АЛГОРИТМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

*Д.Л. Головашкин, А.А. Дегтярёв *,*
Институт систем обработки изображений РАН,
**) Самарский государственный аэрокосмический университет*

Введение

В работе [1] излагается разностный метод решения уравнений Максвелла с применением разностной схемы "push-pull" первого порядка точности, которая позволяет исследовать градиентные волокна на малых расстояниях и дифракционные оптические элементы непосредственно за их плоскостью. Разностный метод реализован для решения уравнений Максвелла в декартовых координатах в случае TE поляризованной волны. В настоящей статье представлена разностная схема второго порядка точности по времени, которая позволяет сократить время расчетов за счет более крупного шага дискретизации. Проводится сравнительный анализ точности решения уравнений Максвелла.

1. Постановка задачи о распространении излучения

Суть постановки задачи, приведенной в работе [1] состоит в следующем: среда представляет собой тонкий слой, расположенный в плоскости (Y,Z), а излучение направлено вдоль оси Z. В случае TE поляризованной волны уравнения Максвелла примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial \tau} = \dfrac{1}{\varepsilon_{xx}}\left(\dfrac{\partial H_y}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right); \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial \tau} = \dfrac{\partial E_x}{\partial z}; \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial \tau} = -\dfrac{\partial E_x}{\partial y}. \end{cases} \quad (1)$$

где E и H электрическая и магнитная составляющие поля, $\tau = ct$, c - скорость света в свободном пространстве, t - время, ε -диэлектрическая проницаемость. Полагаем, что на границе слоя $E_x = 0$.

2. Синтез разностной схемы повышенного порядка точности

Будем решать систему (1) посредством конечных разностей. Для этого рассмотрим множества функций $E_x(z,y,\tau)$, $H_y(z,y,\tau)$, $H_z(z,y,\tau)$ в области

$$D = \left\{0 \le z \le L, -\frac{d}{2} \le y \le \frac{d}{2}, 0 \le \tau \le T\right\},$$

где L – длина прямоугольной области, d - ширина прямоугольной области,
$T = ct_1$, t_1- длительность эксперимента.

Определим на ней сетку:

$$\omega_{\Delta z \Delta y \Delta \tau} = \{(z_i, y_j, \tau_n) \in D\}$$

где (z_i, y_j, τ_n) - узлы сетки, причем

$$0 \le i \le N_1 - 1;$$
$$1 \le j \le N_2 - 2;$$
$$0 \le n \le N_3 - 1.$$

Шаги сетки определяются формулами:

$$\Delta z = \frac{L}{N_1 - 1}; \quad \Delta y = \frac{d}{N_2 - 1}; \quad \Delta \tau = \frac{T}{N_3 - 1}.$$

Основываясь на общих принципах построения схем Писмена-Рэкфорда изложенных в [2], построим неявную разностную схему. Запишем систему разностных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{E^{n+1/2}_{x_{i,j}} - E^n_{x_{i,j}}}{0.5\Delta\tau} = \dfrac{1}{n^2(z,y)}\left(\dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i+1,j}} - H^{n+1/2}_{y_{i,j}}}{\Delta z} - \dfrac{H^n_{z_{i,j}} - H^n_{z_{i,j-1}}}{\Delta y}\right); \\ \dfrac{E^{n+1}_{x_{i,j}} - E^{n+1/2}_{x_{i,j}}}{0.5\Delta\tau} = \dfrac{1}{n^2(z,y)}\left(\dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i+1,j}} - H^{n+1/2}_{y_{i,j}}}{\Delta z} - \dfrac{H^{n+1}_{z_{i,j}} - H^{n+1}_{z_{i,j-1}}}{\Delta y}\right); \\ \dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i,j}} - H^{n-1/2}_{y_{i,j}}}{\Delta\tau} = \dfrac{E^{n+1/2}_{x_{i,j}} - E^{n+1/2}_{x_{i-1,j}}}{\Delta z}; \\ \dfrac{H^{n+1}_{z_{i,j}} - H^n_{z_{i,j}}}{\Delta\tau} = -\dfrac{E^{n+1}_{x_{i,j+1}} - E^{n+1}_{x_{i,j}}}{\Delta y}. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) аппроксимирует (1) в узлах (z_i, y_j, τ_n) при значениях индексов:

$$0 \le i \le N_1 - 1;$$
$$2 \le j \le N_2 - 2;$$
$$0 \le n \le N_3 - 1.$$

Подставив третье уравнение системы (2) в первое и четвертое во второе, получим разностные уравнения

$$\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta z^2}E^{n+1/2}_{x_{i-1,j}} + \left(-\frac{2}{\Delta\tau} - 2\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta z^2}\right)E^{n+1/2}_{x_{i,j}} +$$
$$+ \frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta z^2}E^{n-1/2}_{x_{i+1,j}} = -\frac{2}{\Delta\tau}E^n_{x_{i,j}} -$$
$$- \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n-1/2}_{y_{i+1,j}} + \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n-1/2}_{y_{i,j}} +$$
$$+ \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^n_{z_{i,j}} - \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^n_{z_{i,j-1}};$$

$$\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta y^2}E^{n-1}_{x_{i,j-1}} + \left(-\frac{2}{\Delta\tau} - 2\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta y^2}\right)E^{n+1}_{x_{i,j}} +$$
$$+ \frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta y^2}E^{n+1}_{x_{i,j+1}} = -\frac{2}{\Delta\tau}E^{n+1/2}_{x_{i,j}} +$$
$$+ \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^n_{z_{i,j}} - \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^n_{z_{i,j-1}} -$$
$$- \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n+1/2}_{y_{i+1,j}} + \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n+1/2}_{y_{i,j}},$$

которые решаются методом прогонки.

В узлах (x_i, y_j, τ_k) при значениях индексов:

$$0 \le i \le N_1 - 1;$$
$$j = 1;$$
$$0 \le n \le N_3 - 1$$

построим альтернативную систему аппроксимирующих уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{E^{n-1/2}_{x_{i,j}} - E^n_{x_{i,j}}}{0.5\Delta\tau} = \dfrac{1}{n^2(z,y)}\left(\dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i+1,j}} - H^{n+1/2}_{y_{i,j}}}{\Delta z} - \dfrac{H^n_{z_{i,j-1}} - H^n_{z_{i,j}}}{\Delta y}\right); \\ \dfrac{E^{n+1}_{x_{i,j}} - E^{n+1/2}_{x_{i,j}}}{0.5\Delta\tau} = \dfrac{1}{n^2(z,y)}\left(\dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i+1,j}} - H^{n+1/2}_{y_{i,j}}}{\Delta z} - \dfrac{H^{n+1}_{z_{i,j+1}} - H^{n+1}_{z_{i,j}}}{\Delta y}\right); \\ \dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i,j}} - H^{n-1/2}_{y_{i,j}}}{\Delta\tau} = \dfrac{E^{n+1/2}_{x_{i,j}} - E^{n+1/2}_{x_{i-1,j}}}{\Delta z}; \\ \dfrac{H^{n+1}_{z_{i,j}} - H^n_{z_{i,j}}}{\Delta\tau} = \dfrac{E^{n+1}_{x_{i,j}} - E^{n+1}_{x_{i,j-1}}}{\Delta y}. \end{cases} \tag{3}$$

Подставив третье уравнение системы (3) в первое и четвертое во второе, получим разностные уравнения

$$\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta z^2}E^{n+1/2}_{x_{i-1,j}} + \left(-\frac{2}{\Delta\tau} - 2\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta z^2}\right)E^{n+1/2}_{x_{i,j}} +$$
$$+ \frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta z^2}E^{n-1/2}_{x_{i+1,j}} = -\frac{2}{\Delta\tau}E^n_{x_{i,j}} -$$
$$- \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n-1/2}_{y_{i+1,j}} + \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n-1/2}_{y_{i,j}} +$$
$$+ \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^n_{z_{i,j+1}} - \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^n_{z_{i,j}};$$

$$\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta y^2}E^{n+1}_{x_{i,j-1}} + \left(-\frac{2}{\Delta\tau} - 2\frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta y^2}\right)E^{n+1}_{x_{i,j}} +$$
$$+ \frac{\Delta\tau}{n^2(z,y)\Delta y^2}E^{n+1}_{x_{i,j+1}} = -\frac{2}{\Delta\tau}E^{n+1/2}_{x_{i,j}} +$$
$$+ \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^{n}_{z_{i,j+1}} - \frac{1}{n^2(z,y)\Delta y}H^{n}_{z_{i,j}} -$$
$$- \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n+1/2}_{y_{i+1,j}} + \frac{1}{n^2(z,y)\Delta z}H^{n+1/2}_{y_{i,j}},$$

также решаемые методом прогонки.

Теперь, зная электрическое поле, определим магнитное

$$\begin{cases} \dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i,j}} - H^{n}_{y_{i,j}}}{\Delta\tau} = \dfrac{E^{n+1/2}_{x_{i+1,j}} - E^{n+1/2}_{x_{i,j}}}{\Delta z}; \\ \dfrac{H^{n+1}_{z_{i,j}} - H^{n}_{z_{i,j}}}{\Delta\tau} = -\dfrac{E^{n-1}_{x_{i,j+1}} - E^{n+1}_{x_{i,j}}}{\Delta y} \end{cases}$$

при значениях индексов:

$$0 \le i \le N_1 - 1;$$
$$2 \le j \le N_2 - 2;$$
$$0 \le n \le N_3 - 1$$

и
$$\begin{cases} \dfrac{H^{n+1/2}_{y_{i,j}} - H^{n}_{y_{i,j}}}{\Delta\tau} = \dfrac{E^{n+1/2}_{x_{i,j}} - E^{n+1/2}_{x_{i-1,j}}}{\Delta z}; \\ \dfrac{H^{n+1}_{z_{i,j}} - H^{n}_{z_{i,j}}}{\Delta\tau} = -\dfrac{E^{n+1}_{x_{i,j}} - E^{n+1}_{x_{i,j-1}}}{\Delta y} \end{cases}$$

при значениях индексов:

$$0 \le i \le N_1 - 1;$$
$$j = 1;$$
$$0 \le n \le N_3 - 1.$$

Возьмем в качестве краевого условия $E_x|_\Gamma = 0$ и торцевого условия $E_x = A(y)Cos(\omega t + \pi/2)$, где A – действительная амплитуда волны в скалярном приближении.

Схема (2), (3) аппроксимирует краевую задачу (1) с погрешностью аппроксимации $O(\Delta\tau^2, \Delta z, \Delta y)$. Это достигается использованием обеих проекций поля H при определении $E^{n+0.5}$ и E^{n+1}, чего не было в схеме "push-pull".

3. Сравнение эффективности предложенной схемы и схемы "push-pull"

Проведем оценку относительной погрешности решения задачи расчета прохождения моды по вакуумному волноводу с металлическими стенками, представленной в [1]. Погрешность определим как

$$\chi = \max_{z,y}\left|\frac{E_x^{числ.}(z,y) - E_x^{аналит.}(z,y)}{E_x^{аналит.}(z,y)}\right|.$$

На рис. 1 представлены зависимости погрешностей от дискретизации по времени для схемы "push-pull" и схемы, представленной в настоящей статье. $\Delta t = \lambda/(fc)$

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров: $t=10^{-11}$с, d=3мкм, L=3мкм, Δz=0.0058мкм, Δy=0.023мкм, λ=1мкм, $\Delta t = 0.333\cdot10^{-12}$, $0.166\cdot10^{-12}$, $0.111\cdot10^{-12}$, $0.0833\cdot10^{-12}$, $0.0666\cdot10^{-12}$, $0.0556\cdot10^{-12}$, $0.0476\cdot10^{-12}$, $0.0416\cdot10^{-12}$, $0.037\cdot10^{-12}$, $0.033\cdot10^{-12}$с.

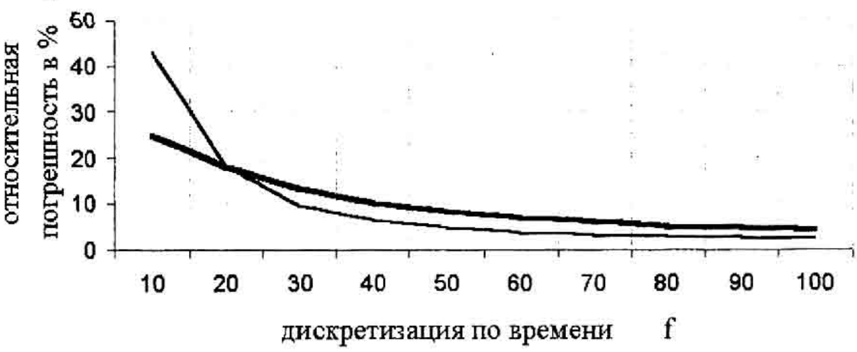

Рис. 1 Зависимость погрешностей от времени. Тонкая линия – погрешность решения с помощью схемы повышенной точности по времени, Толстая линия – погрешность решения с помощью схемы "push-pull"

Очевидно, при мелкости более, чем 20 отсчетов по времени, схема повышенного порядка точности является предпочтительной. Отметим, что на рис.1 погрешность решения с помощью схемы повышенного порядка точности по времени имеет квадратичный характер зависимости от дискретизации по времени.

Заключение

В результате проведенного вышеизложенного численного эксперимента удалось установить, что в отличии от метода, описанного в [1], изложенный метод позволил практически в два раза повысить точность при сохранении временных затрат.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96026)

Литература

1. Д.Л. Головашкин, А.А. Дегтярев, В.А. Сойфер., Моделирование волноводного распространения оптического излучения в рамках электромагнитной теории, Компьютерная оптика,17,1997.
2. Самарский А.А., Теория разностных схем, М. “Наука” ,1989.