

II. ОПТИМИЗАЦИЯ АПЕРТУРНОЙ ФУНКЦИИ

С.Н. Хонина

Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

Рассмотрены различные типы апертур и освещающих пучков при эффективном формировании отдельных мод Гаусса-Эрмита с использованием фазовых бинарных элементов, пропускание которых равно знаковой функции соответствующего многочлена Эрмита. Показано, что введение в дифракционный оптический элемент дополнительных фазовых скачков позволяет частично компенсировать неточную подгонку апертуры или ее отсутствие. Такое введение дополнительных фазовых скачков можно назвать "мягкой" апертурой.

Введение

Интерес к эрмитовым пучкам или, точнее, модам Гаусса-Эрмита [1,2], обусловлен тем, что в свободном пространстве они распространяются без изменения своей структуры, изменяясь только масштабно, а в световых волокнах с параболическим профилем показателя преломления они распространяются и без изменения масштаба.

Для того, чтобы сформировать в пространстве такие световые пучки, следует синтезировать на компьютере и изготовить по технологии микролитографии специальные дифракционные оптические элементы (ДОЭ). Имеется ряд работ [3-6], посвященных расчету таких фазовых оптических элементов. В [3] они названы модами.

В [4,6] для расчета оптического элемента, генерирующего одномодовый пучок, используется итеративная процедура и вводится в рассмотрение вспомогательная область. В [5] расчет ведется на основе итеративной аппроксимации функции пропускания транспаранта конечной суммой ортогональных мод.

А в [7] показано, что с энергетической точки зрения оптимальным дифракционным элементом, формирующим однородный эрмитовый пучок является транспарант, функция пропускания которого равна знаковой функции соответствующего многочлена Эрмита. Такой транспарант предлагалось освещать либо гауссовым пучком, либо плоским, ограниченным диафрагмой определенного размера. Аналогичные результаты получены для мод Гаусса-Лагерра [8].

В данной работе проведено численное исследование влияния апертурной функции на формируемый пучок и предложено введение "мягкой" апертуры, представляющей собой дополнительные фазовые скачки на самом ДОЭ. Показано, что такое дополнение позволяет частично компенсировать неточную подгонку апертуры или ее отсутствие.

1. Апертурная функция

Для энергетически эффективного формирования мод Гаусса-Эрмита:

$$H_{mn}(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) H_m\left(\frac{y}{\sigma}\right) \quad (1)$$

где $H_n(x)$ - многочлен Эрмита, σ - параметр, характеризующий эффективную ширину модовой функции (1), в работе [6] было предложено использовать бинарный фазовый оптический элемент с функцией пропускания:

$$\begin{aligned} \tau_{mn}(x, y) &= \text{sgn}[H_n(x)H_m(y)] = \\ &= \text{sgn} H_n(x) \text{sgn} H_m(y) \end{aligned} \quad (2)$$

где $\text{sgn}(x)$ - знаковая функция.

Такой элемент предлагалось освещать либо гауссовым пучком, либо плоским, ограниченным диафрагмой определенного размера. Причем оптимальные размеры диафрагмы были найдены и выписаны для 7-ми первых одномерных мод Гаусса-Эрмита.

Понятно, что на практике достаточно сложно соблюсти точность в подборе диафрагмы, поэтому целью данной работы является исследование влияния апертурной функции на формируемый пучок.

Представим поле во входной плоскости ($z=0$) следующим образом:

$$f_{mn}(x, y) = P(a, b, x, y) \tau_{mn}(x, y), \quad (3)$$

где $P(a, b, x, y)$ - апертурная функция, $\tau_{mn}(x) = \exp\{i \arg[H_{mn}(x)]\}$ - фазовый бинарный элемент.

В данной работе будем рассматривать три типа апертурной функции, наиболее часто используемые на практике:

$$\begin{aligned} G(a, b, x, y) &: \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{b^2}\right) \\ R(a, b, x, y) &: \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \\ E(a, b, x, y) &: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

где G, R, E - гауссова, прямоугольная и эллиптическая апертурные функции, соответственно,

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Ясно, что введение диафрагмы (непрозрачного экрана с отверстием заданной формы) требуют только два последних типа апертурных

функций. В этом смысле гауссовый освещающий пучок является предпочтительным на практике.

Таким образом, сформировать поле (3) можно установив во входной плоскости фазовый бинарный ДОЭ и осветив его гауссовым пучком или плоским, ограниченным диафрагмой. Тогда, в дальней зоне (зоне дифракции Фраунгофера) или в фокальной плоскости линзы, сформируется поле близкое к заданной моде Гаусса-Эрмита:

$$F_{mn}(u, v) = \mathfrak{F}\{f_{mn}(x, y)\} \approx H_{mn}(u, v), \quad (5)$$

где $\mathfrak{F}\{\dots\}$ - знак преобразования Фурье.

Понятно, что качество формируемого пучка будет сильно зависеть от параметров a и b апертурной функции $P(a, b, x, y)$. В случае плоского освещающего пучка это означает необходимость точного изготовления диафрагмы. Для ослабления жесткой зависимости от формы и размеров диафрагмы, предлагается ввести "мягкую" диафрагму, представляющую собой дополнительные скачки фазы на оптическом элементе приблизительно там, где должна проходить граница диафрагмы.

Тогда входная функция (3) будет иметь следующий вид:

$$\hat{f}_{mn}(x, y) = P(a, b, x, y) \hat{\tau}_{mn}(c, d, x, y), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \hat{\tau}_{mn}(c, d, x, y) &= \begin{cases} \tau_{mn}(x, y), & |x| \leq c, |y| \leq d \\ -\tau_{mn}(x, y), & |x| > c, |y| > d \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \tau_{mn}(x, y), & |x| \leq c, |y| \leq d \\ \exp(i\pi) \tau_{mn}(x, y), & |x| > c, |y| > d \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Для оценки качества формируемых пучков будем использовать среднеквадратичное отклонение по интервалу $[-R_u, R_u] \times [-R_v, R_v]$:

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_{-R_u}^{R_u} \int_{-R_v}^{R_v} \left(\left| \mathfrak{F}\{\hat{f}_{mn}(x, y)\} \right|^2 - |H_{mn}(u, v)|^2 \right) du dv}{\int_{-R_u}^{R_u} \int_{-R_v}^{R_v} |H_{mn}(u, v)|^2 du dv}} \quad (8)$$

и нормированный интеграл перекрытия:

$$\eta = \frac{\left| \int_{-R_u}^{R_u} \int_{-R_v}^{R_v} \mathfrak{F}\{\hat{f}_{mn}(x, y)\} H_{mn}^*(u, v) du dv \right|^2}{\int_{-R_u}^{R_u} \int_{-R_v}^{R_v} \left| \mathfrak{F}\{\hat{f}_{mn}(x, y)\} \right|^2 du dv \int_{-R_u}^{R_u} \int_{-R_v}^{R_v} |H_{mn}(u, v)|^2 du dv} \quad (9)$$

2. Численные результаты для одномерного случая

При численном моделировании использовались следующие параметры: размерность массивов $N=1024$, область изменения аргумента $x \in [-8, 8]$ мм, длина волны $\lambda=0.63$ мкм, фокусное расстояние $f=100$ мм, эффективный радиус мод $\sigma=1$ мм. Среднеквадратичное отклонение и интеграл перекрытия рассчитывались на интервале $u \in [-R_u, R_u]$, где $|H_n(R_u)|^2 = 0.005$.

На рис. 1а слева показана входная функция (3)

$$f_1(x) = R(a, x)\tau_1(x), \quad (10)$$

а справа - интенсивность поля в фокальной плоскости $\mathfrak{Z}\{R(a, x)\tau_1(x)\}$. При $a=2.23$ мм было достигнуто минимальное значение среднеквадратичного отклонения $\delta=0.067$, $\eta=0.850$, а при $a=2.16$ мм было достигнуто максимальное значение интеграла перекрытия $\eta=0.852$, $\delta=0.088$ при одновременном увеличении отклонения. Таким образом, оптимумы по отклонению и эффективности не всегда совпадают. В таблице 1 приведены параметры диафрагмы, обеспечивающие два вида этих оптимумов для первых 8-ми одномерных мод Гаусса-Эрмита (* - минимальное δ , ** - максимальное η).

Таблица 1.
Оптимальные характеристики для

$$f_n(x) = R(a, x)\tau_n(x)$$

n	a, мм	δ , %	η , %
1	2.23 *	6.7	85.0 - рис. 1а
	2.16 **	8.8	85.2
2	2.65 *(**)	10.8	83.7
3	3.07 *(**)	13.1	83.1
4	3.65 *	17.3	82.2
	3.40 **	19.0	82.4
5	3.65 *	19.0	81.7
	3.72 **	19.1	81.9
6	4.00 *(**)	20.5	81.5
7	4.25 *(**)	22.9	81.2
8	4.45 *	25.1	80.7
	4.50 **	25.5	80.9

Из таблицы 1 видно, что качественные характеристики ухудшаются с ростом номера моды Гаусса-Эрмита. Также можно заметить, что параметр эффективности η менее чувствителен к изменению размера диафрагмы, чем отклонение δ . Поэтому будем в дальнейшем искать оптимум по минимизации отклонения δ .

На рис. 1б показан результат неточного подбора размера диафрагмы. В частности, для (10) было взято $a=2.5$ мм, немного превышающее оптимальный размер, что привело к увеличению ошибки почти в 3 раза $\delta=0.204$ и уменьшению эффективности $\eta=0.824$.

Однако, введение дополнительного фазового скачка в оптическом элементе (6-7) позволило сократить отклонение почти до первоначального. На рис. 1в слева показана входная функция:

$$\hat{f}_1(x) = R(a, x)\hat{\tau}_1(c, x), \quad (11)$$

а справа - интенсивность поля в фокальной плоскости $\mathfrak{Z}\{R(a, x)\hat{\tau}_1(c, x)\}$. При $a=2.5$ мм и $c=2.37$ мм были получены $\delta=0.076$ и $\eta=0.772$. Таким образом, ошибка была значительно уменьшена за счет гораздо менее значительного ухудшения параметра эффективности. Этот результат аналогичен получен-

ному в [4,6], где очень точное формирование моды достигается за счет отброса значительной части (около половины) энергии во вспомогательную область, что существенно снижает эффективность.

Из предыдущих результатов ясно, что было бы желательно вообще обойтись без диафрагмы. Это возможно при освещении элемента гауссовым пучком.

На рис. 1г слева приведена входная функция

$$f_1(x) = G(a, x)\tau_1(x), \quad (12)$$

а справа - интенсивность поля в фокальной плоскости $\mathfrak{Z}\{G(a, x)\tau_1(x)\}$. При $a=2.0$ мм было достигнуто минимальное значение среднеквадратичного отклонения $\delta=0.203$, $\eta=0.758$, а при $a=2.7$ мм было достигнуто максимальное значение интеграла перекрытия $\eta=0.844$, $\delta=0.426$ при одновременном увеличении отклонения.

Видно, что результаты существенно хуже, чем в предыдущем случае. Однако введение "мягкой" апертуры позволило улучшить эти характеристики.

На рис. 1д слева приведена входная функция

$$\hat{f}_1(x) = G(a, x)\hat{\tau}_1(c, x), \quad (13)$$

а справа - интенсивность поля в фокальной плоскости $\mathfrak{Z}\{G(a, x)\hat{\tau}_1(c, x)\}$.

В таблице 2 приведены координаты c дополнительных скачков фазы на элементе $\hat{\tau}_1(c, x)$ минимизирующие отклонение δ для ряда заданных значений гауссового параметра a (* - наилучшая пара по δ , ** - наилучшая пара по η).

Таблица 2.
Оптимальные характеристики для

$$\hat{f}_1(x) = G(a, x)\hat{\tau}_1(c, x)$$

a, мм	c, мм	δ , %	η , %
2.0 *	нет	20.3	75.8 рис. 1г.
2.7 **	нет	42.6	84.4
2.0	3.36	13.4	75.8 рис. 1д.
2.05*	3.23*	12.5	77.1
2.1	3.15	12.6	78.3
2.2	3.1	13.9	80.4
2.3	3.07	16.3	81.9
2.4	3.0	18.9	83.3
2.5	3.0	21.5	83.8
2.6	3.0	24.0	84.3
2.7 **	2.85**	26.4	84.4
2.8	2.8	28.4	84.3

Из таблицы 2 видно, что введение "мягкой" апертуры при освещении гауссовым пучком существенно (почти в 2 раза) улучшает параметр среднеквадратичного отклонения δ при одновременном не ухудшении, а иногда и улучшении показателя эффективности. Таким образом именно в этом случае наиболее целесообразно вводить "мягкую" апертуру.

На рис. 2 приведены аналогичные результаты с различными апертурными функциями для моды Гаусса-Эрмита $H_2(x)$ ($n=2$). В таблице 3 представлены полученные результаты.

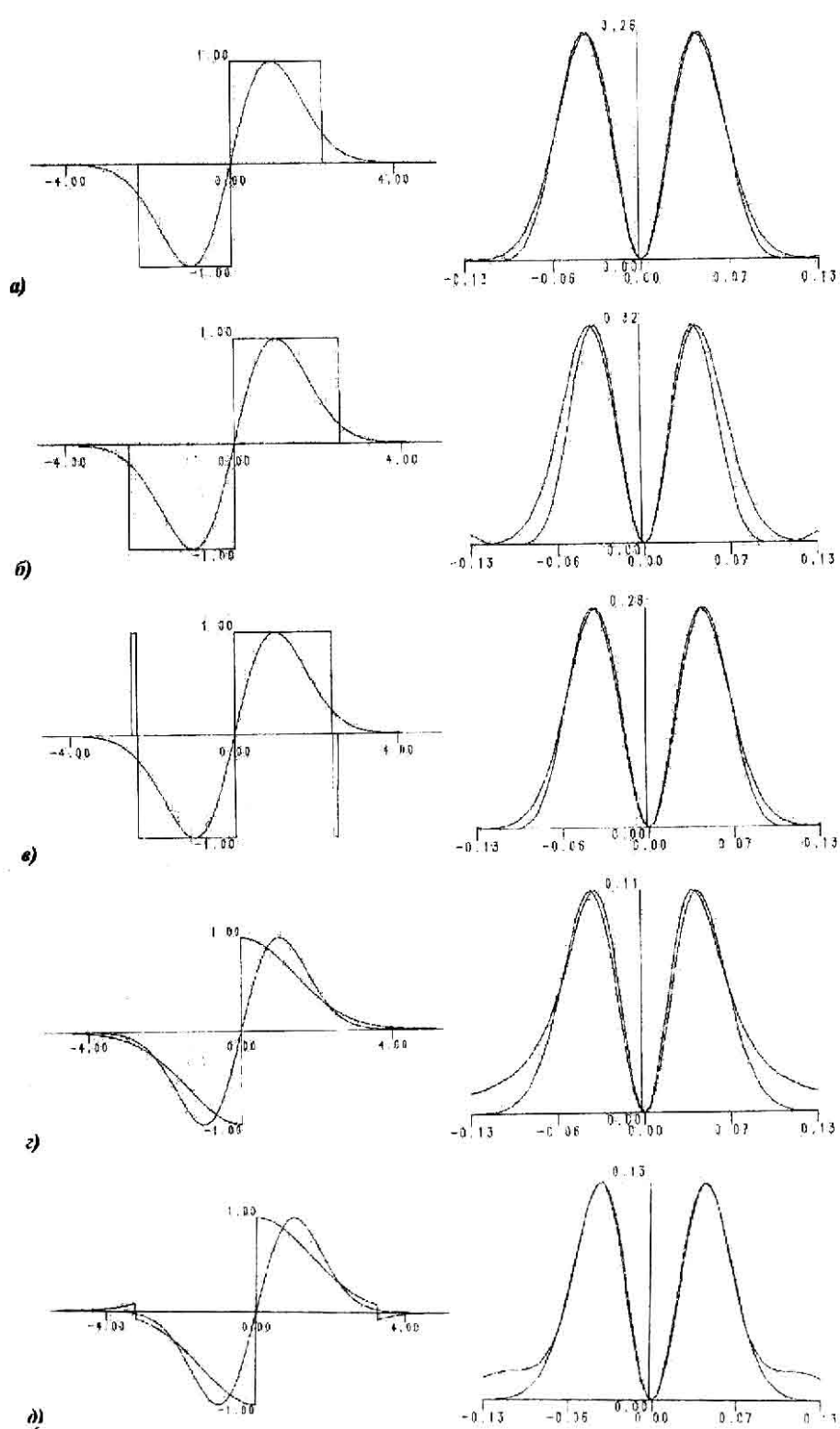
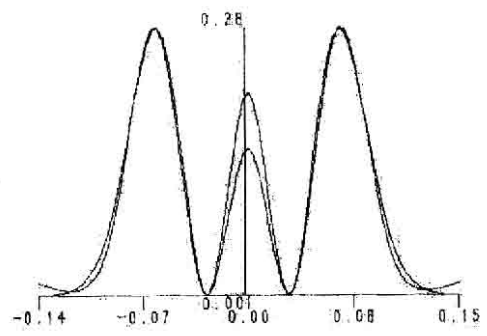
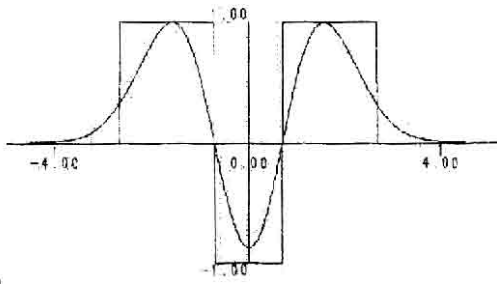
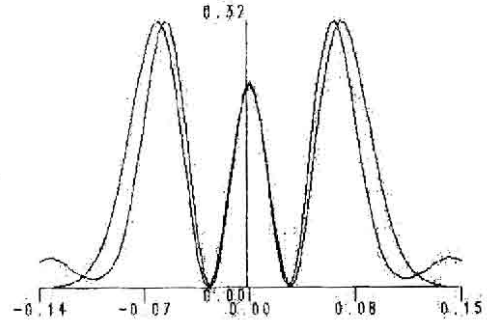
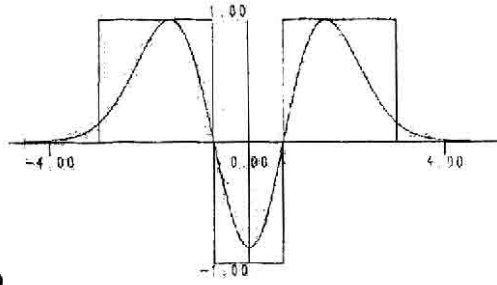


Рис. 1. Результаты моделирования в одномерном случае для моды $n=1$: а) знаковый элемент с прямоугольной оптимальной апертурой (слева) и сформированное распределение интенсивности в дальней зоне (справа); б) знаковый элемент с прямоугольной апертурой больше оптимального размера (слева) и сформированное распределение интенсивности в дальней зоне (справа); в) знаковый элемент с дополнительными фазовыми скачками с прямоугольной апертурой больше оптимального размера (слева) и сформированное распределение интенсивности в дальней зоне (справа); г) знаковый элемент с оптимальной гауссовой апертурой (слева) и сформированное распределение интенсивности в дальней зоне (справа); д) знаковый элемент с дополнительными фазовыми скачками с оптимальной гауссовой апертурой (слева) и сформированное распределение интенсивности в дальней зоне (справа)

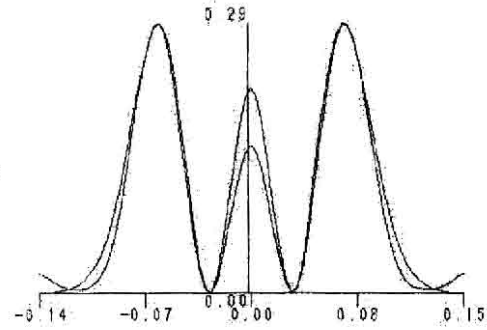
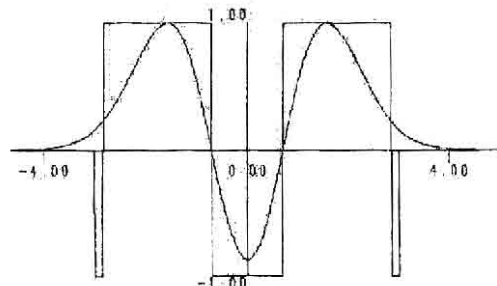
a)



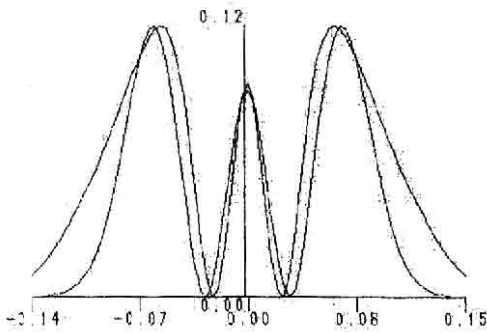
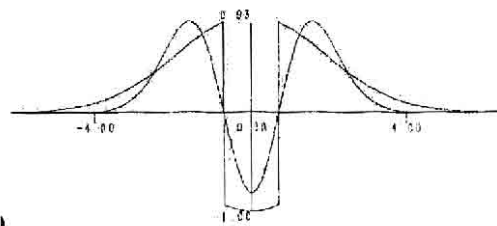
b)



c)



d)



e)

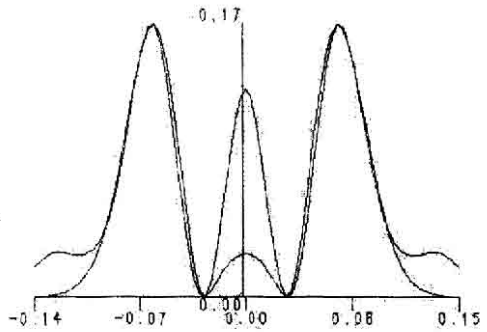
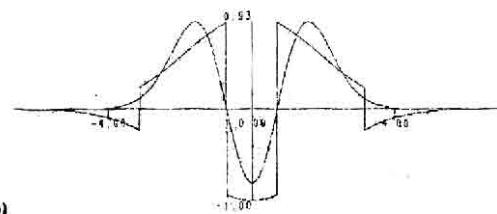


Рис. 2. Результаты моделирования в одномерном случае для моды $n=2$

Из таблицы 3 видно, что в этом случае улучшение результатов не такое сильное, как в предыдущем случае. Это происходит из-за наличия в моде центрального максимума, как видно на рис. 2а, в, д.

Можно сделать общий вывод, что ухудшение качества при росте номера моды n происходит именно в центральной части. Крайние пики, как правило, воспроизводятся лучше.

Таблица 3.

Оптимальные характеристики для $\hat{f}_2(x) = P(a, x)\hat{e}_2(c, x)$

Апертурная функция	a, мм	c, мм	δ , %	η , %	Рисунок
R(a, x)	2.65 * (**)	нет	10.8	83.7	2а
	3.0	нет	29.1	81.3	2б
	3.0	2.85	13.7	76.0	2в
G(a, x)	2.65 *	нет	45.0	75.5	2г
	3.30 **	нет	45.9	80.2	
	2.55	3.17	29.3	73.4	
	2.60 *	3.12 *	29.2	74.4	• 2д
	2.65	3.10	29.3	75.5	
	2.70	3.07	29.5	76.3	
	2.80	3.02	30.1	77.6	
	3.00 **	2.97 **	31.8	79.0	
	3.30	2.89	34.3	75.3	

3. Численные результаты для двумерного случая

При численном моделировании использовались следующие параметры: размерность массивов $N \times N = 256 \times 256$, область изменения аргументов $x \in [-7, 7]$ мм, $y \in [-7, 7]$ мм длина волны $\lambda = 0.63$ мкм, фокусное расстояние $f = 100$ мм, эффективный радиус мод $\sigma = 1$ мм. Среднеквадратичное отклонение и интеграл перекрытия рассчитывались на интервале $[-R_u, R_u] \times [-R_v, R_v]$, где $|\int H_{mn}(R_u, R_v)|^2 = 10^{-4}$.

Были рассмотрены четыре типа апертурной функции:

- 1) прямоугольная $R(a, b, x, y)\tau_{mn}(x, y)$,
- 2) эллиптическая $E(a, b, x, y)\tau_{mn}(x, y)$,
- 3) гауссова $G(a, b, x, y)\tau_{mn}(x, y)$ и
- 4) гауссовая с дополнительными фазовыми скачками $G(a, b, x, y)\hat{e}_{mn}(x, y)$.

“Мягкая” апертура вводилась только для гауссовой функции, так как именно в этом случае, как показали результаты предыдущего раздела, она наиболее эффективна.

На рис. 3-7 представлены результаты для мод ГЭ (1,0), (1,1), (1,2), (7,0): (а) интенсивность (слева) и фаза (справа) идеальной моды; (б) прямоугольная апертурная функция (слева), и соответствующее ей распределение в дальней зоне интенсивности (в центре) и фазы (слева); (в) эллиптическая апертурная функция и соответствующее ей распределение интенсивности и фазы в дальней зоне; (г) гауссова апертурная функция и соответствующее ей распределение интенсивности и фазы в дальней зоне. Для моды (1,0) рис. 3 иллюстрирует вариант $a=b$ (часто

встречающийся на практике), а рис. 4 – оптимальный вариант.

Все полученные результаты сведены в Таблицу 4 († – дополнительный фазовый скачок прямоугольного типа, †† – дополнительный фазовый скачок эллиптического типа).

Из Таблицы 4 видно, что с помощью знакового фазового элемента и выбора подходящей апертурной функции можно формировать пучки ГЭ с эффективностью не менее 70%. Также видно, что если эффективность слабо зависит от номеров (m, n) моды, то среднеквадратичное отклонение растет с ростом номера. Как правило, наиболее выигрышными являются прямоугольные диафрагмы. Гауссова апертурная функция, наиболее удобная на практике, при достаточно высокой эффективности вносит большое среднеквадратичное отклонение, которое, как видно из Таблицы 4, можно существенно компенсировать почти без потери эффективности введением “мягкой” апертуры.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- проведено численное исследование качества формируемых двумерных мод ГЭ с помощью знакового фазового элемента при различных апертурных функциях и показано, что достигаемая эффективность составляет не менее 70%;
- для снижения среднеквадратичной ошибки формируемых мод предложено введение дополнительных фазовых скачков на элементе. Показано, что особенно эффективно введение такой “мягкой” апертуры при освещении гауссовым пучком без ограничивающей диафрагмы. В этом случае снижение среднеквадратичного отклонения достигается практически без потери эффективности.

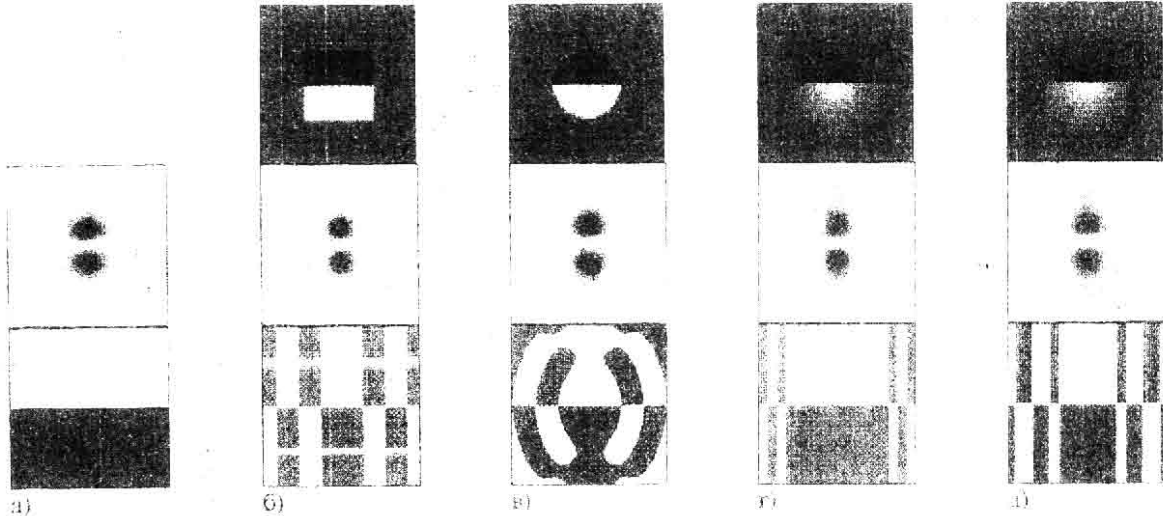


Рис. 3. Результаты моделирования в двумерном случае для моды $(1,0)$: а) интенсивность (слева) и фаза (справа) идеальной моды; б) знаковый элемент с оптимальной квадратной ($a=b$) апертурной функцией (слева), и сформированное распределение в дальней зоне интенсивности (в центре) и фазы (справа); в) знаковый элемент с оптимальной круглой ($a=b$) апертурной функцией (слева) и соответствующее распределение интенсивности (в центре) и фазы (справа) в дальней зоне; г) знаковый элемент с оптимальной радиально-симметричной гауссовой ($a=b$) апертурной функцией (слева) и соответствующее распределение интенсивности (в центре) и фазы (справа) в дальней зоне; д) знаковый элемент с дополнительными фазовыми скачками с оптимальной радиально-симметричной гауссовой ($a=b$) апертурной функцией (слева) и соответствующее распределение интенсивности (в центре) и фазы (справа) в дальней зоне.

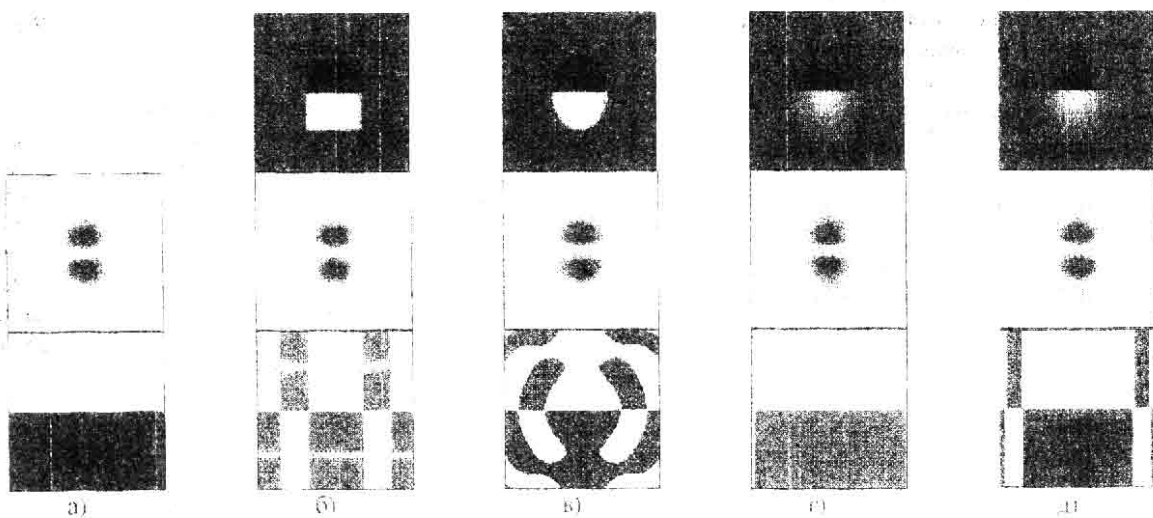


Рис. 4. Результаты моделирования в двумерном случае для моды $(1,0)$: а) интенсивность (слева) и фаза (справа) идеальной моды; б) знаковый элемент с оптимальной прямоугольной ($a \neq b$) апертурной функцией (слева), и сформированное распределение в дальней зоне интенсивности (в центре) и фазы (справа); в) знаковый элемент с оптимальной эллиптической ($a \neq b$) апертурной функцией (слева) и соответствующее распределение интенсивности (в центре) и фазы (справа) в дальней зоне; г) знаковый элемент с оптимальной гауссовой ($a \neq b$) апертурной функцией (слева) и соответствующее распределение интенсивности (в центре) и фазы (справа) в дальней зоне; д) знаковый элемент с дополнительными фазовыми скачками с оптимальной гауссовой ($a \neq b$) апертурной функцией (слева) и соответствующее распределение интенсивности (в центре) и фазы (справа) в дальней зоне

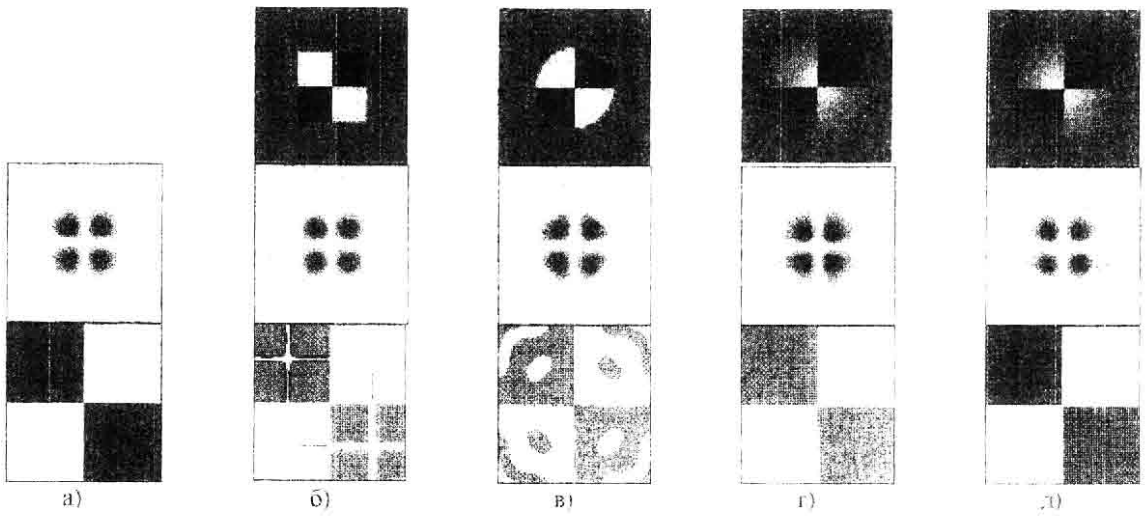


Рис. 5. Результаты моделирования в двумерном случае для моды (1,1) ($a=b$)

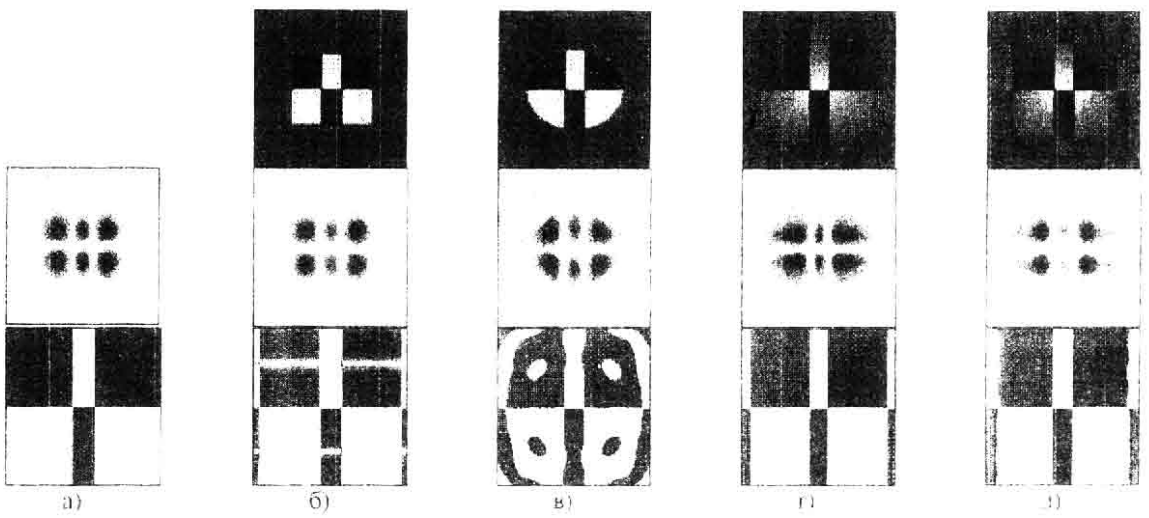


Рис. 6. Результаты моделирования в двумерном случае для моды (1,2) ($a \neq b$)

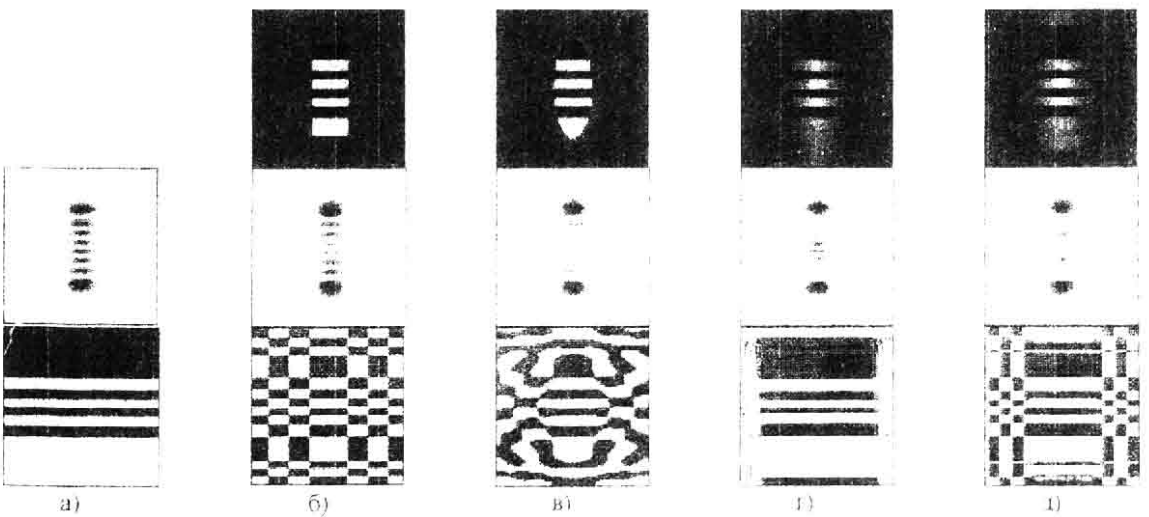


Рис. 7. Результаты моделирования в двумерном случае для моды (7,0) ($a \neq b$)

Таблица 4.

(n,m)	Апертурная функция	a, mm	b, mm	c, mm	d, mm	δ , %	η , %	Рисунок
(1,0)	$R(a,b,x,y)$	2.2	2.2	нет	нет	28.8	63.8	3б
		1.7	2.2			14.4	72.5	4б
	$E(a,b,x,y)$	2.2	2.2	нет	нет	26.9	70.1	3в
		1.85	2.45			14.3	74.6	4в
	$G(a,b,x,y)$	1.9	1.9	нет	нет	28.5	75.2	3г
		1.9	1.9	2.7 ^r	3.1 ^r	22.5	74.9	3д
		1.9	1.9	3.0 ^e	3.55 ^e	24.5	75.0	
1.5		2.05	нет	нет	18.3	80.5	4г	
1.5		2.05	2.7 ^r	3.1 ^r	15.4	80.3	4д	
	1.5	2.05	3.0 ^e	3.55 ^e	15.7	80.4		
(1,1)	$R(a,b,x,y)$	2.25	2.25	нет	нет	14.4	72.3	5б
	$E(a,b,x,y)$	2.64	2.64	нет	нет	15.6	69.5	5в
	$G(a,b,x,y)$	2.1	2.1	нет	нет	26.8	65.1	5г
		2.1	2.1	3.15 ^r	3.15 ^r	20.3	65.6	5д
	2.1	2.1	3.55 ^e	3.55 ^e	21.0	65.7		
(1,2)	$R(a,b,x,y)$	2.5	2.5	нет	нет	30.6	68.5	6б
		2.6	2.2			18.3	71.3	
	$E(a,b,x,y)$	3.0	3.0	нет	нет	31.8	65.4	6в
		3.2	2.6			23.5	67.3	
	$G(a,b,x,y)$	2.5	2.5	нет	нет	49.1	61.5	6г
		2.5	2.5	3.4	3.05	39.4	61.5	
2.7		2.2	нет	нет	45.2	63.1		
2.7		2.2	3.4	3.05	37.15	62.3		
(7,0)	$R(a,b,x,y)$	4.3	4.3	нет	нет	62.4	33.5	7б
		1.65	4.15			26.4	70.1	
	$E(a,b,x,y)$	4.4	4.4	нет	нет	66.9	40.7	7в
		1.8	4.5			46.4	66.8	
	$G(a,b,x,y)$	3.6	3.6	нет	нет	73.7	44.5	7г
		3.6	3.6	2.7	5.7	67.3	43.6	
1.5		4.8	нет	нет	53.4	70.3		
	1.5	4.8	2.7	2.7	49.5	70.3	7д	

Благодарность

Эта работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 96-15-96026, 98-01-00894).

Литература

1. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.Л. Сухоруков. Теория волн, М., Наука, 1979.
2. А. Ярив. Введение в оптическую электронику, М., Высшая школа, 1983.
3. V.A. Soifer, M.A. Golub. Laser beam mode selection by computer-generated holograms, CRC Press, Boca Raton, 1994.
4. М.А. Голуб, В.С. Павельев, В.А. Сойфер. Построение итеративного алгоритма расчета фазовых дифракционных элементов, формирующих заданное одномодовое распределение на основе применения метода обобщенных проекций, Компьютерная оптика, М., МЦИТИ, 1995, вып. 14-15, часть 2, с. 85-93.
5. V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, L.L. Doskolovich. Iterative methods for diffractive optical elements computation, Taylor and Francis, London, 1997.
6. В.С. Павельев, С.Н. Хонина. Быстрый расчет фазовых формирователей мод Гаусса-Лагерра, Компьютерная оптика, Самара, СГАУ, 1997, вып. 17, с. 15-20.
7. V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer, Generalized Hermite beams in free space, Optik, v.108, No.1, 1998, pp.20-26
8. С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер, Дифракционные оптические элементы, согласованные с модами Гаусса-Лагерра, Компьютерная оптика, Самара, СГАУ, 1997, вып. 17, с. 25-31.