y_k(n) = \sum_{m=M}^{M+N-1} h_c(m)x(n-m), \quad (4)$$

где $\{a_k\}_{k=0}^{K-1}$ - коэффициенты;

$\{h_k(m)\}_{k=0}^{K-1}$ - линейно независимые базисные функции разложения $h(m)$ в ряд (2), т. е. импульсные характеристики параллельных КИХ-звеньев;

$\{y_k(n)\}_{k=0}^{K-1}$ - сигналы на выходах звеньев.

Более того, потребуем, чтобы каждое звено допускало эффективную рекурсивную реализацию, т. е. описывалось достаточно простым разностным уравнением. Последнее означает, что передаточная функция (Z - преобразование импульсной характеристики) звена

$$H_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m) z^{-m} \quad (5)$$

должна записываться в дробно-рациональной форме как отношение полиномов от комплексной переменной z , состоящих из небольшого числа слагаемых [1].

Исходя из сказанного, определим общий вид импульсных характеристик рекурсивно реализуемых КИХ-звеньев. Интервал, ограничивающий ненулевые отсчеты конечной импульсной характеристики, можно задать через «прямоугольный импульс»:

$$p(m) = u(m-\gamma) - u(m-\delta), \quad (6)$$

где $u(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m \geq 0 \\ 0 & \text{при } m < 0 \end{cases}$

- функция единичного скачка; γ, δ - целые постоянные, определяющие положение импульса на оси аргумента ($\gamma < \delta$). Последовательность (6) имеет Z -преобразование, которое может быть представлено в дробно-рациональной форме:

$$P(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(m) z^{-m} = z^{-\gamma} + z^{-\gamma+1} + \dots + z^{-\delta-1} = \frac{z^{-\gamma} - z^{-\delta}}{1 - z^{-1}}. \quad (7)$$

Известны трансформации произвольной последовательности, не увеличивающие ее длину и сохраняющие дробно-рациональность Z -преобразования: это умножения на коэффициент, целую положительную степень аргумента и экспоненту [1]. Таким образом, последовательность

$$p^*(m) = sm^{\alpha} \beta^{-m} p(m) \quad (8)$$

при целом неотрицательном α и произвольных s, β также будет иметь конечную длину и дробно-рациональное Z -преобразование. Учтем далее, что каждая базисная функция $h_k(m)$ может быть составлена из нескольких последовательностей вида (8), и, введя необходимую индексацию постоянных, запишем:

$$h_k(m) = \sum_{l=0}^{L_k-1} s_{lk} m^{\alpha_{lk}} \beta_{lk}^{-m} [u(m-\gamma_{lk}) - u(m-\delta_{lk})], \quad (9)$$

где $L_k, \alpha_{1k}, \gamma_{1k}, \delta_{1k}$ - целочисленные ($L_k \geq 1, \alpha_{1k} \geq 0, M \leq \gamma_{1k} < \delta_{1k} \leq M+N$), а s_{1k}, β_{1k} - произвольные вещественные или комплексные константы. Подстановка формулы (9) в (5) с учетом (6), (7) и свойств Z-преобразования [1] дает:

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{L_k-1} s_{1k} (-1)^{\alpha_{1k}} z \underbrace{\frac{d}{dz} \left\{ z \frac{d}{dz} \left\{ \dots z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(\beta_{1k} z)^{-\gamma_{1k}} - (\beta_{1k} z)^{-\delta_{1k}}}{1 - (\beta_{1k} z)^{-1}} \right\} \dots \right\} \right\}}_{\alpha_{1k} \text{ раз}} \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) могут использоваться для конструирования различных базисов разложения (2) и получения передаточных функций звеньев. Выбор конкретных значений параметров в (9) и (10) следует производить из соображений простоты получающихся КИХ-звеньев (очевидно, в частности, что L_k и α_{1k} должны быть невелики) и достаточности малого числа слагаемых в разложении (2) для решения определенной задачи обработки сигналов. Некоторые базисы для представления импульсных характеристик параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров будут рассмотрены ниже.

2. ДВУМЕРНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ

Для двумерного сигнала (изображения), заданного отсчетами $x(n_1, n_2)$ на бесконечном прямоугольном растре, результат обработки КИХ-фильтром выражается через двумерную свертку:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h(m_1, m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (11)$$

где $h(m_1, m_2)$ - импульсная характеристика двумерного фильтра;

D - конечная область ее ненулевых значений.

Как и в одномерном случае, для быстрого параллельно-рекурсивного вычисления свертки (11) необходимо, чтобы импульсная характеристика фильтра имела представление в виде суммы

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m_1, m_2) \quad (12)$$

при небольшом K , а базисные функции этого разложения соответствовали импульсным характеристикам рекурсивных КИХ-звеньев. При выполнении (12) выходной сигнал фильтра будет формироваться из сигналов с выходов параллельных звеньев:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k y_k(n_1, n_2), \quad (13)$$

где

$$y_k(n_1, n_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} h_k(m_1, m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (14)$$

К сожалению, для области D произвольной формы нельзя предложить удобную общую формулу для двумерных базисных импульсных характеристик $h_k(m_1, m_2)$. Однако на практике обычно ограничиваются прямоугольными областями:

$$D: M_1 \leq m_1 \leq M_1 + N_1 - 1, \quad M_2 \leq m_2 \leq M_2 + N_2 - 1$$

и разделимыми звеньями [2, 5, 9]:

$$h_k(m_1, m_2) = h_k^{(1)}(m_1) h_k^{(2)}(m_2). \quad (15)$$

При этом для каждого сомножителя в (15) можно воспользоваться «одномерной» общей формулой (9). Реализация разделимого звена заключается в последовательной (каскадной) обработке двумерного сигнала по координатам:

$$y_k(n_1, n_2) = \sum_{m_1=M_1}^{M_1+N_1-1} h_k^{(1)}(m_1) \left[\sum_{m_2=M_2}^{M_2+N_2-1} h_k^{(2)}(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right]. \quad (16)$$

3. НЕКОТОРЫЕ РЕКУРСИВНО РЕАЛИЗУЕМЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ

Задача конструирования базиса для разложения (2) импульсной характеристики КИХ-фильтра решается эвристически с учетом удобств программной или аппаратной реализации фильтра, эффективного «покрытия» рассматриваемого множества процедур обработки сигналов и т. д. Причем это решение удобно разбить на два этапа. На первом определяется класс базисных функций, более конкретный, нежели (9), строится алгоритм и оценивается сложность их рекурсивного вычисления. На втором этапе из множества функций данного класса выбираются K базисных функций, обеспечивающих требуемое качество и простоту обработки. Здесь мы остановимся на первом этапе решения задачи. Второй, требующий привлечения показателей эффективности обработки сигналов, будет рассмотрен в [10].

Опишем несколько видов одномерных рекурсивно реализуемых базисных функций с указанием их соответствия общей модели (9) и выводом разностных уравнений.

3.1. Прямоугольный базис

Прямоугольный базис [4, 5] состоит из функций вида

$$h_k(m) = u(m - \gamma_k) - u(m - \delta_k) \quad (17)$$

и соответствуют случаю, когда в (9)

$$L_k = s_{ok} = \beta_{ok} = 1, \alpha_{ok} = 0, \gamma_{ok} = \gamma_k, \delta_{ok} = \delta_k.$$

Выражение (17) совпадает с (16) и, следовательно, передаточная функция КИХ-звена - с Z-преобразованием (1):

$$H_k(z) = \frac{z^{-\gamma_k} - z^{-\delta_k}}{1 - z^{-1}}. \quad (18)$$

Структура дробно-рациональной передаточной функции непосредственно определяет вид разностного уравнения, описывающего линейную систему [1]. Совершив соответствующий переход, для сигнала (4) на выходе звена получаем:

$$y_k(n) = y_k(n-1) + x(n-\gamma_k) - x(n-\delta_k). \quad (19)$$

Как следует из этой формулы, для формирования одного отсчета $y_k(n)$ нужно выполнить всего две арифметические операции: сложение и вычитание. Крайняя простота рекурсивной реализации каждого звена является несомненным достоинством данного базиса. В то же время, как утверждается в [4, 5], «аппроксимирующая» способность прямоугольных базисных функций невысока, т. е. для качественной обработки сигнала может потребоваться включать в КИХ-фильтр слишком много параллельных звеньев. Кроме того, некоторые неудобства при расчете фильтра доставляет сильная избыточность базиса. Действительно, все возможные комбинации параметров γ_k, δ_k в пределах N-точечного окна порождают $\frac{N(N+1)}{2}$ прямоугольных импульсов, среди которых многие связаны линейной зависимостью. При $N \gg 1$ задача наилучшего выбора K линейно-независимых базисных функций из столь большого множества становится весьма трудоемкой.

3.2. Базис комплексных дискретных экспонент

Базис комплексных дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), рассматриваемый на N-точечном окне, состоит из N ортогональных функций одинаковой протяженности, которые мы запишем в обобщенном (по сравнению с [4, 5]) виде:

$$h_k(m) = \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{N} j_k m + \varphi_k\right)\right] \times \left[u(m-M) - u(m-M-N)\right], \quad (20)$$

* Здесь и далее в разделе 4 будем пренебрегать операциями сложения-вычитания в индексах членов разностных уравнений. Основанием для этого является тот факт, что последовательное по возрастанию (микрементное) изменение индексов в процессе рекурсии может быть реализовано существенно проще «полноценных» двухместных арифметических операций над произвольными числами.

где j_k - индекс функции (целочисленная «частота») $0 \leq j_k \leq N-1$, $j_p \neq j_q$

при $p \neq q$;

φ_k - фаза, вещественная постоянная. Выражение (20) соответствует общей формуле (9) при

$$L_k = 1, s_{ok} = \exp(i\varphi_k), \alpha_{ok} = 0, \beta_{ok} = \exp(-i \frac{2\pi}{N} j_k), \gamma_{ok} = M, \delta_{ok} = M+N.$$

После подстановки этих параметров в (10) получаем передаточную функцию звена фильтра:

$$H_k(z) = \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{N} j_k M + \varphi_k\right)\right] \frac{z^{-M} - z^{-M-N}}{1 - \exp\left(i \frac{2\pi}{N} j_k\right) z^{-1}}. \quad (21)$$

Положим $\varphi_k = -\frac{2\pi}{N} j_k M$. Тогда выражение (21) максимально упрощается:

$$H_k(z) = \frac{z^{-M} - z^{-M-N}}{1 - \exp\left(i \frac{2\pi}{N} j_k\right) z^{-1}}, \quad (22)$$

и функции базиса ДЭФ приобретают вид

$$h_k(m) = \exp\left[i \frac{2\pi}{N} j_k (m-M)\right] \times [u(m-M) - u(m-M-N)]. \quad (23)$$

Звену с передаточной функцией (22), осуществляющему преобразование (4), соответствует разностное уравнение

$$y_k(n) = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} j_k\right) y_k(n-1) + x(n-M) - x(n-M-N). \quad (24)$$

Заметим, что в этом уравнении имеется комплексный множитель, из-за которого и последовательность $y_k(n)$ оказывается комплекснозначной (исключение составляет лишь случай, когда базисная функция (23) является прямоугольной, и формула (24) совпадает с (19)). Более того, при использовании в разложении импульсной характеристики произвольного набора из K базисных функций полный сигнал на выходе фильтра также будет принимать комплексные значения. Остается заключить, что применение базиса ДЭФ в параллельно-рекурсивных КИХ-фильтрах целесообразно при обработке именно комплексных сигналов.

Для сигналов, принимающих вещественные значения, следует рассматривать только вещественную часть импульсной характеристики фильтра с базисом ДЭФ. Однако можно показать, что такая модификация процедуры обработки, по существу, означает переход к базису Фурье в вещественной форме, для которого достижима более простая реализация рекурсии.

3.3. Вещественный базис Фурье

Вещественный базис Фурье формируется из взятых отдельно вещественных и мнимых частей функций базиса ДЭФ (20), т.е. включает в себя базисные функции двух видов:

$$h_k(m) = h_k^{\cos}(m) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}j_k m + \varphi_k\right) \times [u(m-M) - u(m-M-N)], \quad (25)$$

$$h_{k'}(m) = h_{k'}^{\sin}(m) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}j_{k'} m + \varphi_{k'}\right) \times [u(m-M) - u(m-M-N)], \quad (26)$$

где, как и раньше, $j_k, j_{k'}$ - целочисленные индексы, не повторяющиеся для функций каждого вида:

$$j_p \neq j_q, \quad j'_p \neq j'_q \quad \text{при } p \neq q;$$

$\varphi_k, \varphi_{k'}$ - фазы, принимающие равные значения для каждой пары функций (25) и (26) с одинаковыми индексами:

$$\varphi_k = \varphi_{k'}, \quad \text{при } j_k = j_{k'}.$$

Пусть для функции (26) с индексом $j_{k'} = \frac{N}{2}$ выполняется условие

$$\varphi_{k'} \neq \pi r, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Базис является ортогональным и полным на N - точечном окне, если включает в себя функции (25), (26) со всеми значениями индексов в интервалах*:

$$0 \leq j_k < \frac{N}{2}, \quad 0 < j_{k'} \leq \frac{N}{2}.$$

Выражения (25) и (26) можно получить из общей формулы (9), если в ней положить:

$$\begin{aligned} L_k &= L_{k'} = 2, \quad \alpha_{0k} = \alpha_{1k} = \alpha_{0k'} = \alpha_{1k'} = 0, \\ s_{0k} &= \frac{1}{2} \exp(i\varphi_k), \quad s_{1k} = \frac{1}{2} \exp(-i\varphi_k), \\ s_{0k'} &= \frac{1}{2} \exp\left[i\left(\varphi_{k'} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad s_{1k'} = \frac{1}{2} \exp\left[-i\left(\varphi_{k'} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \\ \beta_{0k} &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j_k\right), \quad \beta_{1k} = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j_k\right), \\ \beta_{0k'} &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j_{k'}\right), \quad \beta_{1k'} = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j_{k'}\right), \\ \gamma_{0k} &= \gamma_{1k} = \gamma_{0k'} = \gamma_{1k'} = M, \\ \delta_{0k} &= \delta_{1k} = \delta_{0k'} = \delta_{1k'} = M + N. \end{aligned}$$

*При невыполнении условия (27) вместо указанных интервалов следовало бы выбрать:

$$0 \leq j_k \leq \frac{N}{2}, \quad 0 < j_{k'} < \frac{N}{2}.$$

Подставив эти параметры в формулу (10) и приведя в ней дробно-рациональные слагаемые к общему знаменателю, получаем выражения для передаточных функций КИХ-звеньев двух типов:

$$H_k^{\cos}(z) = (z^{-M} - z^{-M-N}) \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k M + \varphi_k\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k (M-1) + \varphi_k\right) z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (28)$$

$$H_k^{\sin}(z) = (z^{-M} - z^{-M-N}) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N} j'_k M + \varphi'_k\right) - \sin\left[\frac{2\pi}{N} j'_k (M-1) + \varphi'_k\right] z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j'_k\right) z^{-1} + z^{-2}}. \quad (29)$$

Если взять конкретные значения фаз (удовлетворяющие условию (27)):

$$\varphi_k = -\frac{2\pi}{N} j_k \left(M - \frac{1}{2}\right), \quad \varphi'_k = -\frac{2\pi}{N} j'_k \left(M - \frac{1}{2}\right),$$

то передаточные функции (22) и (29) упрощаются:

$$H_k^{\cos}(z) = \cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right) \frac{(z^{-M} - z^{-M-N})(1 - z^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (30)$$

$$H_k^{\sin}(z) = \sin\left(\frac{\pi}{N} j'_k\right) \frac{(z^{-M} - z^{-M-N})(1 + z^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j'_k\right) z^{-1} + z^{-2}}. \quad (31)$$

Отбросив в формулах (30), (31) постоянные для каждой функции коэффициенты, приходим к еще более простым выражениям:

$$H_k^{\cos}(z) = \frac{(z^{-M} - z^{-M-N})(1 - z^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (32)$$

$$H_k^{\sin}(z) = \frac{(z^{-M} - z^{-M-N})(1 + z^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j'_k\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (33)$$

которые и будем считать окончательными. Выполнив те же упрощающие действия над последовательностями (25), (26), можно убедиться, что Z-преобразованиям (32) и (33) соответствуют модифицированные функции вещественного базиса Фурье:

$$h_k^{\cos}(m) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{N} j_k \left(m - M + \frac{1}{2}\right)\right] \times [u(m-M) - u(m-M-N)], \quad (34)$$

$$h_k^{\sin}(m) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{N} j'_k\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{N} j'_k \left(m - M + \frac{1}{2}\right)\right] \times [u(m-M) - u(m-M-N)]. \quad (35)$$

Эти функции с точностью до коэффициентов совпадают с вещественными и мнимыми частями комплексных базисных функций сдвинутого дискретного

преобразования Фурье (СДФ) с параметрами сдвига $(\frac{1}{2}, 0)$ [5] для сигнала на временном отрезке $[M, M+N-1]$.

Из выражений (32), (33) видно, что передаточные функции звеньев имеют общие, независимые от индексов, множители. Это позволяет построить экономичные с вычислительной точки зрения каскадные рекурсивные процедуры получения отсчетов на выходах звеньев. Если не учитывать возможные совпадения индексов базисных функций (34) и (35), то рекурсивный вычислительный процесс можно описать системой разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(n) = x(n-M) - x(n-M-N), \\ x_2(n) = x_1(n) - x_1(n-1), \\ x_3(n) = x_1(n) + x_1(n-1), \\ \\ Y_k(n) = \begin{cases} y_k(n-1) + x_1(n) & \text{при } j_k = 0 \\ 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}j_k\right)y_k(n-1) - y_k(n-2) + x_2(n) & \text{при } 0 < j_k < \frac{N}{2}, \end{cases} \\ \\ Y_{k'}(n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}j_{k'}\right)y_{k'}(n-1) - y_{k'}(n-2) + x_3(n) & \text{при } 0 < j_{k'} \leq \frac{N}{2}. \end{array} \right. \quad (36)$$

При построении системы (36) учтено, что среди рассматриваемых базисных функций, как и в базисе ДЭФ, имеется одна прямоугольная - это функция (34) с индексом $j_k = 0$, для соответствующего ей КИХ-звена реализована упрощенная схема рекурсивных вычислений.

Если базисные функции (34) и (35) входят в разложение (2) только парами при одинаковых значениях индексов ($j_k = j_{k'}$), за исключением «прямоугольника» (34) при $j_k = 0$, для которого нет пары, то фильтр оказывается более простым. Действительно, в данном случае вместо системы уравнений (36) можно построить другую, обеспечивающую меньше вычислительные затраты:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(n) = x(n-M) - x(n-M-N), \\ x_2^{(k)}(n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}j_k\right)x_2^{(k)}(n-1) - x_2^{(k)}(n-2) + x_1(n), \\ \\ Y_k(n) = \begin{cases} y_k(n-1) + x_1(n) & \text{при } j_k = 0 \\ x_2^{(k)}(n) - x_2^{(k)}(n-1) & \text{при } 0 < j_k < \frac{N}{2}, \end{cases} \\ \\ Y_{k'}(n) = x_2^{(k)}(n) + x_2^{(k)}(n-1) & \text{при } j_{k'} = j_k. \end{array} \right. \quad (37)$$

3.4. Косинусный базис

Косинусный базис состоит из вещественных ортогональных функций, которые для интервала $[M, M+N-1]$ могут быть с точностью до коэффициентов Q_k представлены в виде:

$$h_k(m) = Q_k \cos \left\{ \frac{\pi [2(m - M) + 1] j_k}{2N} \right\} \times [u(m - M) - u(m - M - N)] \quad (38)$$

с целочисленными индексами, удовлетворяющими условиям

$$0 \leq j_k \leq N - 1, \quad j_p \neq j_q \quad \text{при } p \neq q.$$

Данный базис допускает интерпретацию как базис СДПФ с параметрами сдвига $(\frac{1}{2}, 0)$ для последовательности, четным образом расширенной до двойной длины [5]. В монографии [12] отмечены положительные свойства косинусного базиса и, в частности, его высокая «аппроксимирующая» способность. В [8, 9] предложено использовать рекурсивно вычисляемые косинусные базисные функции при анализе сигналов на скользящем окне.

Функции (38) получаются из общей формулы (9) при

$$L_k = 2, \quad s_{0k} = \frac{Q_k}{2} \exp \left[i \frac{\pi(1 - 2M) j_k}{2N} \right], \quad s_{1k} = \frac{Q_k}{2} \exp \left[-i \frac{\pi(1 - 2M) j_k}{2N} \right],$$

$$\alpha_{0k} = \alpha_{1k} = 0, \quad \beta_{0k} = \exp \left(-i \frac{\pi}{N} j_k \right), \quad \beta_{1k} = \exp \left(i \frac{\pi}{N} j_k \right),$$

$$\gamma_{0k} = \gamma_{1k} = M, \quad \delta_{0k} = \delta_{1k} = M + N.$$

Подставив эти параметры в (10), находим выражение для передаточных функций звеньев (см. также [8]):

$$H_k(z) = Q_k \cos \left(\frac{\pi}{2N} j_k \right) \frac{[z^{-M} - (-1)^{j_k} z^{-M-N}] \times (1 - z^{-1})}{1 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{N} j_k \right) z^{-1} + z^{-2}} \quad (39)$$

Положим $Q_k = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2N} j_k \right)}$. При этом выражение (39) упрощается:

$$H_k(z) = \frac{[z^{-M} - (-1)^{j_k} z^{-M-N}] (1 - z^{-1})}{1 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{N} j_k \right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (40)$$

а базисные функции принимают конкретный вид:

$$h_k(m) = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2N} j_k \right)} \cos \left\{ \frac{\pi [2(m - M) + 1] j_k}{2N} \right\} [u(m - M) - u(m - M - N)]. \quad (41)$$

Из последнего выражения видно, что значение индекса $j_k = 0$, как и в предыдущих случаях, порождает прямоугольную базисную функцию, для которой существует простейший алгоритм формирования выходного сигнала КИХ-звена. Другие значения индекса требуют построения рекурсивного вычислительного

процесса исходя непосредственно из передаточной функции (40). Нетрудно показать, что для получения сигналов на выходах КИХ-звеньев здесь можно использовать систему разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(n) = x(n - M) - x(n - M - N) \\ x_2(n) = x(n - M) + x(n - M - N) \\ x_3(n) = x_1(n) - x_1(n - 1) \\ x_4(n) = x_2(n) - x_2(n - 1) \\ Y_k(n) = Y_k(n - 1) + x_1(n) \quad \text{при } j_k = 0 \\ Y_k(n) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right) Y_k(n - 1) - Y_k(n - 2) + x_3(n) \quad \text{при четных } j_k \neq 0 \\ Y_k(n) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right) Y_k(n - 1) - Y_k(n - 2) + x_4(n) \quad \text{при нечетных } j_k \end{array} \right. \quad (42)$$

4. СТРУКТУРЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Разностные уравнения (19), (24), (36), (37), (42), а также соотношения (3), (13) и (16) дают возможность оценить вычислительную сложность одномерных и двумерных параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров. В качестве характеристик сложности будем использовать число операций вещественного сложения (вычитания) и умножения, приходящееся на каждый отсчет обработанного сигнала.

Для оценки числа операций необходимо задаться конкретной структурой анализируемого фильтра. В одномерном случае структурная схема, непосредственно вытекающая из формулы (2)+(4), изображена на рис. 1. Будем ее рассматривать для следующих базисов: прямоугольного, ДЭФ, вещественного фурье при независимой реализации звеньев (по вычислительной схеме (36)) и

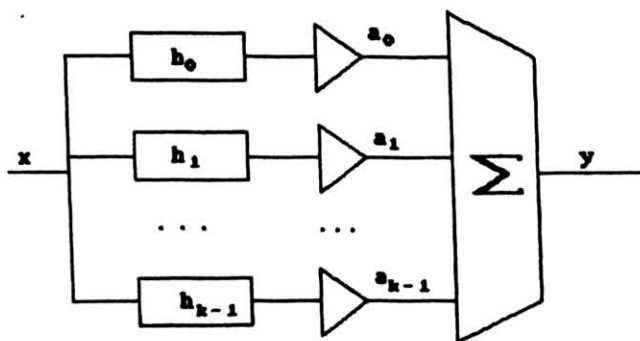


Рис. 1.

косинусного. Причем для ДЭФ, фурье и косинусного базиса будем считать, что в разложении (2) импульсной характеристики фильтра в числе прочих обязательно присутствует базисная функция с индексом $j_k = 0$, для которой реализована упрощенная схема рекурсивных вычислений (для определенности примем, что это h_0). Для вещественного базиса фурье с синусными и косинусными функциями, используемыми парами при равных индексах (см.

вычислительную схему (37)), следует модифицировать структуру фильтра, объединив пары соответствующих звеньев, как это показано на рис. 2.

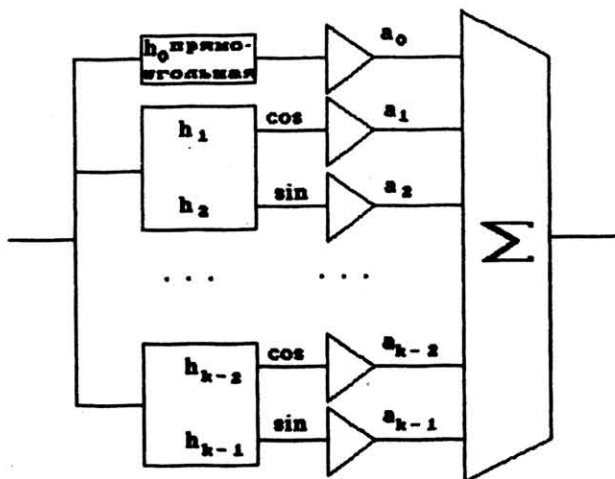


Рис. 2.

Большее многообразие структур получается в двумерном случае. Наиболее очевидная схема двумерного фильтра, построенная в соответствии с (13)+(16), представлена на рис. 3. Будем использовать данную структуру для прямоугольного базиса. Для других базисов в разложении (12) импульсной характеристики целесообразно выделить двумерную базисную функцию вида (15) с нулевыми индексами в обоих сомножителях (будем считать, что такой двумерный «прямоугольник» используется в обязательном порядке), а также

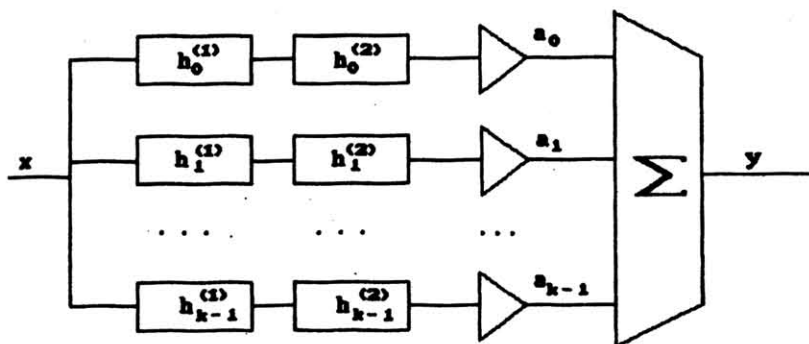


Рис. 3.

«полупрямоугольные» базисные функции с нулевым индексом по одной из координат. Такое выделение позволяет снизить сложность фильтра за счет исключения избыточных параллельных звеньев и сокращения вычислений. На

На рис. 2 для удобства изображения введено упорядочение базисных функций по изменению индексов, так что объединяемые звенья имеют смежные порядковые номера.

рис. 4 приведена структура двумерного фильтра для базисов ДЭФ, вещественного фурье с независимой реализацией звеньев и косинусного. На рис. 5 дана модификация этой структуры для вещественного базиса фурье с попарной реализацией «синусных» и «косинусных» звеньев. На этих рисунках

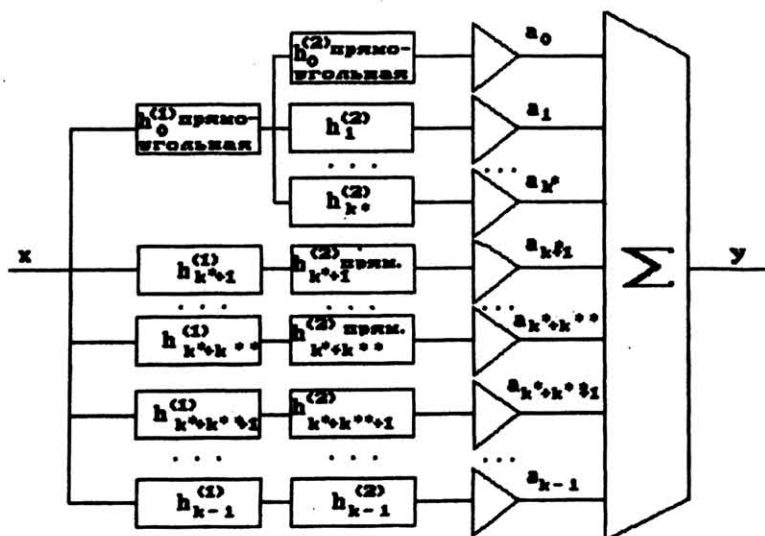


Рис. 4.

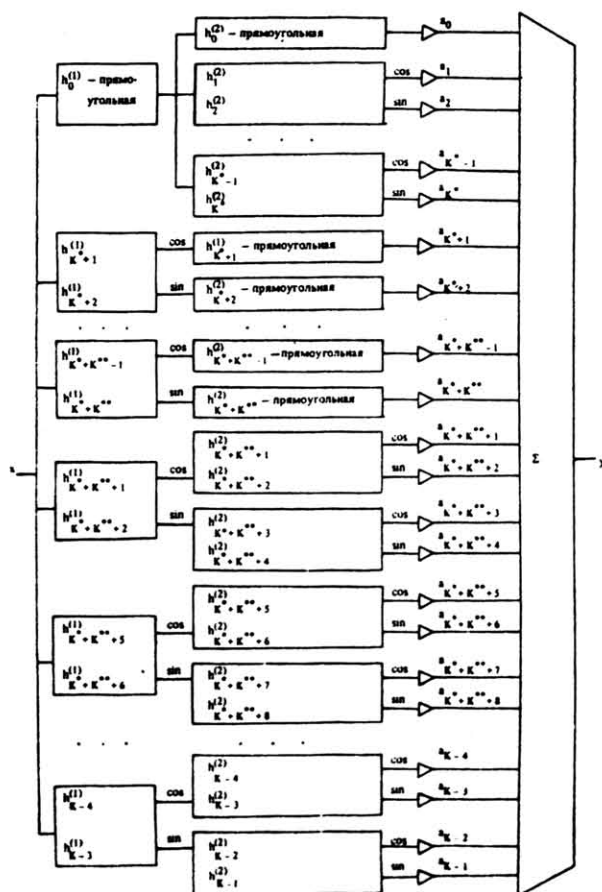


Рис. 5.

все функции пронумерованы в удобном для изображения порядке, здесь и далее K^* - число используемых двумерных базисных функций с нулевым индексом по первой координате, K^{**} - то же по второй координате ($K^* \geq 0$, $K^{**} \geq 0$, $K^* + K^{**} < K$).

В таблице представлены результаты оценки сложности параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров в зависимости от количества параллельных звеньев. Для базиса ДЭФ при подсчете числа операций коэффициенты фильтра считались комплексными (для других базисов - вещественными), одно комплексное сложение по сложности вычислений приравнивалось к двум вещественным, а одно комплексное умножение - к двум вещественным сложениям и четырем вещественным умножениям. При применении этого базиса для вещественного сигнала учитывались затраты на вычисление только вещественной части выходной последовательности. Для базисов Фурье и косинусного не учитывалось незначительное (на одну - три операции сложения) упрощение фильтра в некоторых частных случаях: при использовании только четных одномерных базисных функций, только «полупрямоугольных» двумерных и т. п.

Число операций на отсчет при реализации параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров

Базис разложения импульсной характеристики		Одномерные фильтры		Двумерные фильтры	
		сложений	умножений	сложений	умножений
Прямоугольный		$3K - 1$	K	$5K - 1$	K
ДЭФ	для комплексных сигналов	$10K - 4$	$8K - 4$	$16K - 6K^* - 2K^{**} - 6$	$12K - 4K^* - 4K^{**} - 8$
	для вещественных сигналов	$6K - 4$	$6K - 5$	$12K - 6K^* - 2K^{**} - 8$	$10K - 4K^* - 4K^{**} - 9$
Вещественный Фурье	с независимой реализацией звеньев	$3K + 1$	$2K - 1$	$7K - 4K^* - 2K^{**} + 1$	$3K - K^* - K^{**} - 2$
	с попарной реализацией звеньев	$3K - 1$	$\frac{3K - 1}{2}$	$\frac{9K - 3K^* + K^{**} - 1}{2}$	$\frac{7K - K^* - K^{**} - 3}{4}$
Косинусный		$3K + 2$	$2K - 1$	$7K - 4K^* - 2K^{**} + 3$	$3K - K^* - K^{**} - 2$

Анализ представленных в таблице соотношений показывает, что при равном числе параллельных звеньев фильтра построения на основе вещественного базиса Фурье (в варианте с независимой реализацией звеньев) и косинусного базиса примерно равны по сложности. Попарная реализация звеньев фильтра при вещественном базисе Фурье позволяет снизить объем вычислений до уровня, близкого к простейшему прямоугольному базису. Фильтр с базисом ДЭФ требует повышенного числа операций в пересчете на одно звено, его применение для вещественных сигналов в общем случае нецелесообразно. Окончательный вывод о необходимости использования того или иного базиса можно сделать, сопоставив сложность фильтров не при равном числе параллельных звеньев, а при равном качестве обработки сигнала. Такого рода исследованию посвящена работа [6].

В заключение отметим, что сложность параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров определяется числом параллельных звеньев и не зависит от размеров окна обработки сигнала (для сравнения, КИХ-фильтр в форме прямой

свертки с окном обработки из N отсчетов требует выполнения $(N-1)$ сложений и N умножений на каждый отсчет обрабатываемого сигнала, т. е. здесь имеет место линейная зависимость сложности от размеров окна). Можно ожидать, что выигрыш от применения предлагаемого класса фильтров будет расти с увеличением окна обработки и окажется наиболее значительным в случае многомерных сигналов (изображений).

Литература

1. *Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.* Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979. - 416 с.
2. *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. - 488 с.
3. *Вайрадян А. С., Пчелинцев У. П., Чельшев М. М.* Алгоритмы вычисления цифровых сверток. Зарубежная радиоэлектроника, 1982, N 3, с. 3-34.
4. *Ярославский Л. П.* О возможности параллельной рекурсивной организации цифровых фильтров. Радиотехника, 1984, N3, с. 87-91.
5. *Ярославский Л. П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: введение в цифровую оптику. М.: Радио и связь, 1987. - 296 с.
6. *Мурызин С. А., Сергеев В. В., Фролова Л. Г.* Исследование эффективности двумерных параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров. - В наст. сборнике.
7. *Оботнин А. Н., Страшинин Е. Э.* Алгоритмы определения скользящего спектра. Автометрия, 1975, N 1, с. 30-36.
8. *Зеленков А. В.* Алгоритмы дискретного косинусного преобразования для спектрального анализа на скользящем интервале. Автометрия, 1982, N 6, с. 34-42.
9. *Виткус Р. Ю., Ярославский Л. П.* Адаптивные линейные фильтры для обработки изображений. В кн.: Адаптивные методы обработки изображений. М.: Наука, 1988, с. 6-34.
10. *Сергеев В. В., Фролова Л. Г.* Расчет параллельных КИХ-фильтров для некоторых задач обработки сигналов и изображений. - В наст. сборнике.
11. *Овчинников К. В., Сергеев В. В.* Аппаратная реализация двумерного параллельно-рекурсивного КИХ-фильтра. - В наст. сборнике.
12. *Ахмед Н. Д., Рао К. Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980. - 248 с.