

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ДИСКРЕТНОГО КОСИНУСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕТНОЙ ДЛИНЫ

М. А. Чичева

Институт систем обработки изображений РАН

Введение

Косинусное преобразование является одним из основных дискретных преобразований, используемых в цифровой обработке изображений. Так, на нем основаны известные методы кодирования изображений (например, JPEG [1]); методы восстановления и фильтрации (например, метод гибридного спектрально-рекуррентного восстановления изображений [2]), методы извлечения признаков [3]. Такое широкое применение дискретного косинусного преобразования (ДКП) обусловлено целым рядом причин.

Во-первых, базисные функции ДКП хорошо аппроксимируют собственные функции преобразования Карунена-Лоэва для широкого класса стационарных случайных процессов, то есть позволяют описывать сигнал с заданной точностью минимальным числом компонент;

во-вторых, ДКП входит как составная часть в некоторые эффективные алгоритмы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (например, алгоритм Капорина-Уэнга [4]);

в-третьих, ДКП обладает рядом других полезных свойств, позволяющих, например, избежать краевых эффектов при блочном кодировании изображений.

Хорошо известен способ вычисления ДКП, основанный на его сведении к ДПФ вещественной последовательности двойной длины [3] или при использовании совмещенных алгоритмов [5] к ДПФ комплексной последовательности той же длины.

В начале 90-х годов появился ряд независимых публикаций [6, 7] о сведении ДКП нечетной длины к ДПФ вещественной последовательности той же, а не двойной длины. В основе метода лежит следующая идея. Значения базисных функций косинусного преобразования представляют вещественную часть примитивных корней из единицы степени $4N$. При нечетной длине преобразования числа 4 и N являются взаимно простыми, это означает, что при вычислении вспомогательного ДПФ может быть использована декомпозиция Гуда-Томаса [8, 9]. Вспомогательная последовательность, формируемая путем перестановки отсчетов исходной последовательности имеет только N ненулевых значений. Для перехода от спектра Фурье такой последовательности к косинусному спектру необходимо выполнить дополнительные умножения на степени мнимой единицы i , которые в стандартном комплексном представлении являются тривиальными.

В случае четной длины преобразования декомпозиция Гуда-Томаса вспомогательного ДПФ не может быть использована, так как у пары чисел 4 и N появляется общий делитель. В данной работе пред-

ложен новый алгоритм вычисления ДКП четной длины. Он базируется на учете свойств симметрии вспомогательной последовательности двойной длины, формируемой как четное продолжение исходной последовательности. Вычисление косинусного спектра исходной последовательности сводится к вычислению преобразования Фурье вещественного сигнала длины N , составленного из отсчетов вспомогательной последовательности с четными индексами, $2N$ дополнительным умножениям и N сложениям.

1. Традиционный способ вычисления ДКП

Описанный в [3] быстрый алгоритм сводит ДКП

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\pi \frac{(n+\frac{1}{2})m}{N}\right) \quad (1)$$

к вычислению ДПФ вещественной последовательности длины $2N$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(m) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\omega^{m/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega^{mn} + \omega^{-m/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega^{-mn} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega^{m/2} \sum_{k=0}^{2N-1} y(k) \omega^{mk}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega = \exp\left\{\frac{2\pi i}{2N}\right\}$, $y(k)$ - вещественная $2N$ -периодическая последовательность, полученная четным продолжением $x(n)$:

$$y(k) = \begin{cases} x(k) & \text{при } 0 \leq k \leq N-1 \\ x(2N-k-1) & \text{при } N \leq k \leq 2N-1 \end{cases} \quad (3)$$

Пусть вычисление спектра Фурье такой последовательности выполняется за $M_F^R(2N)$ операций вещественного умножения и $A_F^R(2N)$ операций сложения. Тогда число операций умножения $M(N)$ и сложения $A(N)$ при вычислении ДКП посредством такого алгоритма запишется в виде:

$$\begin{aligned} M(N) &= M_F^R(2N) + 3N, \\ A(N) &= A_F^R(2N) + 3N. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Новый алгоритм ДКП

Пусть вещественная последовательность $y(k)$ длины $2N$ получена четным продолжением исходной последовательности $x(n)$ по формуле (3), и ДКП (1) связано с ДПФ соотношением (2).

Для ДПФ

$$Y(m) = \sum_{k=0}^{2N-1} y(k) \omega^{km} \quad (5)$$

длины $2N$ проведем один шаг стандартной декомпозиции Кули-Тьюки:

$$Y(m) = \sum_{k=0}^{N-1} y(2k)\omega^{2km} + \omega^m \sum_{k=0}^{N-1} y(2k+1)\omega^{2km} \quad (6)$$

Из (3) следует, что последовательности отсчетов $y(2k)$ и $y(2k+1)$ с четными и нечетными индексами связаны между собой соотношением:

$$y(2k+1) = y(2N - (2k+1) - 1) = y(2(N-k-1)) = y(2l)$$

при $l = N - k - 1$.

Пусть

$$\tilde{y}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} y(2k)\omega^{2km},$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega^m \sum_{k=0}^{N-1} y(2k+1)\omega^{2km} &= \omega^m \sum_{l=0}^{N-1} y(2l)\omega^{2(N-l-1)m} = \\ &= \omega^{-m} \sum_{l=0}^{N-1} y(2l)\omega^{-2lm} = \overline{\omega^m \tilde{y}(m)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что:

$$Y(m) = \tilde{y}(m) + \overline{\omega^m \tilde{y}(m)}. \quad (8)$$

Тогда равенство (2) с учетом (6), (8) примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(m) &= \frac{1}{2} \omega^{m/2} (\tilde{y}(m) + \overline{\omega^m \tilde{y}(m)}) = \\ &= \frac{1}{2} (\omega^{m/2} \tilde{y}(m) + \overline{\omega^{m/2} \tilde{y}(m)}) = \\ &= \operatorname{Re}(\omega^{m/2} \tilde{y}(m)), \leq m \leq N-1 \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{y}(m)$ - спектр вещественного сигнала длины N .

Из соотношения (9) следует, что при выполнении комплексных умножений на $\omega^{m/2}$ достаточно вычислять только действительную часть произведения, что потребует двух умножений и одного сложения на отсчет:

$$\operatorname{Re}\{(a + ib)(\mu + iv)\} = a\mu - bv.$$

Таким образом, ДКП сведено к ДПФ вещественного сигнала той же длины, $2N$ дополнительным умножениям и N сложениям. Обобщенная блок-схема изложенного алгоритма приведена на рис. 1.

Мультипликативная и аддитивная сложности вычисления ДКП таким способом равны:

$$M(N) = M_F^R(N) + 2N, \quad A(N) = A_F^R(N) + N. \quad (10)$$

3. Сравнительный анализ вычислительной сложности алгоритмов

Вычислительная сложность описанных алгоритмов ДКП напрямую связана со сложностью вспомогательного алгоритма ДПФ.

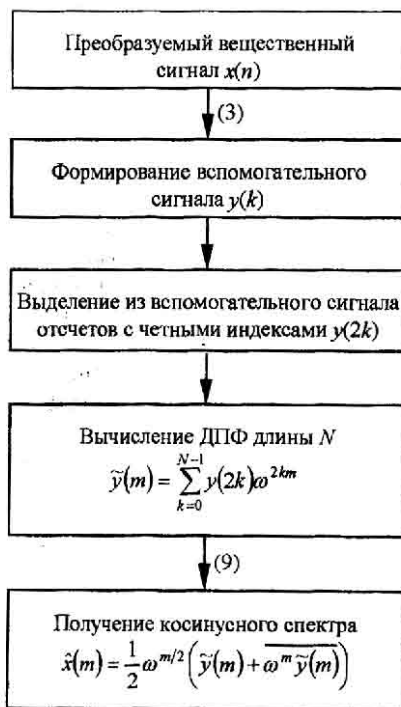


Рис. 1. Обобщенная блок-схема алгоритма ДКП

При четной длине преобразования наиболее широкое распространение получили алгоритмы ДПФ длины $N = 2^k$ с декомпозицией Кули-Тьюки (см., например, [3, 5, 10]). Кроме того хорошо известен совмещенный способ вычисления ДПФ вещественного сигнала, основанный на его редукции к ДПФ комплексного сигнала половинной длины [5].

Исследование сложности описанных алгоритмов проводилось в предположении, что в качестве вспомогательного ДПФ был использован совмещенный алгоритм с последующей декомпозицией комплексного ДПФ по основанию 2 или 4.

В таблице 1 приведены оценки вычислительной сложности алгоритмов ДПФ с декомпозицией по основанию 2 и 4 [5, 10].

Таблица 1.

Сложности алгоритмов	При декомпозиции:
	- по основанию 2
ДПФ комплексного сигнала	$M_F^C(N) \leq \frac{3N}{2} \log_2 N - \frac{9N}{2}$
	$A_F^C(N) \leq \frac{7N}{2} \log_2 N - \frac{9N}{2}$
ДПФ вещественного сигнала	$M_F^R(N) \leq \frac{3N}{4} \log_2 N - \frac{3N}{2}$
	$A_F^R(N) \leq \frac{7N}{4} \log_2 N - N$
	- по основанию 4
ДПФ комплексного сигнала	$M_F^C(N) \leq \frac{9N}{8} \log_2 N - \frac{13N}{4}$
	$A_F^C(N) \leq \frac{25N}{8} \log_2 N - \frac{13N}{4}$
ДПФ вещественного сигнала	$M_F^R(N) \leq \frac{9N}{16} \log_2 N - \frac{11N}{16}$
	$A_F^R(N) \leq \frac{25N}{16} \log_2 N - \frac{3N}{16}$

В таблице 2 даются сложности традиционного и предложенного алгоритмов ДКП, полученные на основании соотношений (4) и (10).

Таблица 2.

Сложности алгоритмов	При декомпозиции вспомогательного ДПФ:	
	- по основанию 2	
Традиционный алгоритм ДКП	$M(N) \leq \frac{3N}{2} \log_2 N + \frac{3N}{2}$	
	$A(N) \leq \frac{7N}{2} \log_2 N + \frac{9N}{2}$	
Предложенный алгоритм ДКП	$M(N) \leq \frac{3N}{4} \log_2 N + \frac{N}{2}$	
	$A(N) \leq \frac{7N}{4} \log_2 N$	
- по основанию 4		
Традиционный алгоритм ДКП	$M(N) \leq \frac{9N}{8} \log_2 N + \frac{11N}{4}$	
	$A(N) \leq \frac{25N}{8} \log_2 N + \frac{23N}{4}$	
Предложенный алгоритм ДКП	$M(N) \leq \frac{9N}{16} \log_2 N + \frac{21N}{16}$	
	$A(N) \leq \frac{25N}{16} \log_2 N + \frac{13N}{16}$	

Таблица 3 содержит численные данные о количестве операций, необходимых для вычисления ДКП при использовании вспомогательного алгоритма ДПФ с декомпозицией по основанию 2. Отношение суммарной арифметической сложности вычисления ДКП традиционным способом к сложности предложенного алгоритма показывает, что разработанный алгоритм требует в 2-2,4 раза меньше арифметических операций.

Таблица 3.

N	Стандартный алгоритм ДКП		Предложенный алгоритм ДКП		Отношение суммарной сложности
	операций умножения	операций сложения	операций умножения	операций сложения	
8	63	135	31	51	2,41
16	147	323	71	127	2,37
32	339	755	163	307	2,33
64	771	1731	371	723	2,29
128	1731	3907	835	1667	2,25

Под удельной арифметической сложностью алгоритмов будем понимать величину

$$W(N) = \frac{M(N) + \psi A(N)}{N},$$

где $M(N)$, $A(N)$ – количество операций умножения и сложения, необходимых для выполнения ДКП, ψ – коэффициент приведения времени выполнения операции сложения ко времени выполнения операции умножения, на современных компьютерах $\psi \approx 1$.

На рис. 2 даны зависимости удельной арифметической сложности ДКП $W(N)$ от длины N преобразуемого сигнала.

Заключение

В работе предложен новый эффективный алгоритм дискретного косинусного преобразования чет-

ной длины, основанный на его сведении к преобразованию Фурье вещественной последовательности той же длины. Предложенный алгоритм требует в 2 - 2,4 раза меньше арифметических операций, чем традиционный способ вычисления ДКП. Предложенная методика полностью распространяется на случай двумерного ДКП.

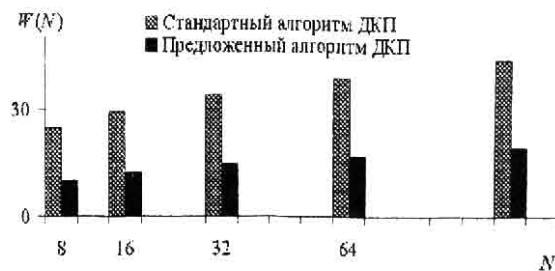


Рис. 2. Сравнение сложности традиционного и предложенного алгоритма ДКП

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00900)

Литература

- Wallace G. K. The JPEG still picture compression standard. //Communications of the ACM, Vol. 34, No 4, pp. 31-44, 1991.
- Виттих В. А., Сергеев В. В., Соифер В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. - М.: Наука, 1982. - 214с.
- Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. Пер. с англ. - М.: Связь, 1980. - 248 с.
- Капорин И. Е. Новый алгоритм быстрого преобразования Фурье. //Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 20, № 4, с. 1054-1058, 1980.
- Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. - М.: Советское радио, 1979. - 312с.
- Heideman Michael T. Computation of an odd-length DCT from a real-valued DFT of the same length // IEEE Trans. Signal Process., 40, N1, 1992, pp.54-61.
- Чернов В.М. Быстрый алгоритм дискретного косинусного преобразования нечетной длины // Автомат. и вычисл. техн., N3, 1994, с.62-70.
- Good I. J., The Interaction Algorithm and Practical Fourier Analysis // J. Royal Statist. Soc., Ser. B., No 20, pp. 361-375, 1958
- Thomas L. H., Using a Computer to Solve Problems In Physics, in Applications and of Digital Computer // Ginn and Co., Boston, Mass. 1963.
- Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов.- М.: Наука, 1990.- 160 с.