

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОЛЯ, ФОРМИРУЕМОГО ДОЭ В РАМКАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

*Харитонов С.И., Серафимович П.Г.,  
Институт систем обработки изображений РАН*

На протяжении последних лет большое внимание уделяется расчету волнового поля, формируемого дифракционным оптическим элементом (ДОЭ). Подобного рода обратные задачи возникают при расчете дифракционных оптических элементов формирующих заданное распределение интенсивности. Эти оптические элементы получили название фокусаторов лазерного излучения. Фокусаторы используются для решения технологических проблем, связанных с лазерной обработкой материалов. Однако, в подавляющем большинстве работ задачи восстановления полей решаются в рамках скалярной теории. В данной работе задача решается в рамках электромагнитной теории.

## 1. Постановка задачи

Данная работа посвящена задаче дифракции электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах. В дальнейшем для исследования свойств ДОЭ будет рассматриваться следующая оптическая схема: освещающий пучок + дифракционный оптический элемент + регистратор (рис 1). Освещающий пучок описывается распределением электрического и магнитного поля, которое наблюдается в отсутствие ДОЭ. Для полного описания свойств освещающего пучка достаточно задать распределение тангенциальных составляющих векторов электрического и магнитного поля в плоскости, непосредственно прилегающей к оптическому элементу. Регистратор представляет собой поверхность или несвязное множество точек, в которых производится измерение одной или нескольких характеристик электромагнитного поля (распределения интенсивности, фазы или поляризации поля). В дальнейшем в качестве регистратора будет использоваться плоскость, параллельная плоскости ДОЭ и отстоящая от него на некоторое расстояние.

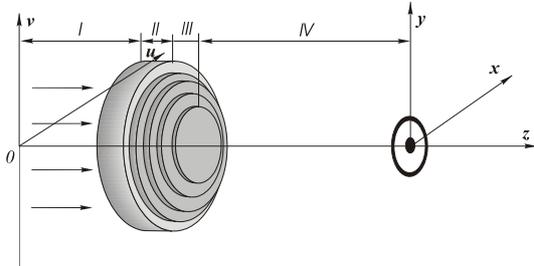


Рис.1 Оптическая схема

Дифракционный оптический элемент состоит из подложки и области модуляции. Область модуляции представляет собой область с изменяющимся от точки к точке показателем преломления или проводимостью.

Рассмотрим прямую задачу дифракции.

Пусть освещающий пучок с заданными значениями векторов электрического и магнитного поля  $\vec{E}, \vec{H}$  падает на дифракционный оптический элемент. Необходимо найти значение векторов электрического и магнитного поля в области регистратора. Анализируя оптическую схему, можно выделить несколько областей.

- I. Область между источником и дифракционным оптическим элементом.
- II. Область подложки.
- III. Область модуляции.

- IV. Область между плоскостью, непосредственно прилегающей к области модуляции и регистратором.

В случае ДОЭ с отражающим покрытием оптическая схема имеет другой вид. В этом случае все пространство можно разбить на две области

- I. Область между источником и плоскостью, непосредственно прилегающей к микро-рельефу.
- II. Область модуляции (или область микро-рельефа).

## 2. Дифракция на одномерных ДОЭ, имеющих зонную структуру

Рассмотрим дифракцию на одномерных дифракционных оптических элементах (ДОЭ), имеющих зонную структуру. Не ограничивая общности рассмотрим случай E -поляризации. Пусть границы зон на ДОЭ описывается выражением  $\varphi(x_m) = \lambda m$ , где m- номер зоны на элементе,  $\varphi(x)$  - дифференцируемая функция

Дифракционный оптический элемент представляет собой область (пластину), ограниченную плоскостями  $z=0$  и  $z=h$ . Внутри пластины имеется распределение диэлектрической проницаемости (показателя преломления), которое описывается функцией  $\varepsilon(x, z)$ . В пределах каждой зоны можно записать разложение в ряд Фурье

$$\varepsilon(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n^m(z) \exp\left(\frac{i2\pi n(x-x_m)}{d_m}\right), \quad (1)$$

где  $d = x_{m+1} - x_m$ ,

$x_m$  - левая граница зоны,

$x_{m+1}$  - правая граница зоны.

Учитывая выражение (1), можно написать разложение в области пластины в следующем виде

$$\varepsilon(x, z) = \sum_m \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n(x, z) \exp\left(\frac{i2\pi n(x-x_m)}{d_m}\right) \quad (2)$$

где  $\varepsilon_n(x, z)$  - кусочно-постоянная функция по переменной  $x$ .

Для размера зоны  $d_m$  можно написать приближенное выражение  $d_m = \frac{\lambda}{\varphi'(x_m)}$ . Подставляя это

выражение в (2), получаем

$$\varepsilon(x, z) = \sum_m \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n(x, z) \times \exp\left(\frac{2\pi ni}{\lambda} \varphi'(x_m)(x - x_m)\right) = \quad (3)$$

$$= \sum_m \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n(x, z) \times \exp\left(\frac{2\pi ni}{\lambda} (m\lambda + \varphi'(x_m)(x - x_m))\right)$$

Учитывая разложение в ряд:  
 $\varphi(x) = m\lambda + \varphi'(x_m)(x - x_m), \quad (4)$

предыдущую формулу приближенно можно переписать в следующем виде

$$\varepsilon(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n(x, z) \exp(ikn\varphi(x)) \quad (5)$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно записать аналогичные разложение для поля внутри области модуляции

$$E(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n(x, z) \exp(ik\alpha_0 x + ikn\varphi(x)), \quad (6)$$

отраженного от ДОЭ

$$E(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_n(x, z) \exp(ik\alpha_0 x + ikn\varphi(x)) \quad (7)$$

и прошедшего через ДОЭ

$$E(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T_n(x, z) \exp(ik\alpha_0 x + ikn\varphi(x)). \quad (8)$$

Распространение электромагнитной волны в случае E- поляризации описывается уравнением Гельмгольца [1,2]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(x, z) E = 0 \quad (9)$$

Подставляя (5), (6) в (9), получаем уравнение

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (\Delta E_n(x, z) + 2ik\nabla E_n(x, z)\nabla\psi_n(x) + ikE_n(x, z)\Delta\psi_n(x) - k^2 E_n(x, z)(\nabla\psi(x))^2) \times \quad (10)$$

$$\times \exp(ik\psi_n(x)) + \sum_s \sum_l k^2 \varepsilon_s(x, z) E_s(x, z) \times$$

$$\times \exp(s\varphi(x) + \psi_l(x))$$

Далее умножаем правую и левую часть полученного равенства на  $\exp(-ik\psi_p(x))$  и интегрируем по апертуре. Учитывая, что при  $k \rightarrow \infty$

$\int f(x) \exp(ik\psi_l(x)) dx \rightarrow 0$ , получаем систему диф-

ференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} & (\Delta E_n(x, z) + 2ik\nabla E_n(x, z)\nabla\psi_n(x) + \\ & + ikE_n(x, z)\Delta\psi_n(x, z) - \\ & - k^2 E_n(x, z)(\nabla\psi(x))^2) + \\ & + \sum_i k^2 \varepsilon_{n-l}(x, z) E_i(x, z) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Решение полученной системы уравнений представляет достаточно сложную математическую задачу. Поэтому, чтобы упростить задачу, положим

$$\frac{\partial E_n}{\partial x} \approx 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx 0. \text{ В этом случае система уравнений}$$

в частных производных превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left( \frac{\partial^2 E_n(x, z)}{\partial z^2} + k^2 E_n(x, z)(\nabla\psi_n(x))^2 \right) + \quad (12)$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} k^2 \varepsilon_{n-l}(x, z) E_l(x, z) = 0$$

Рассмотрим теперь распространение поля вне области модуляции. Для примера рассмотрим распространение волны, прошедшей через область модуляции. Пусть прошедшее поле при  $z=0$  имеет вид

$$E^T(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n^T(x) \exp(ikn\psi(x)) \quad (13)$$

Представим решение в пространстве виде

$$E^T(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n^T(x, z) \exp(ikn\psi(x, z)) \quad (14)$$

Подставляя это выражение в уравнение Гельмгольца для однородной среды, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( \frac{\Delta E_n^T(x, z)}{k^2} + \frac{2i}{k} \nabla E_n^T(x, z) \times \right. \quad (15)$$

$$\left. \times \nabla\psi_n(x, z) + \frac{i}{k} E_n^T(x, z) \Delta\psi_n(x, z) - E_n^T(x, z)(\nabla\psi_n(x, z))^2 + \varepsilon_3 E_n^T(x, z) \right) \exp(ik\psi_n(x, z))$$

Умножая полученное равенство на  $\exp(-ik\psi_p(x, z))$ , интегрируя по переменной  $x$  и используя предельные свойства при  $k \rightarrow \infty$ , получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$(\nabla\psi_p(x, z))^2 = \varepsilon_3 \quad (16)$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется выражение для нормальной производной поля на границе однородной среды и области модуляции. Это выражение имеет вид

$$\frac{\partial E^T(x, z)}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( \frac{\partial E_n^T(x, z)}{\partial z} + ik \frac{\partial\psi_n(x, z)}{\partial z} E_n^T(x, z) \right) \exp(ikn\psi_n(x, z)) \quad (17)$$

При  $k \rightarrow \infty$  это выражение приобретает вид

$$\frac{\partial E^T(x, z)}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( ik \frac{\partial\psi_n(x, z)}{\partial z} \times E_n^T(x, z) \exp(ikn\psi_n(x, z)) \right) \quad (18)$$

Нетрудно заметить, что при  $z=0$  это выражение имеет вид

$$\frac{\partial E^T(x)}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( ik \sqrt{\varepsilon_3 - \left( \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x} \right)^2} \times \right. \quad (19)$$

$$\left. \times E_n^T(x) \exp(ikn\psi_n(x)) \right)$$

Аналогичные выражения можно написать для поля, отраженного от ДОЭ и его нормальной производной

$$E^R(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n^R(x, a) \exp(ikn\psi_n(x))$$

$$\frac{\partial E^R(x)}{\partial z} = - \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( ik \sqrt{\varepsilon_1 - \left( \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x} \right)^2} \times \right. \quad (20)$$

$$\left. \times E_n^T(x, a) \exp(ikn\psi_n(x)) \right)$$

Представим решение системы уравнений в виде

$$E_n(x, z) = \sum_m E_m^T(x) E_{nm}(x, z) \quad (21)$$

где  $E_{nm}(x, z)$  решение, удовлетворяющее при  $z=0$  граничным условиям

$$E_{nm}(x, 0) = \delta_{nm},$$

$$\frac{dE_{nm}(x, 0)}{dz} = ik \sqrt{1 - \left( \frac{d\psi_n}{dx} \right)^2} \delta_{nm} \quad (22)$$

При данном выборе базовых решений автоматически удовлетворяются условия непрерывности при  $z=0$ .

Поле внутри оптического элемента представляется в виде

$$E(x, z) = \sum_n \sum_m T_m(x) E_{nm}(x, z) \exp(ik\psi_n(x)), \quad (23)$$

поле в области I при  $z=0$  имеет вид

$$E(x, 0) = \exp(ik\psi_0(x)) + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_n(x) \exp(ik\psi_n(x)), \quad (24)$$

его производная

$$\frac{\partial E^R(x, 0)}{\partial z} = ik \sqrt{1 - \alpha^2} \exp(ik\alpha x) - \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} ik \sqrt{1 - \left( \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x} \right)^2} R_n(x) \exp(ikn\psi_n(x))$$

Приравнивая значения поля и его производной при  $z=-a$ , получаем систему уравнений для определения функций  $R_n(x), T_n(x)$ . Полученная система линейных уравнений с точностью до обозначений совпадает с системой уравнений для определения дифракционных коэффициентов для диэлектрической решетки, период которой равен размеру зоны на дифракционном элементе в точке с координатой  $x$ .

Рассмотрим дифракционный оптический элемент, представляющий собой плоскопараллельную пластину с изменяющимся по апертуре показателем преломления  $n(x)$  (или диэлектрической проницае-

мостью  $\varepsilon(x)$ ). Рассчитаем эквивалентный ему дифракционный оптический элемент, у которого показатель преломления принимает только 2 значения, например, 1 и  $\varepsilon_{\max}$ . Эквивалентность здесь понимается в смысле эквивалентности поля, создаваемого данным оптическим элементом. Согласно результатам, приведенным в предыдущем пункте, это означает, что мы должны построить бинарную функцию, Фурье-коэффициенты которой совпадают с коэффициентами исходной функции. Точное решение данной задачи не существует, поэтому построим функцию, у которой первые  $n$  коэффициентов Фурье совпадают с некоторой точностью.

Описанный метод основан на теории эффективных сред [3,4,5]. Легко показать, что для этого каждый отсчет функции необходимо заменить решеткой с периодом, намного меньшим длины волны, и коэффициентом заполнения, полученным из следующего соотношения:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} f + (d - f)$$

где  $d$ - период решетки,  $f$ - длина заполненной диэлектриком части периода (рис.2). Нетрудно заметить, что при уменьшении периода дифракционной решетки точность решения увеличивается. В качестве примера рассмотрим дифракционный оптический элемент, фокусирующий в линию (рис.3). В этом случае дискретизованная по координате функция диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\varepsilon_{bin}(x) = \varepsilon_{\max} \sum_n F(x - x_n, f_n) \times \text{rect}(x, x_n, x_{n+1}) \quad (25)$$

$$\varphi(x) = -\sqrt{x^2 + f^2} \Big|_0, \quad \varepsilon(x) = \left( \frac{1}{h_{\max}} \text{mod}_{\lambda} \varphi(x) \right)^2,$$

$$h_{\max} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{\max}}} \text{ -высота бинарного микрорельефа,}$$

$\varepsilon_{\max}$  -диэлектрическая проницаемость материала микрорельефа,  $f_n = \frac{\Delta(\varepsilon(x_n) - 1)}{\varepsilon_{\max} - 1}$  - степень за-

полнения диэлектриком,  $\Delta$ -период бинарной дифракционной решетки, формируемой в каждом отсчете,  $f_0$ -фокусное расстояние.

Результаты расчета поля приведены на рис.3.

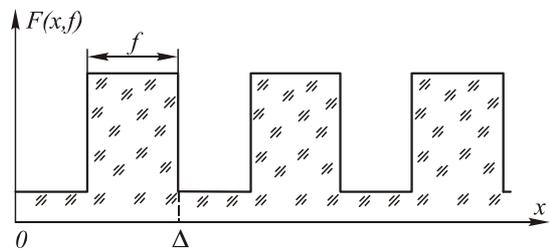


Рис.2 Профиль решетки в каждом отсчете

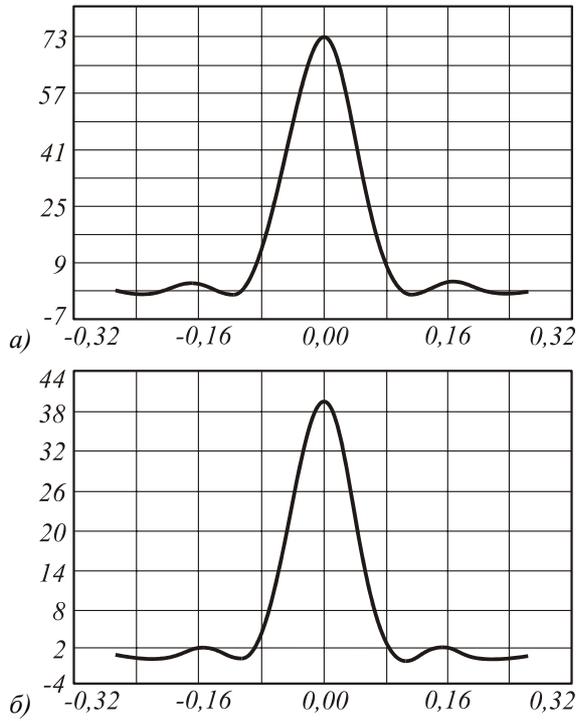


Рис.3 Поле от фокусатора в линию а)  $f=100\text{мм}$ ,  $D=10\text{мм}$ , б)  $f=10\text{мм}$ ,  $D=10\text{мм}$

### 3. Дифракция на двумерном ДОЭ, имеющем зонную структуру.

#### 3.1 Уравнения электродинамики, для тангенциальных компонент

Систему уравнений Максвелла запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\partial_z E_x &= \frac{i}{k} \partial_x \left( \frac{1}{\varepsilon} (\partial_x H_y - \partial_y H_x) \right) + ik H_y, \\ \partial_z E_y &= \frac{i}{k} \partial_y \left( \frac{1}{\varepsilon} (\partial_x H_y - \partial_y H_x) \right) - ik H_x, \\ \partial_z H_x &= \frac{1}{ik} \partial_x (\partial_x E_y - \partial_y E_x) - ik \varepsilon E_y, \\ \partial_z H_y &= \frac{1}{ik} \partial_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x) + ik \varepsilon E_x.\end{aligned}\quad (26)$$

Для удобства дальнейшего анализа перейдем к операторно-матричной форме записи уравнений. В операторной записи система уравнений Максвелла имеет вид

$$\partial_z \mathbf{W} = \mathbf{H} \mathbf{W} \quad (27)$$

где  $\mathbf{W}$  - матрица-столбец из 4-х компонент

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \text{ - блочно-матричный дифференциальный оператор}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \frac{i}{k} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y & \partial_x \\ -\partial_y & \partial_x \end{pmatrix} + \quad (28)$$

$$+ ik \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y & \partial_x \\ -\partial_y & \partial_x \end{pmatrix} +$$

$$+ ik \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения данного класса задач необходимо знать законы преобразования бивекторов. Пусть линейное преобразование координат в плоскости  $(x, y)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (29)$$

$x, y$  - старые координаты,  $x', y'$  - новые координаты. В этом случае закон преобразования бивекторного поля имеет вид

$$\begin{pmatrix} W_1(x, y, z) \\ W_2(x, y, z) \\ W_3(x, y, z) \\ W_4(x, y, z) \end{pmatrix} = \quad (30)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W'_1(x', y', z) \\ W'_2(x', y', z) \\ W'_3(x', y', z) \\ W'_4(x', y', z) \end{pmatrix}$$

Закон преобразования бивекторного поля вытекает из закона преобразования двумерных векторов.

#### 3.2 Дифракция на двумерной зонной структуре

##### 3.2.1 Решение в области неоднородной среды

Рассмотрим дифракционный оптический элемент, представляющий собой плоскопараллельную пластину, с показателем преломления, имеющим следующий вид

$$\varepsilon(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n(x, y, z) \exp(ikn\Phi(x, y)) \quad (31)$$

Представим бивекторное поле в аналогичном виде

$$W(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} W_n(x, y, z) \exp(ikn\Phi(x, y)) \quad (32)$$

Подставляя (31), (32) в (27) или (28), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
& \exp(ik\Phi_n) \partial_z E_{xn} = \frac{i}{k} \exp(ik\Phi_{n+m}) \cdot \\
& \cdot \left\{ \partial_x \varepsilon_m^{-1} \left[ (\partial_x H_{ny} - \partial_y H_{nx}) + \right. \right. \\
& + ik(H_{ny} \partial_x \Phi_n - H_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] + \\
& + ik \varepsilon_m^{-1} \partial_x \Phi_{n+m} \left[ (\partial_x H_{ny} - \partial_y H_{nx}) + \right. \\
& + ik(H_{ny} \partial_x \Phi_n - H_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] + \\
& + \varepsilon_m^{-1} \partial_x \left[ (\partial_x H_{ny} - \partial_y H_{nx}) + \right. \\
& + ik(H_{ny} \partial_x \Phi_n - H_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] \left. \right\} \\
& + ik H_{ny} \exp(ik\Phi_n) \\
& \exp(ik\Phi_n) \partial_z E_{yn} = \frac{i}{k} \exp(ik\Phi_{n+m}) \cdot \\
& \cdot \left\{ \partial_y \varepsilon_m^{-1} \left[ (\partial_x H_{ny} - \partial_y H_{nx}) + \right. \right. \\
& + ik(H_{ny} \partial_x \Phi_n - H_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] + \\
& + ik \varepsilon_m^{-1} (\partial_y \Phi_{n+m}) \left[ (\partial_x H_{ny} - \partial_y H_{nx}) + \right. \\
& + ik(H_{ny} \partial_x \Phi_n - H_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] + \\
& + \varepsilon_m^{-1} \partial_y \left[ (\partial_x H_{ny} - \partial_y H_{nx}) + \right. \\
& + ik(H_{ny} \partial_x \Phi_n - H_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] \left. \right\} - \\
& - ik H_{nx} \exp(ik\Phi_n)
\end{aligned}
\tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(ik\Phi_n) \partial_z H_{xn} = \frac{1}{ik} \exp(ik\Phi_n) \cdot \\
& \cdot \left\{ ik(\partial_x \Phi_n) \left[ (\partial_x E_{ny} - \partial_y E_{nx}) + \right. \right. \\
& + ik(E_{ny} \partial_x \Phi_n - E_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] + \\
& + \partial_x \left[ (\partial_x E_{ny} - \partial_y E_{nx}) + \right. \\
& + ik(E_{ny} \partial_x \Phi_n - E_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] - \\
& - ik \varepsilon_m E_{ny} \exp(ik\Phi_{n+m}) \\
& \exp(ik\Phi_n) \partial_z H_{yn} = \frac{1}{ik} \exp(ik\Phi_n) \cdot \\
& \cdot \left\{ ik(\partial_y \Phi_n) \left[ (\partial_x E_{ny} - \partial_y E_{nx}) + \right. \right. \\
& + ik(E_{ny} \partial_x \Phi_n - E_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] + \\
& + \partial_y \left[ (\partial_x E_{ny} - \partial_y E_{nx}) + \right. \\
& + ik(E_{ny} \partial_x \Phi_n - E_{nx} \partial_y \Phi_n) \left. \right] - \\
& - ik \varepsilon_m E_{nx} \exp(ik\Phi_{n+m})
\end{aligned}$$

В данных формулах везде предполагается суммирование по повторяющимся индексам

Умножая полученные уравнения на  $\exp(ik\Phi_s)$ , интегрируя по переменным  $x$ ,  $y$  и отбрасывая члены  $o\left(\frac{1}{k}\right)$ , получаем выражение:

$$\partial_z \mathbf{W}_n(x, y, z) = \sum_s \mathbf{H}_{n,s}(x, y, z) \mathbf{W}_s(x, y, z) \tag{34}$$

$$\mathbf{H}_{n,s}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ns}(x, y, z) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{ns}(x, y, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ns} &= \frac{i}{k} \begin{pmatrix} ik\partial_x \Phi_n & 0 \\ 0 & ik\partial_y \Phi_n \end{pmatrix} \times \\
& \times \varepsilon^{-1}_{n-s} \begin{pmatrix} -ik\partial_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \\ -ik_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \end{pmatrix} + \\
& + ik\delta_{ns} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{ns} &= \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} ik\partial_x \Phi_n & 0 \\ 0 & ik\partial_y \Phi_n \end{pmatrix} \times \\
& \times \delta_{n,s} \begin{pmatrix} -ik\partial_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \\ -ik\partial_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \end{pmatrix} + ik\varepsilon_{n-s} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

В частном случае когда  $\partial_y \Phi = 0$

$$\mathbf{A}_{ns} = -ik \times \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}_{n-s} \partial_x \Phi_n \partial_x \Phi_s - \delta_{ns} \\ -\delta_{ns} & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\mathbf{B}_{ns} = -ik \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \Phi_n \partial_x \Phi_s \delta_{ns} + \varepsilon_{n-s} \\ -\varepsilon_{n-s} & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$H_{ns} = -ik \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_{ns} \\ \mathbf{B}_{ns} & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

В этом случае система уравнений распадается на две независимые системы

$$\begin{aligned}
\partial_z \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix}_n &= \\
&= \sum_s \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}_{n-s} \partial_x \Phi_n \partial_x \Phi_s - \delta_{ns} \\ -\varepsilon_{n-s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix}_s
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\partial_z \begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix}_n &= \\
&= \sum_s \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ns} \\ \partial_x \Phi_n \partial_x \Phi_s \delta_{ns} + \varepsilon_{n-s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix}_s
\end{aligned} \tag{41}$$

### 3.2.2 Решение в свободном пространстве

В свободном пространстве выражение (35) имеет вид:

$$\mathbf{A}_{ns} = \left\{ \frac{i}{k} \begin{pmatrix} ik\partial_x \Phi_n & 0 \\ 0 & ik\partial_y \Phi_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -ik\partial_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \\ -ik_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \delta_{ns} \tag{42}$$

$$\mathbf{B}_{ns} = \left\{ \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} ik\partial_x \Phi_n & 0 \\ 0 & ik\partial_y \Phi_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -ik\partial_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \\ -ik\partial_y \Phi_s & ik\partial_x \Phi_s \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \delta_{ns} \tag{43}$$

Поле в области I имеет вид

$$\begin{aligned}
W(x, y, z) &= \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} W_n(x, y, z) \exp(ikn\Phi(x, y))
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_n(x, y, z) = & \delta_{n0} \left( I_n^e(x, y) \mathbf{W}^e(\alpha_n, \beta_n) + \right. \\
& \left. + I_n^h(x, y) \mathbf{W}^{+h}(\alpha_n, \beta_n) \right) \times \\
& \times \exp\left( ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_n^2}z \right) + \\
& + \left( R_n^e(x, y) \mathbf{W}^{-e}(\alpha_n, \beta_n) + \right. \\
& \left. + R_n^h(x, y) \mathbf{W}^{-h}(\alpha_n, \beta_n) \right) \times \\
& \times \exp\left( -ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_n^2}z \right)
\end{aligned} \quad (45)$$

$$\|\mathbf{W}\| \mathbf{W}^{\pm e}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \alpha \\ \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\|\mathbf{W}\| \mathbf{W}^{\pm h}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \alpha \\ \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \beta \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\|\mathbf{W}\| = \frac{1}{\sqrt{(2-\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}}.$$

Поле в области IV имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_n(x, y, z) = & \left( T_n^e(x, y) \mathbf{W}^{+e}(\alpha_n, \beta_n) + \right. \\
& \left. + T_n^h(x, y) \mathbf{W}^{+h}(\alpha_n, \beta_n) \right) \times \\
& \times \exp\left( ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_n^2}z \right),
\end{aligned} \quad (48)$$

где  $\alpha_n = \partial_x \Phi_n$ ,  $\beta_n = \partial_y \Phi_n$ ,  $\Phi_n = n\Phi(x, y)$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_0^{\pm e} = \mathbf{W}^{\pm e}(0,0) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{W}_0^{\pm h} = \mathbf{W}^{\pm h}(0,0) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (49)$$

Используя непрерывность тангенциальных компонент на передней и задней грани дифракционного оптического элемента, можно получить выражения для коэффициентов отражения и прохождения света. Полученная система линейных уравнений совпадает с системой линейных уравнений для определения коэффициентов дифракции на одномерной периодической решетке. Направление штрихов определяется вектором  $(-\Phi_y, \Phi_x)$ .

### 3.2.3 Поле на выходе дифракционного оптического элемента

Пусть падающая электромагнитная волна описывается выражением

$$W(x, y) = I^e W_0^{+e} + I^h W_0^{+h} \quad (50)$$

найдем выражение для поля в точке с координатами  $(x, y)$ . Для этого повернем систему координат в

плоскости так, что направление оси  $x$  совпадало с градиентом функции  $\Phi(x, y)$ . В этом случае  $\partial_y \Phi(x, y)$ .

В новой системе координат падающее поле имеет вид

$$W'(x', y') = P^{-1} W(x, y) \quad (51)$$

$$P = \begin{pmatrix} p(\theta) & E_2 \\ E_2 & p(\theta) \end{pmatrix} \quad p(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
W'(x', y') = & \left( \cos \theta I^e - \sin \theta I^h \right) W^{e_0} + \\
& + \left( \sin \theta I^e + \cos \theta I^h \right) W^{h_0}
\end{aligned}$$

В новой системе координат прошедшее электромагнитное поле будет иметь вид

$$\begin{aligned}
W'(x', y') = & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( T_n^e(x', y') \times \right. \\
& \times \left( \cos \theta I^e - \sin \theta I^h \right) \mathbf{W}^{+e}(\alpha'_n, 0) + \\
& + T_n^h(x', y') \left( \sin \theta I^e + \cos \theta I^h \right) \mathbf{W}^{+h}(\alpha'_n, 0) \times \\
& \times \exp(ikn\Phi(x', y'))
\end{aligned}$$

$$\theta = \arctg\left( \frac{\partial_y \Phi}{\partial_x \Phi} \right) \quad \alpha'_n = n \partial_{x'} \Phi(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \quad (53)$$

Поле в старой системе координат имеет вид

$$W(x, y) = P W'(x', y') \quad (54)$$

Электромагнитное поле в области 4 вычисляется с помощью интеграла Кирхгофа-Котлера [1,2]

$$\begin{aligned}
\vec{E} = & \frac{ik}{4\pi} \int_s \left\{ \left[ \vec{n}, \vec{H} \right] + \left[ \vec{r}_0, \left[ \vec{n}, \vec{E} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left[ \vec{n}, \vec{H} \right], r_0 \right\} \frac{\exp(ikr)}{r} ds \\
\vec{H} = & \frac{ik}{4\pi} \int_s \left\{ -\left[ \vec{n}, \vec{E} \right] + \left[ \vec{r}_0, \left[ \vec{n}, \vec{H} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[ \vec{n}, \vec{E} \right], r_0 \right\} \frac{\exp(ikr)}{r} ds
\end{aligned} \quad (55)$$

В матричном виде интеграл Кирхгофа-Котлера имеет вид

$$W(\vec{x}) = \frac{ik}{4\pi} \int_s \frac{\exp(ikr)}{r} T(\vec{x}, \vec{x}') W(\vec{x}') ds \quad (56)$$

$$T(\vec{x}, \vec{x}') =$$

$$= \begin{bmatrix} -r_{0z} & 0 & -r_{0y}r_{0x} & r^2_{0x}-1 \\ 0 & -r_{0z} & 1-r^2_{0y} & r_{0x}r_{0y} \\ r_{0y}r_{0x} & 1-r^2_{0x} & -r_{0z} & 0 \\ r^2_{0y}-1 & -r_{0x}r_{0y} & 0 & -r_{0z} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}', \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad r = |\vec{r}|$$

### 3.2.4 Поле от радиально-симметричного оптического элемента

Поле на выходе радиально-симметричного оптического элемента в полярных координатах при нормальном падении плоской волны имеет вид

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (T_n^e(\rho) \times (\cos \theta I^e - \sin \theta I^h) \mathbf{W}^{+e}(\alpha'_n, 0) + T_n^h(\rho) (\sin \theta I^e + \cos \theta I^h) \mathbf{W}^{+h}(\alpha'_n, 0)) \times \exp(ikn\Phi(\rho)),$$

$$\alpha'_n = n \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho}$$

$$W(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\theta \\ H_\rho \\ H_\theta \end{pmatrix} \quad (59)$$

Закон преобразования бивектора от декартовых координат к полярным имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\theta \\ H_\rho \\ H_\theta \end{pmatrix} \quad (60).$$

Подставляя полученное выражение в (60) и вычисляя интеграл (56), получим электромагнитное поле, формируемое радиально-симметричным оптическим элементом.

В качестве примера приведем результаты расчета плотности потока энергии (вектора Умова-Пойтинга) от бинарного, радиально-симметричного оптического элемента, функция диэлектрической проницаемости которого вдоль радиуса задается выражением (25). Оптический элемент освещался Гауссовым пучком. Результаты расчета представлены на рис.4.а и 4б.

На рис 4в и 4г представлено распределение плотности вектора Умова-Пойтинга в фокальной плоскости неосевого сегмента фокусатора при освещении гауссовым пучком. В случае, изображенном на рис 4в использовался неосевой сегмент, у которого пространственная частота и направление зон изменялись достаточно слабо. В примере, изображенном на рис 4г был выбран неосевой сегмент, частота зон которого изменялась в пределах от 3.6 мкм до 8 мкм. Полученная форма распределения энергии объясняется существенным различием коэффициентов пропускания в различных точках апертуры ДООЭ. Это привело к сильной амплитудной модуляции поля на выходе ДООЭ. Это в свою очередь отразилось на структуре фокального пятна.

#### 4. Заключение

Приведенные результаты наглядно показывают, работоспособность предложенных в данной работе методов и алгоритмов вычисления поля, формируемого дифракционными оптическими элементами в рамках электромагнитной теории. Простота и на-

глядность полученных формул позволяет применять их для оценки качества работы ДООЭ в инженерных расчетах не прибегая к точному решению системы уравнений Максвелла.

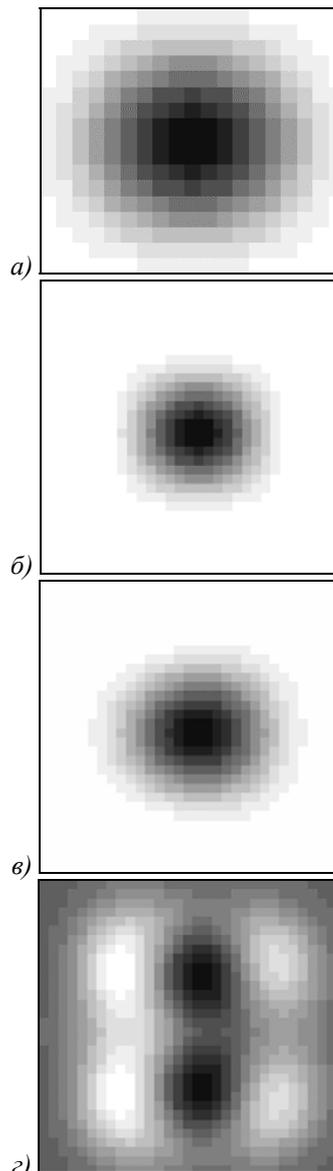


Рис. 4. Поле от бинарного, радиально-симметричного оптического элемента.  
а)  $f=100\text{мм}$ ,  $D=10 \times 10\text{мм}$ ; б)  $f=50\text{мм}$ ,  $D=10 \times 10\text{мм}$ ;  
в)  $f=20\text{мм}$ ,  $D=10 \times 10\text{мм}$ ; г)  $f=20\text{мм}$ ,  $D=10 \times 10\text{мм}$

#### Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., Наука 1979
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики, М., Наука 1975
3. Rytov S.M., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29 605 (1955 [Sov. Phys. JETP 2 466 (1956)])
4. Raguin D.H., Morris G.M., Appl. Opt. 32, 1154 (1993)
5. Raguin D.H., Morris G.M., Laser Focus World. (4), 113 (1997)

# Asymptotic methods of calculating the fields generated by DOE within the framework of electromagnetic theory

*S.I. Kharitonov, P.G. Serafimovich*  
*Image Processing Systems Institute of RAS*

## *Abstract*

In recent years, much attention has been paid to calculating a wave field formed by a diffractive optical element (DOE). Inverse problems of this kind arise when designing DOEs generating a target intensity distribution. These optical elements are called laser focusators. Focusators are used to solve technological problems associated with laser treatment of materials. However, in the majority of works, field reconstruction problems are solved within the framework of the scalar theory. In this work, the problem is solved within the framework of the electromagnetic theory.

*Citation:* Kharitonov SI, Serafimovich PG. Asymptotic methods of calculating the fields generated by DOE within the framework of electromagnetic theory. *Computer Optics* 1999; 19: 33 - 39.

## *References*

- [1] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP, Theory of waves. Moscow: Nauka Publisher; 1979
- [2] Born M, Wolf E. Basics of optics. Moscow: Nauka Publisher; 1975.
- [3] Rytov S.M., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29 605 (1955 [Sov.Phys. JETP 2 466 (1956)]
- [4] Raguin D.H., Morris G.M., Appl. Opt. 32, 1154 (1993)
- [5] Raguin D.H., Morris G.M., Laser Focus World. (4), 113 (1997).