

# ПРИБЛИЖЕНИЕ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНЫМИ РЯДАМИ

Хонина С.Н.

Институт систем обработки изображений РАН

e-mail: khonina@smr.ru

## Аннотация

Рассматривается приближение вытянутых сфероидальных функций конечными рядами и предлагается метод вычисления коэффициентов таких рядов. Приводится численный анализ выполнения свойства инвариантности вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка к интегральному преобразованию с sinc-ядром на симметричном ограниченном интервале.

### 1. Введение

Сфероидальные функции (СФ) обязаны своим появлением в математической физике разделению переменных в уравнении Гельмгольца в координатах вытянутого и сплюснутого сфероидов. До 1975 года основной областью применения СФ были задачи дифракции на вытянутом и сплюснутом сфероиде, тесно связанные с разделением переменных. Вторая область применения СФ появилась, когда была подробно проанализирована их связь с преобразованием Фурье в конечных пределах и установлено свойство двойной ортогональности вытянутых радиальных СФ. Именно благодаря этим свойствам СФ стали широко использоваться в таких областях, как теория синтеза антенн и теория изображений.

СФ представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой, которые ортогональны как на данном конечном интервале, так и на бесконечном интервале [1]. Кроме того, СФ нулевого порядка являются собственными функциями преобразования Фурье на ограниченном интервале и интегрального преобразования с sinc-ядром на симметричном ограниченном интервале [2]. При этом собственные числа интегрального преобразования определяют количество энергии соответствующей собственной функции, концентрирующейся на данном ограниченном интервале. Собственные числа близкие к единице показывают, что данная СФ имеет за пределами данного интервала малую долю энергии.

С помощью СФ можно формировать сигналы и изображения, которые одновременно обеспечивают наилучшую концентрацию энергии по времени и спектральной частоте [3]. Данное свойство может эффективно использоваться в системах передачи информации [4]. Аналогичными свойствами обладают вытянутые СФ двух переменных, Фурье-спектр которых ограничен кругом. Они являются собственными функциями интегрального уравнения с ядром пропорциональным произведению Бессель-функции на квадратный корень из аргумента [5]. Такое интегральное уравнение также описывает моды в лазерном интерферометре с конфокальными сферическими зеркалами круглого сечения.

Вытянутые СФ обладают также свойством самовоспроизведения при распространении в пространстве, то есть они являются собственными функциями оператора дифракции на некотором расстоянии от ограниченной апертуры [6]. Кроме того, дифракционная картина вытянутых СФ в присутствии

апертуры и без нее одинакова с точностью до константы. Метод собственных функций оптических систем с гауссовыми ограничивающими апертурами был рассмотрен при интерпретации механизмов преобразования полей оптическими Фурье-системами и системами, формирующими изображения [7].

В данной работе исследуется свойство инвариантности вытянутых СФ к интегральному преобразованию с sinc-ядром на симметричном ограниченном интервале. Для приближенного расчета СФ используется их аппроксимация конечными рядами функций Лежандра и сферических функций Бесселя [8]. Для вычисления коэффициентов такого разложения в данной работе предложен простой алгоритм.

### 2. Вытянутые сфероидальные функции

Сфероидальные координат представляют собой вращательно-симметричные координаты и могут быть получены вращением вокруг осей симметрии плоской эллиптической системы координат, состоящей из взаимно ортогональных софокусных эллипсов и гипербол. Вытянутые сфероидальные координаты возникают при вращении вокруг большой оси эллипсов, координатными поверхностями служат софокусные вытянутые эллипсоиды вращения и двуполостные гиперболоиды. При этом фокусы плоской эллиптической системы координат остаются на месте. Вытянутые сфероидальные координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  связаны с декартовыми координатами точки  $x$ ,  $y$ ,  $z$  следующими формулами:

$$\begin{aligned}x &= \frac{d}{2}((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2))^{1/2} \cos \varphi = \rho \cos \varphi \\y &= \frac{d}{2}((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2))^{1/2} \sin \varphi = \rho \sin \varphi \\z &= \frac{d}{2} \xi \eta\end{aligned}\quad (1)$$

где  $d$  – расстояние между фокусами,  $\xi \in (1, \infty)$ ,  $\eta \in (-1, 1)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Волновое уравнение в вытянутых сфероидальных координатах:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \\&+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 - \eta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \\&+ c^2 (\xi^2 - \eta^2) \Phi = 0\end{aligned}\quad (2)$$

где  $c = kd/4$ ,  $k$  – волновое число.

Положим, что [8]

$$\Phi = R_{mn}(c, \xi) S_{mn}(c, \eta) \exp(im\varphi). \quad (3)$$

Тогда радиальное решение  $R_{mn}(c, \xi)$  и угловое решение  $S_{mn}(c, \eta)$  будут удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{d}{d\xi} R_{mn}(c, \xi) \right] - \left( \chi_{mn} - c^2 \xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right) R_{mn}(c, \xi) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} S_{mn}(c, \eta) \right] + \left( \chi_{mn} - c^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) S_{mn}(c, \eta) = 0, \quad (5)$$

где  $\chi_{mn}$  – постоянные разделения.

В данной работе рассматриваются вытянутые угловые и радиальные функции первого рода, имеющие вид:

$$R_{mn}^{(1)}(c, \xi) = \left( \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(c) \right)^{-1} \times \quad (6)$$

$$\times \left( \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=0,1}^{\infty} i^{r+m-n} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(c) j_n(c\xi)$$

$$S_{mn}^{(1)}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^m(\eta), \quad (7)$$

где  $j_n(x)$  – сферическая функция Бесселя,  $P_n^m(x)$  – присоединенная функция Лежандра первого рода, суммирование выполняется либо по четным, либо по нечетным значениям  $r$  в соответствии с четностью  $n-m$ .

Для коэффициентов в (6), (7) выполняются следующие рекуррентные соотношения [8]:

$$\begin{aligned} \alpha_r d_{r+2}^{mn}(c) + (\beta_r - \chi_{mn}) d_r^{mn}(c) + \gamma_r d_{r-2}^{mn}(c) &= 0, \\ d_{-2}^{mn}(c) &= d_{-1}^{mn}(c) = 0, \\ \alpha_r &= \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} c^2, \\ \beta_r &= (m+r)(m+r+1) + \\ &+ \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} c^2, \\ \gamma_r &= \frac{r(r-1)}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)} c^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения (8) определяют коэффициенты  $d_r^{mn}(c)$  с точностью до множителя, который задается нормировкой вытянутых СФ.

Для вытянутых СФ нулевого порядка выполняется уравнение вида [9]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(c(x-y))}{\pi(x-y)} \psi_n(y) dy = \lambda_n \psi_n(x), \quad (9)$$

где  $\lambda_n$  – собственные числа,  $\psi_n(x) = R_{0n}(c, x)$ , либо  $\psi_n(x) = S_{0n}(c, x)$ .

В [9] также приведены приближенные формулы вычисления собственных чисел  $\lambda_n$  и  $\chi_n$ :

для  $n$  фиксированного и  $c$  малого:

$$\begin{aligned} \chi_n &= n(n+1) + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right] c^2 + O(c^4), \\ \lambda_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!} \right]^2 c^{2n+1} \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{(2n+1)}{(2n-1)^2(2n+3)^2} c^2 + O(c^4) \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

для  $n$  и  $c$  больших:

$$\begin{aligned} \chi_n &= c^2 + 2bc + \frac{b^2 - 1}{2} - \frac{b^2 - b}{8c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \lambda_n &= \frac{1}{1 + \exp(\pi b)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } b = \frac{\frac{\pi}{2}n - c + \frac{\pi}{4}}{\frac{\gamma}{2} + 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln c}, \quad \gamma = 0.5772156649\dots - \text{постоянная Эйлера-Машерони.}$$

### 3. Алгоритм вычисления коэффициентов

Обычно предлагаемые [8,10] способы решения системы (8) основаны на выражении:

$$\frac{d_r^{mn}(c)}{d_{r+2}^{mn}(c)} = \frac{-\alpha_r}{\beta_r - \chi_{mn} + \gamma_r \frac{d_{r-2}^{mn}(c)}{d_r^{mn}(c)}}, \quad (12)$$

в результате последовательного применения которого получается конечная цепная дробь.

Однако этот процесс приводит к цели, только если известны собственные значения  $\chi_{mn}(c)$ . Действительно, для произвольных  $\chi$ , асимптотическое поведение коэффициентов при  $r \rightarrow \infty$  [10]:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{c^2}{4} + O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \beta_r &= r^2 + O(r), \\ \gamma_r &= \frac{c^2}{4} + O\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned}$$

и отношение коэффициентов  $\frac{d_r^{mn}(c)}{d_{r+2}^{mn}(c)}$ , полученное с помощью (12), убывает как  $\frac{c^2}{4r^2}$ , ряды (6) и

(7) расходятся. Только при специальном выборе  $\chi$  можно скомпенсировать рост знаменателя в правой части (12) и сделать так, чтобы отношение

$\frac{d_r^{mn}(c)}{d_{r+2}^{mn}(c)}$  возрастало как  $\frac{4r^2}{c^2}$ .

Таким образом, для численного расчета вытянутых СФ через ряды (6), (7) нужно знать точное значение  $\chi_{mn}(c)$ , что предполагает трудоемкую процедуру уточнения известных асимптотик. Практика показала, что даже значения  $\chi_{mn}(c)$ , приведенные в

[9] с точностью до 8-ой значащей цифры, ведут к расходимости ряда (7).

В связи с описанными трудностями в данной работе предлагается использовать следующий алгоритм вычисления коэффициентов  $d_r^{mn}(c)$ .

Будем решать систему (8) не от «начала», а с «конца»:

$$\frac{d_r^{mn}(c)}{d_{r-2}^{mn}(c)} = \frac{-\gamma_r}{\beta_r - \chi_{mn} + \alpha_r \frac{d_{r+2}^{mn}(c)}{d_r^{mn}(c)}}. \quad (13)$$

Предположим, что ряд (7) можно оборвать на  $N$ -ом члене. Для этого ряд должен сходиться и  $\frac{d_{N+2}^{mn}(c)}{d_N^{mn}(c)}$  должно быть достаточно мало. Для выполнения условия сходимости ряда можно положить, что (при  $r \rightarrow \infty$ )

$$\frac{d_{r+2}^{mn}(c)}{d_r^{mn}(c)} \sim \frac{c^2}{4r^2}. \quad (14)$$

Тогда ряд можно обрывать при  $N = \frac{c}{2\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  -

некоторое заданное число меньше единицы (чем оно меньше, тем длиннее ряд). И коэффициенты вычисляются в обратном порядке (13), начиная с

$$\frac{d_{N+2}^{mn}(c)}{d_N^{mn}(c)} = \frac{c^2}{4N^2}.$$

#### 4. Численные результаты

Так как для приближения СФ конечными рядами важно знать точное значение  $\chi_{mn}(c)$ , оценим точность формул (10)-(11). Понятно, что формула (10) будет давать хорошие результаты при  $c \leq 1$ . На рис. 1 показано распределение собственных чисел  $\lambda_n$  и  $\chi_n$  для  $n = \overline{0,20}$  при  $c=1$ . Вертикальные штрихи соответствуют точным значениям [9], а значения на кривой получены по формуле (10).

Для  $c > 3$  можно пользоваться формулой (11), ошибка в этом случае не превышает 10% и уменьшается с ростом  $c$ . Для алгоритма (13)-(14) вычисления коэффициентов ряда (7) такой точности оказывается достаточно. На рис. 2 показано сравнение точных [9] и вычисленных по (11) собственных чисел  $\lambda_n$  и  $\chi_n$  для  $n = \overline{0,20}$  при  $c=15$ . На рис. 2б хорошо

видно характерное распределение  $\lambda_n(c)$ : для  $n \leq \frac{2c}{\pi}$  ( $c$  - фиксированное) собственные числа равны или близки к единице, затем с ростом  $n$  происходит быстрый спад до нуля [1].

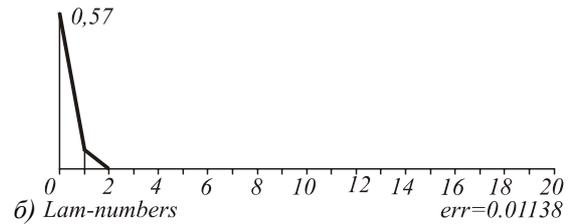
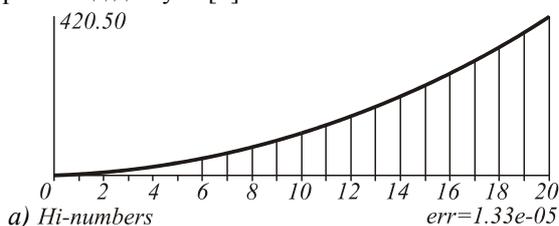


Рис. 1. Сравнение табличных значений [9] (показаны вертикальными штрихами) и рассчитанных по (10) (показаны сплошной линией) собственных чисел СФ нулевого порядка  $\chi_n$  (а) и  $\lambda_n$  (б) для  $n = \overline{0,20}$  при  $c=1$ .

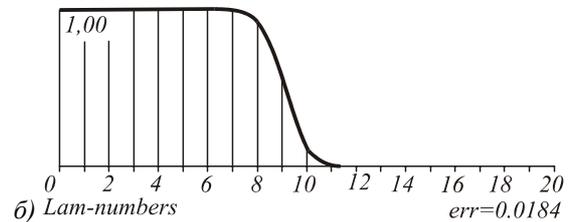
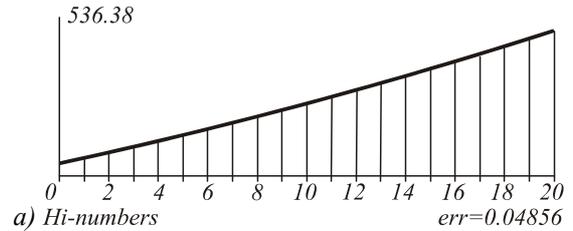


Рис. 2. Сравнение табличных значений [9] (показаны вертикальными штрихами) и рассчитанных по (11) (показаны сплошной линией) собственных чисел СФ нулевого порядка  $\chi_n$  (а) и  $\lambda_n$  (б) для  $n = \overline{0,20}$  при  $c=15$ .

Для оценки точности предложенного алгоритма вычисления коэффициентов ряда в приближении вытянутых СФ было проведено сравнение полученных результатов с известными.

В работе [11] приведены табличные значения рассматриваемых коэффициентов для  $m=0$ ,  $n=\overline{0,3}$ ,  $r=\overline{0,15}$ ,  $c=\overline{0,5}$ . Чтобы расширить диапазон изменения параметра  $c$  можно воспользоваться приведенным там же разложением в степенные ряды:

$$\frac{d_{n-m \pm Q}^{mn}(c)}{d_{n-m}^{mn}(c)} \approx \sum_{q=Q}^{Q+K} \mu_{Q,q}^{mn} \cdot c^q, \quad (15)$$

значения  $\mu_{Q,q}^{mn}$  даны для  $m=\overline{0,9}$ ,  $n=\overline{0,9}$ ,  $Q=\overline{2,4,6}$ ,  $K=6$ .

В Таблице 1 приведены результаты сравнения коэффициентов  $d_r^{03}(c)$ , рассчитанных предлагаемым в данной работе методом (13)-(14) с табличными [11] и вычисленными по (15). Параметр  $\delta_c$ , приведенный в последней строке Таблице 1 соответствует среднеквадратичному отклонению рассчитанных коэффициентов от точно известных.

Видно, что предлагаемый метод (13)-(14) позволяет вычислять коэффициенты  $d_r^{mn}(c)$  очень точно (погрешность  $\delta_c < 10^{-6}$ ) практически не зависимо от параметра  $c$ . В то время как приближение по формуле (15) дает хорошие результаты только при небольших значениях  $c \leq 5$ .

Таблица 1. Сравнение коэффициентов  $d_r^{03}(c)$ , рассчитанных предлагаемым в данной работе методом (13)-(14) с табличными [11] и вычисленными по (15).

	c=2			c=5			c=7	
	(13)-(14)	(15)	[11]	(13)-(14)	(15)	[11]	(13)-(14)	(15)
$d_1^{03}$	0.0706907	0.0707347	0.0706910	0.4470172	0.4567361	0.4470179	0.9327397	0.7008349
$d_3^{03}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$d_5^{03}$	-0.070965	-0.070951	-0.070965	-0.526796	-0.517587	-0.526797	-1.50727	-1.42605
$d_7^{03}$	0.0018993	0.0018880	0.0018993	0.0933217	0.0746483	0.0933222	0.5688822	0.2907107
$d_9^{03}$	$-2.754 \cdot 10^{-5}$	$-2.727 \cdot 10^{-5}$	$-2.754 \cdot 10^{-5}$	$-8.712 \cdot 10^{-3}$	$-6.659 \cdot 10^{-3}$	$-8.712 \cdot 10^{-3}$	-0.108032	-0.050142
$d_{11}^{03}$	$2.533 \cdot 10^{-7}$	-	$2.533 \cdot 10^{-7}$	$5.101 \cdot 10^{-4}$	-	$5.101 \cdot 10^{-4}$	0.0126648	-
$d_{13}^{03}$	$-1.618 \cdot 10^{-9}$	-	-	$-2.063 \cdot 10^{-5}$	-	$-2.063 \cdot 10^{-5}$	$-1.017 \cdot 10^{-3}$	-
$d_{15}^{03}$	$7.615 \cdot 10^{-12}$	-	-	$6.125 \cdot 10^{-7}$	-	$6.121 \cdot 10^{-7}$	$5.981 \cdot 10^{-5}$	-
$d_{17}^{03}$	$-2.75 \cdot 10^{-14}$	-	-	$-1.395 \cdot 10^{-8}$	-	-	$-2.689 \cdot 10^{-6}$	-
...	...	-	-	...	-	-	...	-
$\delta_c$	$6.7 \cdot 10^{-7}$	$6.15 \cdot 10^{-5}$		$7.77 \cdot 10^{-7}$	0.0193		0.1605	

На рис. 3 приведены графики распределения коэффициентов  $d_r^{00}(1)$  (рис. 3а) и  $d_r^{03}(1)$  (рис. 3б) для  $c=1, r=0,10$ . Видно, что при малых значениях параметра  $c$  коэффициент  $d_n^{0n}(c)$  значительно преобладает над другими.

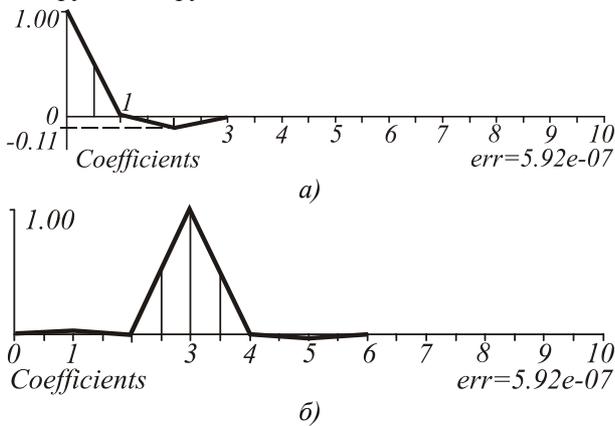


Рис. 3. Графики распределения коэффициентов (а)  $d_r^{00}(1)$  и (б)  $d_r^{03}(1)$  для  $c=1$ .

На рис. 4 приведены графики распределения коэффициентов  $d_r^{00}(4)$  (рис. 4а) и  $d_r^{03}(4)$  (рис. 4б) для  $c=4, r=0,40$ . Видно, что с ростом параметра  $c$  количество ненулевых коэффициентов становится все больше, а при  $c \geq \pi n/2$   $d_n^{0n}(c)$  перестает быть максимальным (в этом случае собственные числа  $\lambda_n(c)$  приближаются к единице).

Судить о точности представления СФ конечными рядами (6)-(7) длины  $N$  с коэффициентами (13)-(14) можно по выполнению одного из основных свойств СФ (9). В Таблице 2 приведены значения среднеквадратичного отклонения:

$$\delta_S = \sqrt{\frac{\int_{-1}^1 [\psi_n(x) - \tilde{\psi}_n(x)]^2 dx}{\int_{-1}^1 \psi_n^2(x) dx}}, \quad (16)$$

$$\tilde{\psi}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^1 \frac{\sin(c(x-y))}{\pi(x-y)} \psi_n(y) dy$$

для вытянутых угловых СФ нулевого порядка, представленных конечными рядами (7) с использованием точных и рассчитанных коэффициентов  $d_r^{0n}(c)$ .

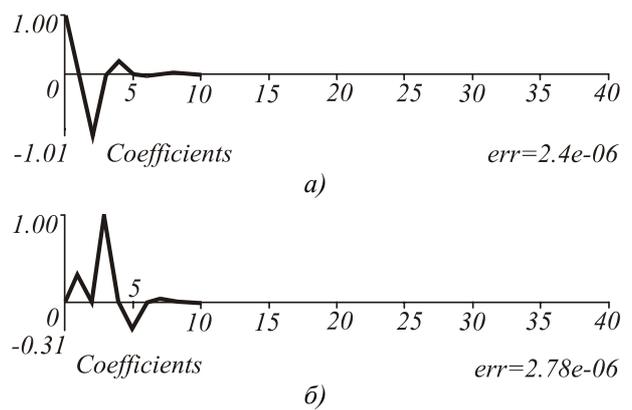


Рис. 4. Графики распределения коэффициентов (а)  $d_r^{00}(4)$  и (б)  $d_r^{03}(4)$  для  $c=4$ .

Таблица 2. Среднеквадратичное отклонение  $\delta_S$  (16) для вытянутых угловых СФ нулевого порядка, представленных конечными рядами (7) с использованием табличных [11] и рассчитанных по (13)-(14) коэффициентов  $d_r^{0n}(c)$ .

c	n=0		n=1		n=2		n=3		n=4	n=5
	(13)-(14)	[11]	(13)-(14)	[11]	(13)-(14)	[11]	(13)-(14)	[11]	(13)-(14)	(13)-(14)
1	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	0.7667	0.7663	-	-	-	-
2	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	0.03622	0.03633	0.8649	0.8649	-	-
3	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$7.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	0.1239	0.1236	-	-
4	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	0.01602	0.01598	0.2931	-
5	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	0.3976	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	0.00254	0.00265	0.05265	0.539
7	$1.4 \cdot 10^{-5}$	-	$7.9 \cdot 10^{-5}$	-	$3.4 \cdot 10^{-4}$	-	$4.6 \cdot 10^{-4}$	-	0.00185	0.02788
10	$1.3 \cdot 10^{-6}$	-	$8.3 \cdot 10^{-6}$	-	$4.2 \cdot 10^{-5}$	-	$1.8 \cdot 10^{-4}$	-	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$
12	$7.9 \cdot 10^{-7}$	-	$1.7 \cdot 10^{-6}$	-	$8.1 \cdot 10^{-6}$	-	$4.9 \cdot 10^{-5}$	-	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$

Из Таблицы 2 видно, что результаты для рассчитанных СФ очень близки к полученным с использованием точных коэффициентов  $d_r^{0n}(c)$ . Нужно заметить, что свойство инвариантности СФ (9) выполняется с высокой точностью для значений параметра  $c \geq \pi n/2$ , когда собственные числа  $\lambda_n(c) \geq 0.1$ . В противном случае собственные числа  $\lambda_n(c)$  близки к нулю и выражение (9) становится плохо обусловленным.

На рис. 5 приведены примеры нарушения свойства инвариантности СФ (9). Кривая 1 – исходная СФ, кривая 2 – функция, полученная после преобразования (9). Видны сильные нарушения для  $S_{02}(1,x)$ ,  $\lambda_2(1) \approx 0.0012$ , (рис. 5а) и  $S_{03}(2,x)$ ,  $\lambda_3(2) \approx 0.0011$ , (рис. 5в) и менее значительные для  $S_{02}(2,x)$ ,  $\lambda_2(2) \approx 0.036$ , (рис. 5б) и  $S_{03}(3,x)$ ,  $\lambda_3(3) \approx 0.018$ , (рис. 5г).

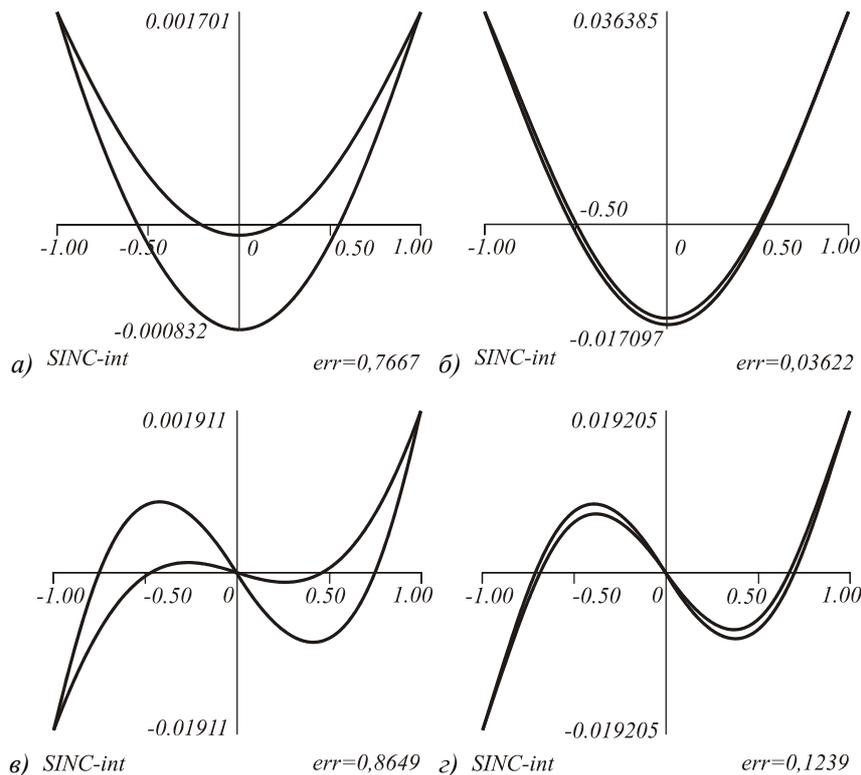


Рис. 5. Примеры нарушения свойства инвариантности СФ (9) для (а)  $S_{02}(1,x)$ , (б)  $S_{02}(2,x)$ , (в)  $S_{03}(2,x)$  и (г)  $S_{03}(3,x)$ , кривая 1 – исходная СФ, кривая 2 – функция, полученная после преобразования (9).

Тот же эффект нарушения свойства инвариантности (9) наблюдался для табулированных [11] СФ. При этом среднеквадратичное отклонение  $\delta_f$  СФ, рассчитанных по (13)-(14) от табулированных функций составило не более 13% (см. Таблицу 3).

На рис. 6 приведены сравнительные графики табулированных [11] и рассчитанных СФ нулевого порядка для  $c=5$  и  $n=0,3$ .

Таблица 3. Среднеквадратичное отклонение  $\delta_f$  СФ нулевого порядка рассчитанных по (13)-(14) от табулированных функций [11].

$c$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	0.0038	0.0364	0.0931	0.1273
2	0.0134	0.0275	0.0882	0.1266
3	0.0241	0.0227	0.0775	0.1241
4	0.0324	0.0306	0.0619	0.1166
5	0.0373	0.0412	0.0578	0.1027

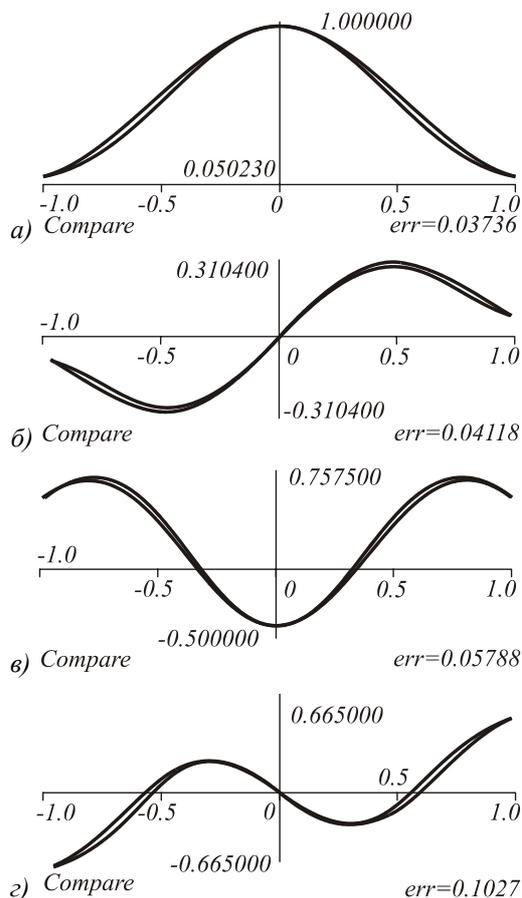


Рис. 6. Сравнительные графики табулированных [11] и рассчитанных СФ нулевого порядка для  $c=5$  и  $n=0, 1, 2, 3$ .

В прикладных задачах, связанных с передачей информации, интерес представляют СФ, имеющие высокую концентрацию энергии на заданном интервале, то есть собственные числа которых близки к единице. В этом случае свойство инвариантности (9) выполняется с очень высокой точностью (ошибка менее 0.01%).

### Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

- разработан простой алгоритм вычисления коэффициентов в приближении СФ конечными рядами полиномов Лежандра и сферических

функций Бесселя, позволяющий получать такие коэффициенты с высокой точностью;

- на численных примерах показано, что СФ нулевого порядка, рассчитанные через аппроксимацию конечными рядами (6)-(7), удовлетворяют свойству инвариантности (9) к интегральному преобразованию с sinc-ядром на симметричном ограниченном интервале с высокой точностью при  $c \geq n\pi/2$ . В противном случае собственные числа  $\lambda_n(c)$  близки к нулю и выражение (9) становится плохо обусловленным, наступает нарушение свойства инвариантности, что было обнаружено и для табулированных СФ.

### Литература

1. D. Slepian, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – I, The Bell System Technical Journal, 1961, **40**, p.43-46.
2. D. Slepian, Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions, J. Math. & Phys., 1965, **44**, p. 99-140
3. H.J. Landau, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – II, The Bell System Technical Journal, 1961, **40**, p.65-84.
4. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, «Методы теории целых функций в радиофизике теории связи и оптике», М., 1962.
5. D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions, The Bell System Technical Journal, 1964, **43**, p.3009-3057.
6. Montgomery W.D., Algebraic formulation of diffraction applied to self-imaging, J. Opt. Soc. Am., **58**(8), 1112-1124 (1968).
7. Коблянский Ю.В., Курашов В.Н., Использование метода собственных функций оптических систем для статистического анализа пятнистых картин, Оптика и спектроскопия, 1984, **57**(4), с. 708-710.
8. А. Лоуэн, Сфероидальные волновые функции, в кн. «Справочник по специальным функциям» под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, М., «Наука», 1979, 832 с.
9. D. Slepian, E. Sonnenblick, Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order, The Bell System Technical Journal, 1965, **44**, p.1745-1763.
10. И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, «Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции», М., 1976
11. Фламмер К., Таблицы волновых сфероидальных функций. – М.: ВЦ АН СССР, 1962. – (БМТ; Вып. 17).

# A finite series approximation of spheroidal wave functions

*S.N. Khonina*

*Image Processing Systems Institute of RAS*

## **Abstract**

The article considers the approximation of elongated spheroidal functions by finite series and proposes a method for calculating the coefficients of such series. The paper provides a numerical performance analysis of the invariance property of elongated spheroidal zero-order functions in relation to an integral transformation with a sinc-kernel on a symmetric bounded interval.

*Citation:* Khonina SN. A finite series approximation of spheroidal wave functions. *Computer Optics*; 1999; 19: 65 – 70.

## **References**

- [1] D. Slepian, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. *Fourier Analysis and Uncertainty – I*, The Bell System Technical Journal, 1961, 40, p.43-46.
- [2] D. Slepian, Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions, *J. Math. & Phys.*, 1965, 44, p. 99-140
- [3] H.J. Landau, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. *Fourier Analysis and Uncertainty – II*, The Bell System Technical Journal, 1961, 40, p.65-84.
- [4] Khurgin YI, Yakovlev VP. *Methods of the theory of entire functions in radio physics, communications theory, and optics*. Moscow: Fizmatgiz; 1962.
- [5] D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions. *Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions*, The Bell System Technical Journal, 1964, 43, p.3009-3057.
- [6] Montgomery W.D., Algebraic formulation of diffraction applied to self-imaging, *J. Opt. Soc. Am.*, 58(8), 1112-1124 (1968).
- [7] Koblyansky YV, Kurashov VN. Application of the method of eigenfunctions of optical systems for the statistical analysis of speckle pictures, *Optika i Spectroscopiya*; 1984; 57(4): 708-710.
- [8] Lowan A. Spheroidal wave functions in Reference book on special functions edited by Abramovits M, Stigan I. Moscow: Nauka Publisher; 1979: 832.
- [9] D. Slepian, E. Sonnenblick, Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order, *The Bell System Technical Journal*, 1965, 44, p.1745-1763.
- [10] Komarov IV, Ponomarev LI, Slavyanov SY. *Spheroidal and coulombian spheroidal functions*. Moscow: Nauka Publisher; 1976
- [11] Flammer K. *Tables of spheroidal wave functions*, *Vych. Tsentr Akad. Nauk SSSR*; Moscow; 1962.