

## **ФОРМИРОВАНИЕ МОД ГАУССА-ЭРМИТА С ПОМОЩЬЮ БИНАРНЫХ ДОЭ**

### **I. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

*С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер*  
*Институт систем обработки изображений РАН*  
*М. Хонканен, Я. Турунен*  
*Университет Йюенсуу, Финляндия*

#### **1. Введение**

В [1,2] показано теоретически, что для эффективного формирования одномерных мод Гаусса-Эрмита (ГЭ) можно использовать фазовые бинарные ДОЭ, которые получаются с помощью знаковой функции от соответствующего многочлена Эрмита. При освещении такого ДОЭ плоским пучком света с оптимально подобранной апертурой в дальней зоне дифракции формируется с эффективностью более 80% требуемая мода.

В [3] для формирования лазерной моды ГЭ (1,0) был изготовлен и исследован экспериментально фазовый 16-ти уровневый ДОЭ. Он был изготовлен по технологии электронной литографии с помощью травления полиметилметакрилата, нанесенного на подложку из кварцевого стекла. Этот элемент был рассчитан с помощью итеративной процедуры, предложенной в [4]. Размерность массива была равна  $2048 \times 2048$  отсчетов. Теоретическая эффективность равнялась 45.5%, а экспериментально измеренная - 37.7%.

В данной работе приведены результаты по безитерационному расчету и исследованию двухуровневых (бинарных) ДОО, формирующих моды ГЭ с номерами (1,0), (1,1) и (1,2) с теоретической эффективностью около 70%. Кроме того, результаты работ [1,2] обобщаются на двумерный случай формирования мод ГЭ.

С помощью технологии электронной литографии получены несколько фазовых бинарных ДОО, согласованных с модами ГЭ и проведена экспериментальная апробация их работоспособности.

## 2. Расчетные формулы

Для эффективного формирования отдельных мод ГЭ предлагается использовать фазовый элемент с функцией пропускания:

$$\tau_{mn}(x, y) = \operatorname{sgn} H_m(x) \times \operatorname{sgn} H_n(y) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{a}\right), \quad (1)$$

где  $H_m(x), H_n(y)$  - многочлены Эрмита  $m$ -го и  $n$ -го

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

В [1] на основе разложения в ряд одномерной знаковой функции из уравнения (1)

$$\operatorname{sgn} H_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(n)} H_p(x), \quad (2)$$

где

$$C_p^{(n)} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}[H_n(x)] \times \exp(-x^2) H_p(x) dx \quad (3)$$

получены выражения в виде конечных сумм для коэффициентов  $C_p^{(n)}$ , например, при  $p=2s$ :

$$C_{2s}^{(2l)} = \frac{1}{2^{2s-1} (2s)! \sqrt{\pi}} (-1)^l \times \sum_{k=1}^l (-1)^k \exp(-x_k^2) H_{2s-1}(x_k) \quad (4)$$

где  $x_k$  - нули многочлена:  $H_{2l+1}(x_k) = 0$ .

С помощью уравнения (4) можно получить конкретные значения коэффициентов для разложения в ряд (2) для каждой моды ГЭ.

Например, для моды ГЭ (1,1)

$$\operatorname{sgn} H_{11}(x, y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$$

используя представление:

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1)!} H_{2n+1}(x) \quad (5)$$

можно записать:

$$\operatorname{sgn} H_{11}(x, y) = \frac{1}{\pi} \times \left( H_1(x) - \frac{1}{12} H_3(x) + \frac{1}{160} H_5(x) - \dots \right) \times \left( H_1(y) - \frac{1}{12} H_3(y) + \frac{1}{160} H_5(y) - \dots \right) \quad (6)$$

Из уравнения (5) получается, что с эффективностью около 86% бинарный ДОО с пропусканием  $\operatorname{sgn} H_1(x)$  сформирует моду ГЭ, пропорциональную многочлену  $H_1(x)$ .

Для двумерных ДОО с пропусканием (1) эффективность, очевидно, можно оценить как произведение одномерных эффективностей:  $0.86 \times 0.86 \times 100\% = 73.96\%$ . Эта оценка подтверждается на основании результатов моделирования.

В Таблице 1 приведены значения среднеквадратичного отклонения  $\delta$  и эффективности  $\eta$ , рассчитанных по следующим формулам:

$$\delta = \frac{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \left\{ |\Im[\tau(x, y)]|^2 - |\Psi_{mn}(x, y)|^2 \right\} dx dy}{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \left\{ |\Psi_{mn}(x, y)|^2 \right\} dx dy}, \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\left| \int_{-b}^b \int_{-b}^b \Im[\tau(x, y)] \Psi_{mn}^*(x, y) dx dy \right|^2}{\int_{-b}^b \int_{-b}^b |\Im[\tau(x, y)]|^2 dx dy \int_{-b}^b \int_{-b}^b |\Psi_{mn}(x, y)|^2 dx dy}, \quad (8)$$

где

$$\Psi_{mn}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) H_m(x) H_n(y). \quad (9)$$

Таблица 1.

Рассчитанные средние ошибки и эффективность при формировании мод ГЭ с помощью бинарных знаковых ДОО с квадратной апертурой оптимального размера

ТЕМ(m,n)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(7,0)
$\delta$ , %	28.8	14.4	30.6	62.4
$\eta$ , %	63.8	72.3	68.5	33.5

Область интегрирования  $[-b, b] \times [-b, b]$  в уравнениях (7) и (8) выбиралась из условия, что  $|\Psi_{mn}(x, y)|^2 \leq 10^{-4}$ . В уравнениях (7) и (8) использовано обозначение преобразования Фурье от функции пропускания ДОО:

$$\Im[\tau(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x, y) \times \exp\left[-\frac{ik}{f}(ux + vy)\right] dx dy \quad (10)$$

Однако, на практике часто используют не квадратную, а круглую диафрагму, в этом случае мы получим результат немного лучше или хуже, но примерно такой же (см. Таблицу 2)

**Таблица 2. Рассчитанные средние ошибки и эффективность при формировании мод ГЭ с помощью бинарных знаковых ДОЭ с круглой апертурой оптимального размера**

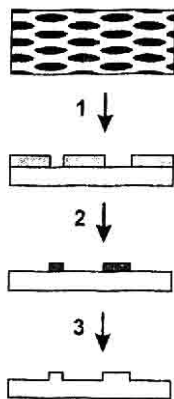
ТЕМ( <i>m,n</i> )	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(7,0)
$\delta, \%$	26.9	15.6	31.8	66.9
$\eta, \%$	70.1	69.5	65.4	40.7

### 3. Изготовление ДОЭ

Бинарные фазовые ДОЭ, функция пропускания которых удовлетворяет уравнению (1), были изготовлены с помощью низковольтного электронного генератора изображений Leica LION LV1 в Университете Йосенсуу (Финляндия). Предельное разрешение этого электронного литографа около 0.04 микрона.

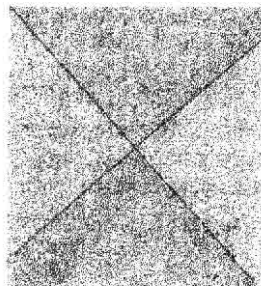
Амплитудная бинарная маска была рассчитана с размерами 1 мм × 1 мм (1000 × 1000 отсчетов) с дискретностью 1 микрон. Высота бинарного рельефа формировалась для длины волны  $\lambda = 0.633$  микрона.

Этапы изготовления бинарного профиля показаны на рис.1. С помощью электронного луча в слое полиметилметакрилата (ПММА), толщиной 0.18 микрон, который был осажден на подложке из расплавленного оксида кремния SiO<sub>2</sub>, рисовалось изображение в соответствии с рассчитанной маской (этап 1 на рис.1). После проявления слой хрома толщиной 0.05 микрон осаждался в вакууме на поверхность структуры с бинарным изображением. Затем использовались процедуры вымывания для удаления оставшегося резиста ПММА вместе со слоем хрома из областей не подвергшихся экспонированию (этап 2 на рис. 1). И наконец с помощью реактивного ионного травления, при котором слой хрома выступал в качестве защитной маски, в расплавленном оксиде кремния создавался требуемый бинарный профиль (этап 3 на рис. 1). Так как показатель преломления SiO<sub>2</sub> равен 1.46, то высота ступеньки бинарного профиля формировалась равной 0.675 микрон.



**Рис.1. Этапы изготовления бинарного рельефа ДОЭ:**  
 1) экспонирование резиста электронным пучком;  
 2) осаждение хрома и вымывание резиста;  
 3) реактивное ионное травление

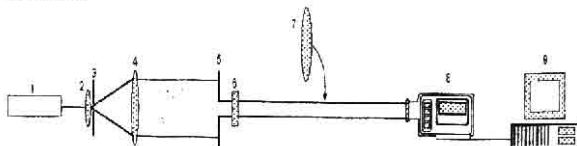
На рис. 2 показан увеличенный под микроскопом участок получившегося фазового бинарного ДОЭ.



**Рис. 2. Вид участка фазового бинарного ДОЭ под микроскопом.**

### 4. Эксперимент

Изготовленные по литографической технологии бинарные фазовые ДОЭ исследовались на установке, оптическая схема которой показана на рис. 3. Луч света от He-Ne лазера малой мощности расширялся микрообъективом и фильтровался с помощью малой круглой диафрагмы. После коллимирования расходящегося пучка он ограничивался другой круглой диафрагмой радиусом примерно 1.1-1.2 мм. Ограниченный по радиусу плоский пучок попадал затем на бинарный ДОЭ. Дифракция света на ДОЭ в ближней зоне Френеля исследовалась с помощью регистрации распределения интенсивности света ПЗС-камерой. Приемное окно камеры имело размеры 6.6 мм × 4.78 мм, число фотоячеек равно 768 × 567. Зарегистрированные картины дифракции запоминались в компьютере. Для исследования дифракции Фраунгофера на ДОЭ в пространство за элементом вводилась линза с фокусным расстоянием 500 мм.



**Рис. 3. Экспериментальная установка: He-Ne лазер (1), микрообъектив (2), фильтрующая диафрагма (3), коллимирующая линза (4), ограничивающая диафрагма (5), бинарный ДОЭ (6), добавочная линза для выполнения Фурье-преобразования (7), ПЗС-камера (8), компьютер (9)**

На рис. 4-7 показаны результаты исследования для мод ГЭ с номерами (1,0), (1,1), (1,2) и (7,0), соответственно. На рис. 4а-7а показаны амплитудные бинарные фотошаблоны ДОЭ, ограниченные круглыми апертурами освещающего пучка с диаметром 1.2 мм. Фотошаблоны рассчитывались в соответствии с формулой (1). Однако, апертура была круглой и немного больше оптимального размера, что ухудшило результаты (в основном эффективность), которые могли быть получены в оптимальном случае (см. Таблицу 3).

На рис. 4б-7б показаны рассчитанные по формуле (9) картины дифракции Фраунгофера на соответствующих фазовых бинарных ДОЭ.

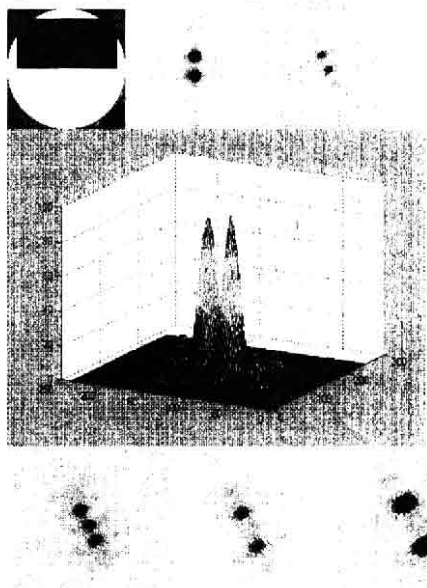


Рис. 4. Результаты моделирования и эксперимента для моды ГЭ (1,0): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 370 мм (д), 480 мм (е) и 620 мм (ж) от ДОЭ

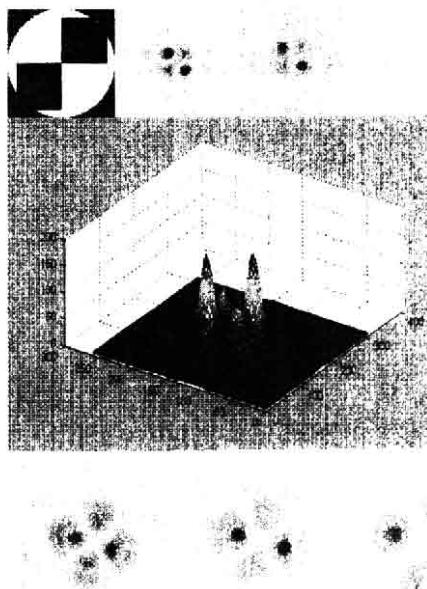


Рис. 5. Результаты моделирования и эксперимента для моды ГЭ (1,1): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 340 мм (д), 455 мм (е) и 640 мм (ж) от ДОЭ

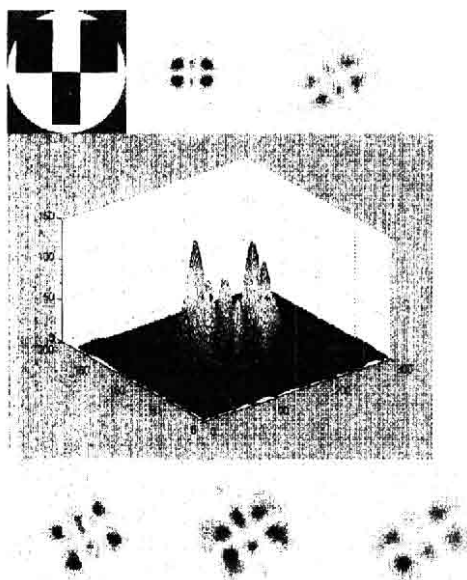


Рис. 6. Результаты моделирования и эксперимента для моды ГЭ (1,2): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 260 мм (д), 400 мм (е) и 580 мм (ж) от ДОЭ

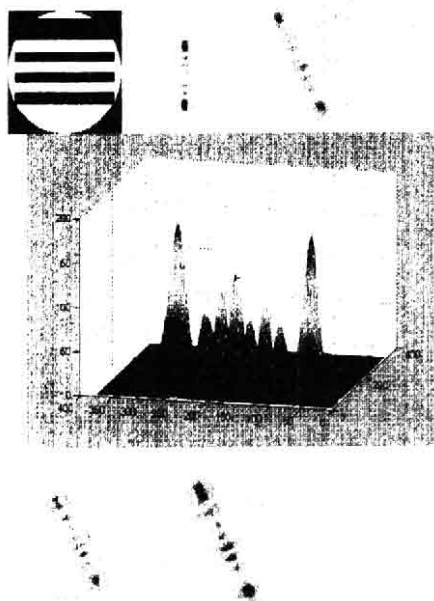


Рис. 7. Результаты моделирования и эксперимента для моды ГЭ (7,0): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 360 мм (д) и 470 мм (е) от ДОЭ.

На рис. 4в-7в показаны экспериментальные картины дифракции Фраунгофера (дальняя зона), которые были зарегистрированы в задней фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием 500

мм, дополнительно введенной в оптическую схему (рис. 3, позиция 3). На рис. 4г-7г показаны трехмерные представления экспериментальных картин дифракции Фраунгофера (рис. 4в-7в). Сравнивая рис. 4б-7б и рис. 4в-7в, можно убедиться, что имеет место хорошее согласование теории и эксперимента.

На рис. 4д,е,ж-7д,е,ж показаны экспериментальные картины дифракции Френеля (ближняя зона) на разных расстояниях от ДОО. Из этих рисунков видно, что при распространении лазерный пучок проявляет модовые свойства - сохраняет свою структуру.

**Таблица 3.**

*Рассчитанные средние ошибки и эффективность при формировании мод ГЭ с помощью бинарных знаковых ДОО с круглой апертурой немного больше оптимального размера*

ТЕМ( <i>m,n</i> )	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(7,0)
$\delta, \%$	24.7	42.7	31.5	64.2
$\eta, \%$	55.6	62.2	59.4	31.7

### 5. Заключение

В работе получены следующие результаты:

- по технологии электронной литографии получены на кварцевом стекле бинарные ДОО для эффективного формирования отдельных мод Гаусса-Эрмита (1,0), (1,1), (1,2) и (7,0); функция пропускания таких ДОО равна знаковой функции от многочленов Эрмита;

- численное моделирование показало, что бинарные знаковые ДОО формируют первые моды ГЭ с эффективностью 64-72%;
- натурные эксперименты демонстрируют удовлетворительную работоспособность таких ДОО и согласие с теорией.

### Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 96-15-96026, 98-01-00894).

### Литература

1. Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A. "Generalized Hermite beams in free space", *Optik*, 1998, v.108, No.1, p.20-26.
2. Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н., "Обобщенные эрмитовы световые пучки в свободном пространстве", *Компьютерная оптика, СГАУ, Самара*, 1997, вып.17, с.31-36.
3. Duparre M., Pavelyev V., Luedge B., Kley B., Kowarschik R., Soifer V. "Forming of selected unimodal complex amplitude distributions by means of novel DOEs of MODAN-type", *Proceedings of SPIE*, 1997, v.3134, p.357-368.
4. Голуб М.А., Павельев В.С., Сойфер В.А. "Построение итеративного алгоритма расчета фазовых ДОО, формирующих заданное одномодовое распределение на основе метода обобщенных проекций", *Компьютерная оптика, М., МЦНТИ*, 1995, вып.14-15, часть 2, с.85-Формирование мод Гаусса-Эрмита с помощью бинарных ДОО.