

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА В КОДИРУЮЩИХ СОПРЯЖЕНИЯХ ОПТИКО - ЭЛЕКТРОННЫХ ДАТЧИКОВ

Ю.Л.Ратис, Г.И.Леонович, С.Е.Курушина, А.Ю.Мельников
Самарский государственный аэрокосмический университет

1. Введение

При проектировании оптико-электронной датчиковой аппаратуры, содержащей кодирующие сопряжения в составе подвижной кодирующей шкалы (КШ) и неподвижных считывающих элементов (СчЭ), в большинстве случаев возникает необходимость учета погрешностей преобразования, создаваемых нелинейностью функции отклика СчЭ, проявляющейся из-за дифракции света на отверстиях КШ [1-3]. Задача о дифракции света на прямоугольном и круглом отверстиях в общем виде решена в работах [1, 4, 5]. При постановке и решении практических задач наибольший интерес представляет описание функции отклика при дифракции света на отверстиях прямоугольной и квазипрямоугольной форм (сектор кольца, овал, двояковогнутый квазипрямоугольник и т. д.) с учетом погрешностей изготовления, перекоса и смещения КШ относительно СчЭ. В процессе учета и коррекции дифракционных поправок может ставиться дополнительная задача сокращения числа вычислительных операций.

Рассмотрим влияние дифракции на оптическую функцию отклика, несущую информацию о перемещении α_x (рис.1) на примере прохождения параллельного пучка света через прямоугольное (квазипрямоугольное) отверстие КШ.

Параллельный световой поток Φ_0 от осветителя падает на КШ 1. При линейном перемещении α_x КШ происходит амплитудная модуляция светового потока, падающего на неподвижный считывающий элемент (СчЭ) 2. В зависимости от типа и габаритов датчика, предъявляемых к нему требований по разрешающей способности и отношению сигнал/шум, выбираются те или иные геометрические соотношения между окнами КШ и СчЭ. Примем характерные для кодирующих сопряжений (КС) двухотсчетных преобразователей с амплитудной интерполяцией функции отклика параметры КШ и

СчЭ: $a = a_d = a_0/2 = 50 \dots 500$ мкм, $b > b_d = 200 \dots 1000$ мкм, где a , b , a_d , b_d - ширина и высота окон КШ и СчЭ соответственно, a_0 - период КШ [1,2].

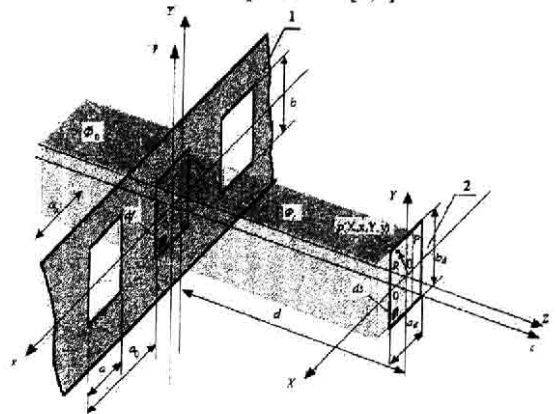


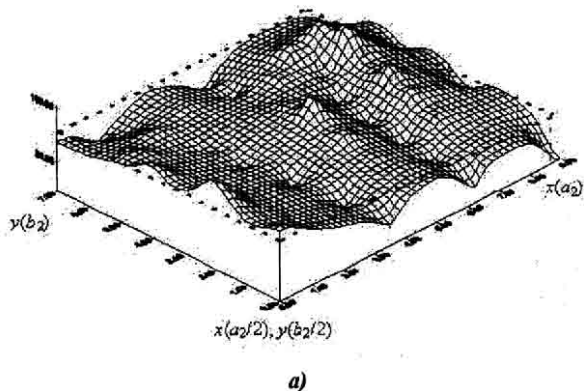
Рис. 1. Схема прохождения света через кодирующее сопряжение

На рис. 2,а показана картина распределения интенсивности света по поверхности СчЭ в пределах одного квадранта при отсутствии (пунктирная линия) и наличии дифракции. На рис. 2,б линией 1 показан сигнал на выходе СчЭ при идеальных формах отверстий, отсутствии шумов источника излучения и фотоприемника, и расстоянии от КШ до СчЭ $d=0$. Так как в реальных КС с учетом торцевых биений в направляющих перемещения КШ $d=5 \dots 500$ мкм, то функция отклика - амплитуда сигнала на выходе СчЭ (рис.2,б, линия 2) - имеет ярко выраженные нелинейные участки в основаниях и вершинах "треугольников", вызванные дифракцией. Линией 3 показан график разности между значениями функций отклика при отсутствии и при наличии дифракционных явлений (нелинейность функции отклика). При аналого-цифровом преобра-

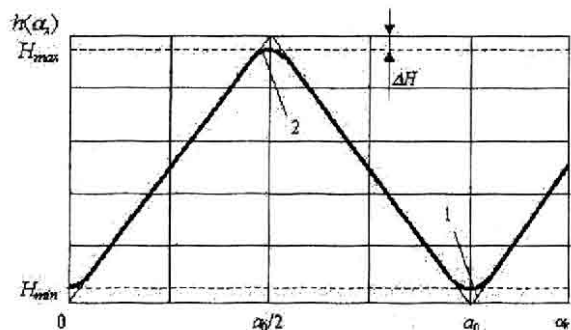
зовании нелинейности создается ограничение по количеству достоверных разрядов кода перемещения [2]:

$$n = \log_2 \left(\frac{H_{\max} - H_{\min}}{\Delta H_{\max}} \right) - 1 \quad (1)$$

где H_{\max} , H_{\min} - максимальное и минимальное значения сигнала $h(\alpha_x)$ на выходе СчЭ, а $\Delta H_{\max}(\alpha_x)$ - максимальное значение нелинейности функции отклика.



а)



б)

Рис. 2. Формирование сигнала на выходе СчЭ: а) распределение интенсивности света по поверхности СчЭ; б) расчетная функция отклика (1 - без учета дифракции; 2 - с учетом дифракции)

Наибольшая нелинейность регистрируемого сигнала проявляется при малых линейных перемещениях α_x относительно вершин и оснований позиционных сигналов. В некоторых случаях нелинейность может превышать амплитуду сигнала. Тогда функция $\alpha_x(h)$ становится многозначной, а погрешность измерения становится сравнимой с самой измеряемой величиной, что приводит к метрологическому отказу датчика [6].

Характер возникновения нелинейности вследствие дифракции светового потока на достаточно широком прямоугольном отверстии, а также погрешности, возникающие из-за искажения формы отверстия, можно оценить, пользуясь математическим аппаратом, описанным в [5]. Целью настоящей работы является исследование влияния дифракции светового потока на КШ и СчЭ на амплитуду регистрируемого сигнала $h(x)$ с учетом инструментальных погрешностей и формирование рекомендаций по разработке способов учета и ком-

пенсиации возникающих при этом нелинейных искажений.

2. Основной формализм

При конструировании сверхминиатюрных оптоэлектронных датчиков перемещений возникает задача расчета оптической функции отклика $h(x)$. Поскольку реальные геометрические размеры окон датчиков соизмеримы с расстоянием от КШ до СчЭ и не более, чем на 1-2 порядка превосходят длину волны падающего света, необходим корректный учет влияния дифракции на результаты измерения. В рассматриваемом случае мы имеем дело с дифракцией Френеля, несмотря на то, что падающую на КШ световую волну можно считать плоской; детально этот вопрос освещен в работе [5].

Используя обозначения работы [5] представим комплексную амплитуду U_p дифрагированной волны в точке $p(x, y, z)$ наблюдения в следующем виде (см. рис. 1):

$$U_p = \int \frac{kU}{2\pi iR} \cdot \exp(ikR) \cdot df_n, \quad (2)$$

где $R = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$, X, Y, Z - координаты точки наблюдения P , x, y, z - координаты точек волновой поверхности, а df_n - элемент проекции площади df на плоскость, перпендикулярную к направлению падающего луча. Для прямоугольного отверстия, имеющего ширину a и

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; z = 0.$$

В случае нормального падения плоской электромагнитной волны на указанное прямоугольное отверстие

$$U = U_0 \cdot \exp(ikz) = U_0 = \text{const} \quad (\text{т.к. } z=0) \text{ и}$$

выражение для амплитуды сильно упрощается:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \times \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}\right)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}} \quad (3)$$

Основная идея метода стационарной фазы состоит в том, что интеграл (3) набирается, в основном, в окрестности нуля первой производной от показателя комплексной экспоненты. В окрестности этой точки квадратный корень в показателе экспоненты можно разложить в ряд Тейлора с точностью до квадратичных членов:

$$\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2} \approx \\ \approx Z + \frac{1}{2} \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{Z} \quad (4)$$

В этом приближении

$$U_p(X, Y, Z) \approx \frac{kU_0}{2\pi iZ} \cdot \exp(ikZ) \times \\ \times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \exp\left(\frac{ik(X-x)^2}{2Z}\right) \times \\ \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \exp\left(\frac{ik(Y-y)^2}{2Z}\right) \quad (5)$$

Переходя к новой переменной интегрирования t :

$$x = \sqrt{\frac{\pi Z}{k}} \cdot t + X, \quad (6)$$

учитывая, что $dx = \sqrt{\frac{\pi Z}{k}} \cdot dt$, пределы интегрирования задаются равенством

$$-\sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \left(\frac{a}{2} + X\right) \leq t \leq \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \left(\frac{a}{2} - X\right),$$

используя для переменной y совершенно аналогичную подстановку, получаем окончательный результат:

$$U_p(X, Y, Z) \approx \frac{U_0}{2i} \cdot \exp(ikZ) \times \\ \times \left\{ \left[C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{a}{2} - X\right)\right) + C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{a}{2} + X\right)\right) \right] + \right. \\ \left. + i \left[S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{a}{2} - X\right)\right) + S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{a}{2} + X\right)\right) \right] \right\} \times (7) \\ \cdot \left\{ \left[C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{b}{2} - Y\right)\right) + C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{b}{2} + Y\right)\right) \right] + \right. \\ \left. + i \left[S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{b}{2} - Y\right)\right) + S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\left(\frac{b}{2} + Y\right)\right) \right] \right\}$$

где $C(z)$ и $S(z)$ - стандартные интегралы Френеля [4]:

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad (8)$$

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt. \quad (9)$$

Рассмотрим наклонное падение плоской волны на КШ. Амплитуда падающей волны является функцией координат:

$$U = U(x, y, z = 0) = U_0 \cdot \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (10)$$

и ее нельзя выносить из-под знака интеграла.

В этом случае выражение (5) модифицируется:

$$U_p(X, Y, Z) \approx \frac{k_2 U_0}{2\pi iZ} \cdot \cos\theta \cdot \exp(kZ) \times \\ \times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \exp\left[ik_x x + ik \frac{(X-x)^2}{2Z}\right] \times \\ \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \exp\left[ik_y y + ik \frac{(Y-y)^2}{2Z}\right] \quad (11)$$

где θ - угол между направлением падающего луча и плоскостью xy , в которой лежит КШ.

Амплитуда (11) выражается через интегралы Френеля:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{U_0}{2i} \cdot \cos\theta \times \\ \times \exp\left[i\left(k_x X + k_y Y + kZ - \frac{(k_x^2 + k_y^2)Z}{2k}\right)\right] \times \\ \times \left\{ \left[C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{a}{2} + X - \frac{k_x Z}{k}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{a}{2} - X + \frac{k_x Z}{k}\right) \right] C + \right. \\ \left. + i \left[S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{a}{2} + X - \frac{k_x Z}{k}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{a}{2} - X + \frac{k_x Z}{k}\right) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left[C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{b}{2} + Y - \frac{k_y Z}{k}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + C\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{b}{2} - Y + \frac{k_y Z}{k}\right) \right] + \right. \\ \left. + i \left[S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{b}{2} + Y - \frac{k_y Z}{k}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + S\left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}\frac{b}{2} - Y + \frac{k_y Z}{k}\right) \right] \right\}. \quad (12)$$

Введем переменные

$$\hat{X}_\pm = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \left[\frac{a}{2} \pm \left(X - \frac{k_x Z}{k}\right) \right],$$

$$\hat{Y}_\pm = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \left[\frac{b}{2} \pm \left(Y - \frac{k_y Z}{k}\right) \right].$$

Тогда интенсивность дифрагированного на прямоугольном отверстии света, равная квадрату модуля комплексной амплитуды, принимает вид:

$$I_p(X, Y, Z) = |U_p(X, Y, Z)|^2 = \frac{U_0^2}{4} \cos^2\theta \times \\ \times \left\{ \left[C(\hat{X}_+) + S(\hat{X}_+) \right]^2 + \left[S(\hat{X}_+) + C(\hat{X}_+) \right]^2 \right\} \times \\ \times \left\{ \left[C(\hat{Y}_+) + S(\hat{Y}_+) \right]^2 + \left[S(\hat{Y}_+) + C(\hat{Y}_+) \right]^2 \right\}. \quad (13)$$

Для расчета дифракционной картины от квази-прямоугольного отверстия воспользуемся методами теории возмущений. Перепишем выражение (11) для невозмущенной амплитуды U_{p0} (случай дифракции

мономатричной световой волны в отверстии прямоугольной формы) в следующем виде:

$$U_{p0}(X, Y, Z) = \frac{k_z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta\left(\frac{a}{2} - x\right) \Theta\left(\frac{a}{2} + x\right) \times \\ \times U(x, y, 0) \int_{-\infty}^{\infty} dy \Theta\left(\frac{b}{2} - y\right) \Theta\left(\frac{b}{2} + y\right) \times \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} \quad (14)$$

где $\Theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда [7]. Возмущенная амплитуда отличается от невозмущенной амплитуды (14), за счет вклада участков волновой поверхности, не содержащиеся в исходном прямоугольнике $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$; $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$. Учтем вклад от этих участков волновой поверхности в амплитуду дифрагированной волны. Для случая реальной формы краев щели имеем:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{k_z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy U(x, y, 0) \times \\ \times \Theta\left(\frac{a}{2} + \delta_{\Pi} a(y) - x\right) \Theta\left(\frac{a}{2} + x - \delta_{\Lambda} a(y)\right) \times \\ \div \Theta\left(\frac{b}{2} + \delta_{\text{В}} b(x) - y\right) \Theta\left(\frac{b}{2} + y - \delta_{\text{Н}} b(x)\right) \times \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} \quad (15)$$

Здесь форма правого края отверстия описывается уравнением $x = \frac{a}{2} + \delta_{\Pi} a(y)$,

левого края - уравнением $x = -\frac{a}{2} + \delta_{\Lambda} a(y)$,

верхнего - уравнением $y = \frac{b}{2} + \delta_{\text{В}} a(y)$,

а нижнего - уравнением $y = -\frac{b}{2} + \delta_{\text{Н}} a(y)$.

Очевидно, что разность между возмущенной и невозмущенной амплитудами имеет вид:

$$\delta U_p(X, Y, Z) = U_p(X, Y, Z) - U_{p0}(X, Y, Z) = \\ = \frac{k_z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy U(x, y, 0) \times \\ \times \left\{ \Theta\left(\frac{a}{2} + \delta_{\Pi} a(y) - x\right) \Theta\left(\frac{a}{2} + x - \delta_{\Lambda} a(y)\right) \times \right. \\ \times \Theta\left(\frac{b}{2} + \delta_{\text{В}} b(x) - y\right) \Theta\left(\frac{b}{2} + y - \delta_{\text{Н}} b(x)\right) - \\ - \Theta\left(\frac{a}{2} - x\right) \Theta\left(\frac{a}{2} + x\right) \Theta\left(\frac{b}{2} - y\right) \Theta\left(\frac{b}{2} + y\right) \left. \right\} \times \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} \quad (16)$$

Меличина возмущения δU_p легко вычисляется с помощью методов теории обобщенных функций.

Производная функции Хевисайда пропорциональна δ -функции. Поэтому для правой границы отверстия КШ выполняется приближенное равенство:

$$\Theta\left(\frac{a}{2} + \delta_{\Pi} a(y) - x\right) \approx \Theta\left(\frac{a}{2} - x\right) + \delta\left(\frac{a}{2} - x\right) \cdot \delta_{\Pi} a(y) \quad (17)$$

Аналогичные соотношения выполняются на остальных границах отверстия в КШ.

Согласно определению δ -функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot f(x) dx = f(0) \quad (18)$$

Ограничиваясь в разложении (17) линейными членами, получаем:

$$\delta U_p(X, Y, Z) = \frac{k_z}{2\pi i} \times \\ \times \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \delta_{\Pi} a(y) U\left(\frac{a}{2}, y, 0\right) \times \right. \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-a/2)^2 + (Y-y)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X-a/2)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} - \\ - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \delta_{\Lambda} a(y) U\left(-\frac{a}{2}, y, 0\right) \times \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X+a/2)^2 + (Y-y)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X+a/2)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} + \\ + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \delta_{\text{В}} b(x) U\left(x, \frac{b}{2}, 0\right) \times \\ \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-b/2)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-b/2)^2 + z^2}} - \\ - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \delta_{\text{Н}} b(x) U\left(x, -\frac{b}{2}, 0\right) \times \\ \times \left. \frac{\exp\left(ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y+b/2)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y+b/2)^2 + z^2}} \right\} \quad (19)$$

Для важного (с точки зрения синтеза КШ) частного случая дифракции мономатричного света на симметрично деформированной щели ($\delta_{\Lambda}(y) = -\delta_{\Pi}(y) = \delta a(y)$; $\delta_{\text{В}}(x) = \delta_{\text{Н}}(x) = 0$) выражение для возмущения амплитуды δU принимает пригодный для численных расчетов вид:

$$\delta U(X, Y, Z) = \frac{k_z U_0}{2\pi i} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \delta a(y) \exp(ik_x y) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp\left[i\left(k_x \frac{a}{2} + kR_+\right)\right]}{R_+} + \frac{\exp\left[i\left(-k_x \frac{a}{2} + kR_-\right)\right]}{R_-} \right\} \quad (20)$$

$$\text{где } R_{\pm} = \sqrt{(X \pm a/2)^2 + (Y - y)^2 + Z^2}.$$

Отметим, что полученные соотношения обобщают результаты работы [9].

Исследование выражения (20) позволяет оценить влияние формы отверстия в КШ на линейность оптической функции отклика СчЭ.

3. Формирование функции отклика считывающего элемента

Оптическая функция отклика $h(X_d)$ определяется очевидным соотношением:

$$h(X_d) = \int_{s_d} \varphi(X, Y) \cdot I_p(X, Y, Z) ds_n, \quad (21)$$

где $\varphi(X, Y)$ - функция распределения чувствительности СчЭ по его поверхности, а ds_n - проекция элемента площади СчЭ ds на плоскость, нормальную к направлению падения светового луча (см. рис.1).

Для простоты рассмотрим нормальное падение света на КШ и ограничимся в расчетах случаем

$$\varphi(X, Y) = 1, X \in \left(X_d - \frac{a_d}{2}, X_d + \frac{a_d}{2}\right),$$

$$Y \in \left(-\frac{b_d}{2}, +\frac{b_d}{2}\right).$$

Исследуем одномерный предел для случая дифракции монохроматического света на сильно вытянутом прямоугольном отверстии (предельный переход $b, b_d \rightarrow \infty$;

$[c(\hat{Y}_+) + c(\hat{Y}_-)]^2 + [s(\hat{Y}_+) + s(\hat{Y}_-)]^2 \rightarrow 2$ в интенсивности (13), то есть, дифракция на щели).

В этом приближении $h(X_d) \cong W_d(X_d)$, где W_d - полная энергия светового потока, попадающего на СчЭ, есть функция его координаты X_d :

$$W_d(X_d) = \frac{U_0^2}{2} \times \int_{X_d - a_d/2}^{X_d + a_d/2} \left\{ c(\hat{X}_+) + c(\hat{X}_-) \right\}^2 + \left\{ s(\hat{X}_+) + s(\hat{X}_-) \right\}^2 dx \quad (22)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} X; \xi_0 = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \frac{a}{2};$$

$$\xi_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left(X_d \pm \frac{a_d}{2}\right); \Delta\xi = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \frac{k_x Z}{k}$$

Тогда интенсивность света на поверхности СчЭ определяется выражением:

$$I_p(X, Z) = \frac{U_0^2}{2} \times \left\{ c(\xi_0 + \xi - \Delta\xi) + c(\xi_0 - \xi + \Delta\xi) \right\}^2 + \left\{ s(\xi_0 + \xi - \Delta\xi) + s(\xi_0 - \xi + \Delta\xi) \right\}^2 \quad (23)$$

а функция отклика имеет вид:

$$W_d(X_d) = \frac{U_0^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi Z}{k}} \int_{\xi_-}^{\xi_+} d\xi \times \left\{ c(\xi_0 + \xi - \Delta\xi) + c(\xi_0 - \xi + \Delta\xi) \right\}^2 + \left\{ s(\xi_0 + \xi - \Delta\xi) + s(\xi_0 - \xi + \Delta\xi) \right\}^2 \quad (24)$$

$$\text{Введем обозначения } W_0 = \frac{U_0^2}{2} \sqrt{\frac{\pi Z}{k}},$$

$$\bar{W}_d(X_d) = \frac{W_d(X_d)}{W_0}, \bar{\xi}_{\pm} = \xi_{\pm} - \Delta\xi.$$

Безразмерная оптическая функция отклика запишется как:

$$\bar{W}_d(X_d) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\xi}_-}^{\bar{\xi}_+} d\xi \times \left\{ c(\xi_0 + \xi) + c(\xi_0 - \xi) \right\}^2 + \left\{ s(\xi_0 + \xi) + s(\xi_0 - \xi) \right\}^2 \quad (25)$$

Для подробного исследования аналитических свойств функции отклика воспользуемся четностью подынтегральной функции и введем вспомогательную функцию двух безразмерных переменных $V(\xi_0, \eta)$:

$$V(\xi_0, \eta) = \int_{-\eta}^{\eta} d\xi \times \left\{ c(\xi_0 + \xi) + c(\xi_0 - \xi) \right\}^2 + \left\{ s(\xi_0 + \xi) + s(\xi_0 - \xi) \right\}^2 \quad (26)$$

В рамках использованных допущений безразмерная оптическая функция отклика выражается через функцию $V(\xi_0, \eta)$:

$$\bar{W}_d(X_d) = \frac{1}{4} [V(\xi_0, \bar{\xi}_+) - V(\xi_0, \bar{\xi}_-)]. \quad (27)$$

Интегрируя по частям выражение (26), получаем:

$$V(\xi_0, \eta) = V_0(\xi_0, \eta) - \Delta V(\xi_0, \eta), \quad (28)$$

В формуле (28) использованы обозначения:

$$V_0(\xi_0, \eta) = 2\eta \left\{ c(\xi_0 + \xi) + c(\xi_0 - \xi) \right\}^2 + \left\{ s(\xi_0 + \xi) + s(\xi_0 - \xi) \right\}^2 \quad (29)$$

$$\Delta V(\xi_0, \eta) = 2 \int_{-\eta}^{\eta} d\xi \cdot \xi F(\xi_0, \xi), \quad (30)$$

$$F(\xi_0, \xi) = [c(\xi_0 + \xi) + c(\xi_0 - \xi)]^2 \times \\ \times \left[\cos \frac{\pi}{2} (\xi_0 + \xi)^2 - \cos \frac{\pi}{2} (\xi_0 - \xi)^2 \right] + \\ + [s(\xi_0 + \xi) + s(\xi_0 - \xi)]^2 \times \\ \times \left[\sin \frac{\pi}{2} (\xi_0 + \xi)^2 - \sin \frac{\pi}{2} (\xi_0 - \xi)^2 \right] \quad (31)$$

С формальной точки зрения задача выражения оптической функции отклика через специальные функции математической физики сводится к вычислению интеграла (30). В результате весьма громоздких, но несложных вычислений, мы приходим к следующему выражению для $\Delta V(\xi_0, \eta)$:

$$\Delta V(\xi_0, \eta) = \frac{2\xi_0^3}{\alpha} \{B_1(\alpha, \beta) - \\ - B_1(\alpha, -\beta) - B_2(\alpha, \beta) + B_2(\alpha, -\beta)\} \quad (32)$$

В формуле (32) и далее использованы следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \xi_0^2; \quad \beta = \frac{\eta}{\xi_0}, \quad (33)$$

$$\begin{cases} B_1(\alpha, \beta) = \int_0^2 dt \sin \alpha t(t - 2 + 2\beta) \\ B_2(\alpha, \beta) = \int_0^2 \frac{dt}{t} \sin \alpha t(t - 2 + 2\beta) \end{cases} \quad (34)$$

Функция $B_1(\alpha, \beta)$ выражается через интегралы Френеля:

$$B_1(\alpha, \beta) = \frac{\cos \alpha(\beta - 1)^2}{\xi_0} \times \\ \times [s(\xi_0(1 + \beta)) + s(\xi_0(1 - \beta))] - \\ - \frac{\sin \alpha(\beta - 1)^2}{\xi_0} [c(\xi_0(1 + \beta)) + c(\xi_0(1 - \beta))] \quad (35)$$

Функция $B_2(\alpha, \beta)$ представляет собой интеграл от комбинации элементарных функций и по трудности вычислений эквивалентна любой специальной функции математической физики. Строго говоря, она не может быть сведена к конечной комбинации специальных функций. Однако, замена в (34) верхнего предела интегрирования на ∞ позволяет получить асимптотическую оценку $B_2^\infty(\alpha, \beta)$ для $B_2(\alpha, \beta)$:

$$B_2(\alpha, \beta) = B_2^\infty(\alpha, \beta) - \Delta B_2(\alpha, \beta), \quad (36)$$

где

$$B_2^\infty(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} [1/2 - c^2(\xi_0(\beta - 1)) - \\ - s^2(\xi_0(\beta - 1)) + \\ + c(\xi_0(\beta - 1)) + s(\xi_0(\beta - 1))]$$

При замене $B_2(\alpha, \beta)$ на $B_2^\infty(\alpha, \beta)$ можно пренебречь малым интегралом:

$$\Delta B_2(\alpha, \beta) = \int_2^\infty \frac{dt}{t} \sin \alpha t(t - 2 + 2\beta). \quad (37)$$

Малость интеграла (37) обусловлена тем, что он имеет порядок $1/8\alpha$, а параметр $\alpha = \frac{\pi \cdot a^2}{4 \cdot \lambda Z} \gg 1$ численно велик (характерные размеры установки делятся на длину волны падающего света).

Вместе с тем в прецизионных оптико-электронных датчиках снижение точности преобразования (25) часто ухудшает работу всей измерительной системы, вплоть до метрологических отказов [6]. Одним из источников погрешностей расчета оптической функции отклика в некоторых случаях является пренебрежение вкладом поправки $\Delta B_2(\alpha, \beta)$. При необходимости повышения точности расчетов функция $B_2(\alpha, \beta)$ может быть вычислена с помощью квадратурных формул Симпсона или Гаусса. Однако, численный анализ быстроосциллирующих функций всегда вызывает определенные математические затруднения и большие затраты машинного времени. Быстрота и точность расчета функции отклика особенно важны для датчиков, осуществляющих автокоррекцию погрешностей преобразования в реальном времени. В связи с этим возникает ряд проблем, связанных с технологическим компромиссом быстрота - точность. Изложим один из наиболее эффективных подходов к решению этой проблемы, разработанный в работе [8].

Представим функцию $B_2(\alpha, \beta)$ в следующем виде:

$$B_2(\alpha, \beta) = A_s(p, q) + A_c(p, q), \quad (38)$$

где [7]:

$$A_s(p, q) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \sin pt^2 \cos qt, \quad (39)$$

$$A_c(p, q) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \cos pt^2 \sin qt, \quad (40)$$

$$p = 4\alpha; \quad q = 4\alpha \cdot (\beta - 1). \quad (41)$$

Таким образом, решение задачи сводится к построению быстрого алгоритма расчета интегралов специального вида (39) и (40).

Разложим экспоненту от мнимого аргумента в ряд по сферическим функциям Бесселя $j_n(y)$:

$$\exp(iyt) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n + 1) j_n(y) P_n(t), \quad (42)$$

где $P_n(t)$ - полином Лежандра [7].

Учитывая, что $\cos(\gamma t) = \text{Re}(\exp(i\gamma t))$, представим интеграл (39) в виде быстро сходящегося ряда:

$$A_s(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+1) j_{2n}(q) \varphi_{2n}(p), \quad (43)$$

где

$$\varphi_{2n}(p) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \sin pt^2 P_{2n}(t). \quad (44)$$

Аналогично вычисляется интеграл (40):

$$A_c(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) j_{2n+1}(q) \varphi_{2n+1}(p), \quad (45)$$

где

$$\varphi_{2n+1}(p) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \cos pt^2 P_{2n+1}(t). \quad (46)$$

На практике сходимость рядов (43) и (45) наступает при $n > q$. Поскольку измерительная информация содержится в параметре q , то коэффициенты $\varphi_{2n}(p)$ и $\varphi_{2n+1}(p)$, определяемые формулами (44) и (46), вычисляются заранее. Для расчета сферических функций Бесселя используется быстрый алгоритм, предложенный в работе [8].

Конкретные расчеты показывают, что время вычисления интегралов (39), (40) сокращается более, чем на порядок, по сравнению со временем, затрачиваемым на их прямое вычисление на основе квадратурных формул типа Симпсона или Гаусса. Алгоритм (44)-(46) может быть использован для схемотехнической автокоррекции нелинейности функции отклика для правильной прямоугольной формы отверстий КШ и СЧЭ с точностью до 1...2% (точность приближения Кирхгофа [9]) в реальном времени.

Формулы (26) - (46) полностью решают задачу нахождения оптической функции отклика для случая, когда и отверстия в КШ и СЧЭ имеют правильную прямоугольную форму.

4. Результаты расчетов

На основе изложенного выше математического формализма был создан пакет прикладных программ, позволяющий имитировать формирование функции отклика в оптико-электронных датчиках.

На рисунке 3 представлены результаты расчета фрагмента дифракционной картины от квадратного отверстия в КШ для нормально падающего монохроматического света. Хорошо заметны всплески интенсивности света у краев отверстия.

Глубина модуляции растет с увеличением расстояния d между КШ и СЧЭ, а дифракция Френеля плавно переходит в хорошо исследованную дифракцию Фраунгофера.

На рис. 4 представлен результат расчета для случая, когда отклонение границы отверстия КШ от прямой линии задается функцией

$\delta a(y) = -0.05 \cdot \left(\frac{b}{2} - |y|\right)$ мкм и уменьшает эффективную площадь отверстия.

$$a = b = a_d = b_d = d = 50 \text{ мкм}, \lambda = 0.5 \text{ мкм}$$

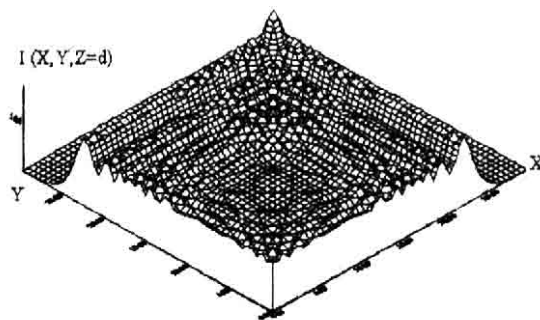


Рис. 3. Дифракционная картина от прямоугольного отверстия

$$a = b = a_d = b_d = d = 50 \text{ мкм}, \lambda = 0.5 \text{ мкм}$$

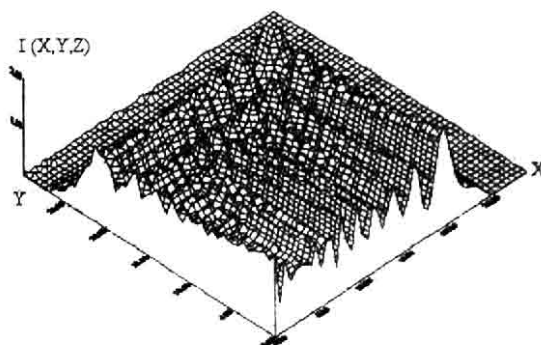


Рис. 4. Дифракционная картина от квазипрямоугольного отверстия

Из рисунка 4 видно, что малые возмущения формы прямоугольного отверстия, обычно связанные с технологическими погрешностями изготовления КШ, увеличивают амплитуду всплесков интенсивности на краях. Отсюда следует, что изменение формы отверстий в КШ малоперспективно в смысле линейризации функции отклика.

Гораздо более перспективным представляется направление, связанное с изменением формы СЧЭ. Дело в том, что возмущение прямолинейной формы краев СЧЭ приводит к эффективному усреднению амплитуды регистрируемого оптического сигнала. Хорошо известно, что средние значения (по интервалу значений аргумента) от быстроосциллирующих функций обладают существенно более приемлемыми свойствами, по сравнению с исходными неосредненными функциями, с точки зрения возможности их аппроксимации плавными кривыми. На рис. 5 приведены результаты расчетов оптической функции отклика и ее кусочно-линейных аппроксимантов для случая квазипрямоугольной формы СЧЭ. На рисунке 6 показаны зависимости разности между оптической функцией отклика, вычисленной в приближении Кирхгофа, и ее линейным и кусочно-ли-

нейными аппроксимантами. Точность данной аппроксимации достаточно высока: абсолютная погрешность не превосходит 0.04.

$$\overline{W}_d^a \quad a = b = a_d = b_d = d = 50 \text{ мкм; } \lambda = 50 \text{ мкм}$$

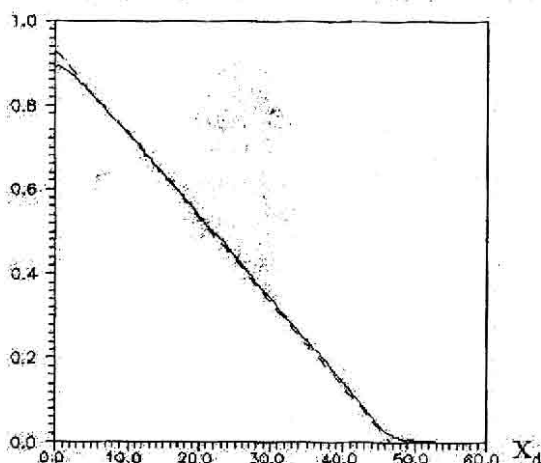


Рис. 5. Сплошная кривая - функция отклика для прямоугольного отверстия в КШ

$$\Delta \overline{W}_d^a \quad a = b = a_d = b_d = d = 50 \text{ мкм; } \lambda = 50 \text{ мкм}$$

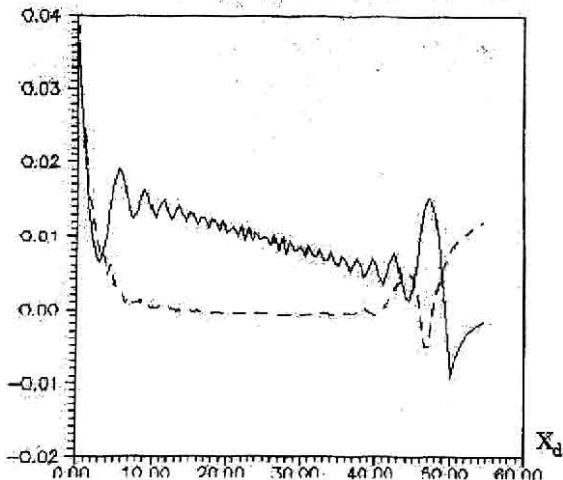


Рис. 6. Сплошная кривая - разность между оптической функцией отклика, вычисленной в приближении Кирхгофа и ее линейной аппроксимацией

$$\overline{W}_d^a = 1 - \frac{X_d}{a_d}. \text{ Штриховая кривая - то же для кусочно-линейной аппроксимации}$$

СчЭ имеет форму искаженного квадрата. Отклонение границы СчЭ от прямой линии задается функцией $\Delta a_d(Y) = -0.2 \cdot \left(\frac{b_d}{2} - |Y| \right)$ мкм и уменьшает эффективную площадь чувствительной поверхности. Штриховая кривая соответствует кусочно - линейной аппроксимации

$$\overline{W}_d^a = 0.93 \cdot (1 - 1.07 \cdot \frac{X_d}{a_d}) + \Delta(X_d),$$

где

$$\begin{cases} \Delta(X_d) = 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot X_d & 10 \leq X_d \leq 50 \\ \Delta(X_d) = 0 & X_d < 10; X_d > 50 \end{cases}$$

$$\overline{W}_d^a = 0.93 \cdot (1 - 1.07 \cdot X_d / a_d) + \Delta(X_d),$$

где

$$\begin{cases} \Delta(X_d) = 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot X_d & 10 \leq X_d \leq 50 \\ \Delta(X_d) = 0 & X_d < 10; X_d > 50 \end{cases}$$

Автокоррекция дифракционного вклада в нелинейность $\overline{W}_d^a(X_d)$ возможна также на основе нелинейной аппроксимации кирхгофской функции отклика:

$$\overline{W}_d^a(X_d) = 0.93 \cdot (1 - 1.07 \cdot \frac{X_d}{a_d}) + \sum_{i=1}^5 \Delta_i(X_d); \quad (47)$$

$$\begin{cases} \Delta_1(X_d) = -0.0008 \cdot (X_d - 7)^2 & X_d < 7; \\ \Delta_1(X_d) = 0 & X_d \geq 7; \end{cases} \quad (47.1)$$

$$\begin{cases} \Delta_2(X_d) = \frac{6}{X_d^2} & X_d > 50; \\ \Delta_2(X_d) = 0 & X_d \leq 50 \end{cases}; \quad (47.2)$$

$$\begin{cases} \Delta_3(X_d) = 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot X_d & 10 \leq X_d \leq 50 \\ \Delta_3(X_d) = 0 & X_d < 10; X_d > 50 \end{cases} \quad (47.3)$$

$$\begin{cases} \Delta_4(X_d) = 0.008 \cdot \exp\left(-\frac{(X_d - 2)^2}{2}\right); \\ \Delta_4(X_d) = 0 & X_d > 10 \end{cases}; \quad (47.4)$$

$$\begin{cases} \Delta_5(X_d) = 0.006 \cdot X_d - 0.286, \\ 46.9 \leq X_d \leq 50 \\ \Delta_5(X_d) = 0 & X_d < 46.9; X_d > 50 \end{cases} \quad (47.5)$$

Из рисунка 7 хорошо видно, что в этом случае погрешность аппроксимации удастся понизить на порядок по сравнению с линейными аппроксимантами.

Абсолютная погрешность $\Delta \overline{W}_d^a(X_d)$ аппроксимации (47) составляет менее 0.005. Тот факт, что функция отклика практически монотонно убывает с ростом координаты перемещения КШ, приводит к возникновению проблемы контроля относительной погрешности измерения при малых значениях.

Рис. 8. демонстрирует рост относительной погрешности $\delta \overline{W}_d^a(X_d) = \Delta \overline{W}_d^a(X_d) / \overline{W}_d^a(X_d)$ аппроксимации (47) на хвостах функции отклика, где она может достигать 30% и более, что абсолютно неприемлемо с метрологической точки зрения. Поскольку проведение точных расчетов $\overline{W}_d^a(X_d)$ в реальном времени является весьма трудоемким, то для повышения точности и быстродействия системы необходимо исключить из анализа зоны высокой

погрешности. С этой целью в КС вводятся дополнительные СчЭ, и аппаратно реализуется алгоритм синтеза функции отклика на основе логического анализа сигнала и выделения ее главной линейной части для каждого из СчЭ. Этот прием позволяет решить задачу автокоррекции нелинейности функции отклика в реальном времени.

$$\Delta W_d \quad a = b = a_d = b_d = d = 50 \text{ мкм}; \lambda = 50$$

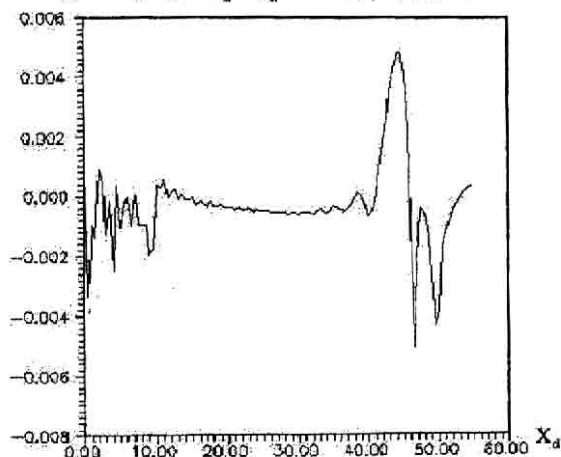


Рис. 7. Разность между вычисленной оптической функцией отклика и ее нелинейным аппроксимантом (47)

$$\frac{\delta W_d}{W_d} \quad a = b = a_d = b_d = d = 50 \text{ мкм}; \lambda = 50$$

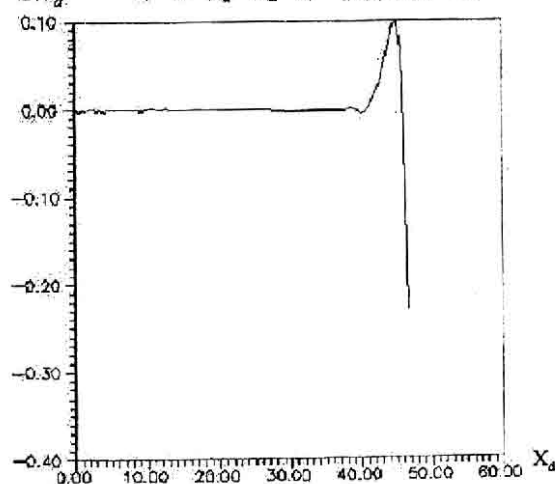


Рис. 8. Относительная погрешность аппроксимации (47)

Следующим направлением, идеологически примыкающим к методам повышения точности измерения за счет различных процедур осреднения сигнала, является использование немонахроматических пучков света. На рис. 9 представлены результаты расчета дифракционной картины для двух значений длины волны монохроматического света, падающего на узкую щель. Наблюдается относительное смещение дифракционных картин и наложение минимумов одного распределения на максимумы другого распределения. Очевидно, что возможен подбор спектрального состава излучения в КС, обес-

печивающего существенное сглаживание суммарного сигнала.

$$\frac{I(X)}{I_0} \quad a = a_d = d = 50 \text{ мкм}; b = b_d = \infty$$

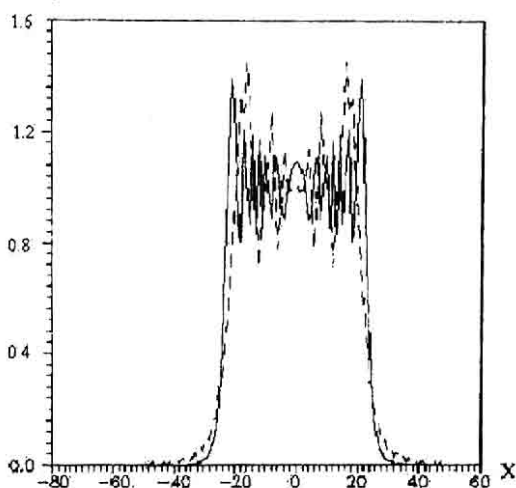


Рис. 9. Интенсивность дифрагированной световой волны

Сплошная кривая $\lambda=0.5$ мкм, штриховая кривая $\lambda=0.9$ мкм.

В простейшем случае равномерного частотного фильтра подобное сглаживание приводит к суммарной картине, представленной на рис. 10.

$$\frac{I(X)}{I_0} \quad a = a_d = d = 50 \text{ мкм}; b = b_d = \infty$$

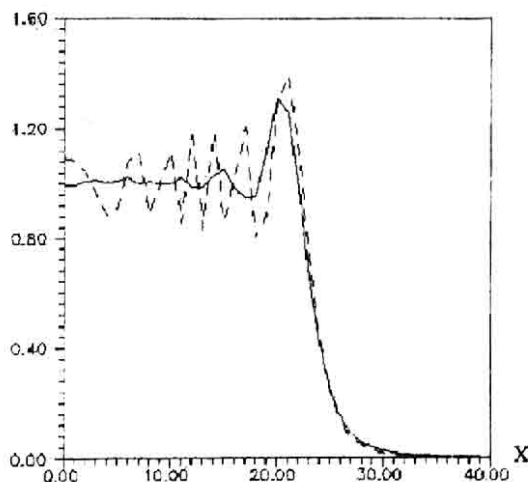


Рис. 10. Интенсивность дифрагированного света Штриховая кривая $\lambda=0.5$ мкм

Сплошная кривая - то же самое для белого света. Усреднение производится по диапазону длин волн $0.4 < \lambda < 0.9$ мкм.

Исследования функции отклика показывают, что при этом точность аппроксимантов повышается, а сами аппроксиманты упрощаются. Этот факт проиллюстрирован на рис. 11, где представлен расчет для длины волны $\lambda=0.5$ мкм (сплошная кривая) и

для белого света (штриховая диаграмма; усреднение произведено по диапазону длин волн $0.4 < \lambda < 0.9$ мкм).

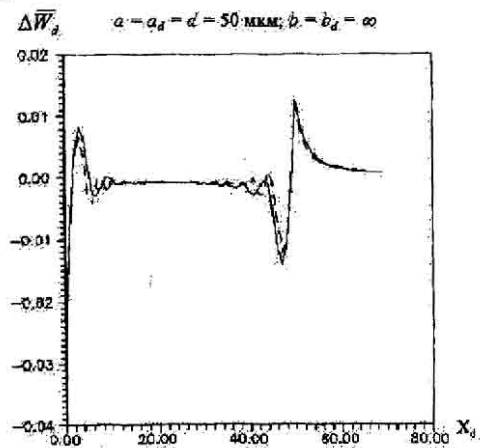


Рис. 11. Разность между оптической функцией отклика, вычисленной в приближении Кирхгофа и ее линейной аппроксимацией

На рис. 12. представлена функция распределения величины погрешности нелинейной аппроксимации (47). Из рисунка видно, что основная доля погрешностей приходится на диапазон $-0.004 < \Delta W < 0.004$. Условно нормированная огибающая гистограммы 12, описывающей распределение погрешности аппроксимации (47), имеет гауссовский вид:

$$f(\Delta W) = 0.44 \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta W - 0.004)^2}{0.00006}\right)$$

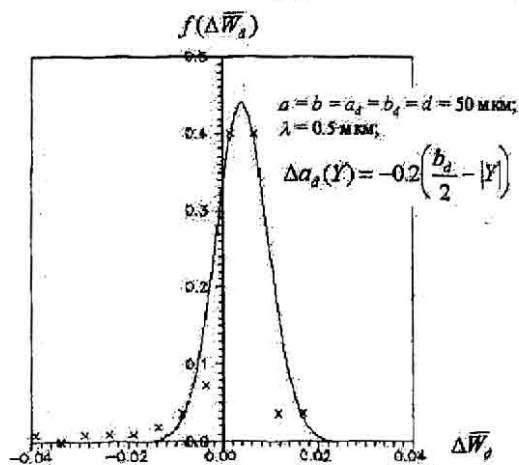


Рис. 12. Гистограмма распределения погрешностей нелинейной аппроксимации (47) кирхгофской функции отклика

Для повышения точности расчетов необходимо учесть асимметрию и эксцесс ненормированной функции распределения $f(\Delta W)$. Гистограмма построена для случая прямоугольного отверстия в КШ. СчЭ имеет форму искаженного квадрата с параметрами $a_d = b_d = d = 50$ мкм, причем

$$\Delta a_d(Y) = -0.2 \cdot \left(\frac{b_d}{2} - |Y|\right) \cdot \text{Длина световой волны}$$

$\lambda = 0.5$ мкм.

5. Заключение

Резюмируем вышесказанное следующим образом:

Выведены аналитические выражения для интенсивности $I(X, Y, Z)$ светового потока и функции отклика $h(X_d)$ в приближении Кирхгофа.

Получены удобные для расчета асимптотические оценки функции $h(X_d)$, учитывающие влияния дифракции и инструментальных погрешностей.

Разработан формализм для решения задачи минимизации нелинейности оптической функции отклика.

Проведен численный анализ влияния дифракционных и инструментальных погрешностей на работу оптикоэлектронных датчиков перемещений.

Показано, что вариации формы отверстий в КШ ведут к росту нелинейности функции отклика, а вариации формы СчЭ могут привести к заметному снижению нелинейности искажений.

Продемонстрирована возможность линейризации функции отклика за счет использования немонахроматических световых пучков с управляемым спектральным составом.

Исследовано распределение погрешностей нелинейной аппроксимации кирхгофской функции отклика.

Предложен способ автокоррекции нелинейных искажений.

Представляется целесообразным продолжить данное исследование и обобщить результаты для случая сложной взаимодействующей системы КШ – СчЭ с целью решения задачи синтеза оптикоэлектронных датчиков перемещений с минимальной нелинейностью оптической функции отклика.

6. Литература

1. Фотоэлектрические преобразователи информации / под редакцией Л.Н.Преснухина, М., Машиностроение, 1974, 375 с.
2. Домрачев В.Г., Мейко Б.С., Цифровые преобразователи угла: принципы построения, теория, точность, методы контроля. М., Энергоатомиздат, 1984, 328 с.
3. Аш Ж. и др. Датчики измерительных систем (в двух книгах), кн. 1 (2), перевод с франц, М., Мир, 1982, 480 с. (424 с).
4. Ландсберг Г.С., Оптика, М., Наука, 1976, 928 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, М., Наука, 1973, 504 с.
6. Конохов Н.Е., Леонович Г.И. Устройства допускового контроля в цифровых преобразователях перемещений для диагностики неявных параметрических отказов// Измерительная техника. - 1990. - №9. - С.11-13.
7. Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям, Москва, Наука, 1979, 832 с.

8. Ratis Yu.L., de Cordoba P.F., Computer Physics Communications 76(1993) 381.
9. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И. Дифракция светового потока на чувствительных элементах волоконно-

оптических и оптико-электронных датчиков механических перемещений// Компьютерная оптика. - 1996. - №16. - С.74-77.
