

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА С КРУТЫМ ФРОНТОМ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВАКУУМЕ

А.В. Гладких, С.И. Харитонов

Институт систем обработки изображений РАН  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Введение

Целью настоящей работы является исследование эволюции пространственно-временной структуры поля импульса с крутым передним и задним фронтом при распространении в вакууме. Обращено внимание на процессы установления и спада поля импульса. Из-за специфики исследуемых процессов (быстрота изменения во времени) не применим традиционно используемый в оптике метод медленно меняющихся амплитуд [1]. Исследование проводилось на основе решения дифракционного интеграла Френеля для функции частотного спектра первоначального импульса [2]. Представленный в данной работе метод и полученные результаты справедливы для импульсов, длительностью не меньше двадцати периодов.

## Основные уравнения

В данной работе рассматривается распространение импульса в вакууме. Использовалась следующая нормировка: скорость света  $c$  и период несущего колебания  $T_0$  приравнялись к единице. Все временные переменные выражались через количество периодов, а пространственные переменные через количество длин волн несущего колебания.

Зададим поле во входной плоскости в виде  $E(x, y, z = 0, t) = \varphi(x, y)\gamma(t)$ . Эволюция пространственно-временной структуры поля импульса в скалярном приближении при распространении в вакууме описывается уравнением [1, 3, 4]

$$E(x, y, z, t) = \int_0^{\infty} \frac{-i\omega}{2\pi cz} g(\omega) \exp\left(i\omega \frac{z}{c} - i\omega t\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, v) \exp\left\{i \frac{\omega}{2cz} (u-x)^2 + \right. \\ \left. + (v-y)^2\right\} dudvd\omega \quad (1)$$

где  $g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) \exp(i\omega t) dt$  - частотный спектр входного импульса. При этом не накладывается никаких ограничений на исходное пространственно-временное распределение поля.

Рассмотрим импульс с ярко выраженными передним и задним фронтами

$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos(\varphi_0 - \omega_0 t); & |t| \leq T \\ 0; & |t| > T \end{cases} \quad (2)$$

где  $\omega_0 = 2\pi$  - несущая частота;  $\varphi_0 = \pi/2$  для обеспечения условия  $\gamma(\pm T) = 0$ ;  $2T$  - длительность импульса.

Частотный спектр импульса (2)

$$g(\omega) = \frac{1}{2} [\exp(i\varphi_0) \tilde{g}(\omega, \omega_0) + \exp(-i\varphi_0) \tilde{g}(\omega, -\omega_0)] \quad (3)$$

где

$$\tilde{g}(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\text{Sin}(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0} \quad (4)$$

Функция (3) удовлетворяет условию для частотного спектра реальных импульсов  $g(-\omega) = g^*(\omega)$  [3].

Для упрощения дальнейших выкладок проанализируем функцию (3) и способ ее использования в (1). Первое слагаемое в (3) существенно отлично от нуля при положительных значениях  $\omega$  ( $\omega_0 > 0$ ), в то время как второе при отрицательных  $\omega$ . При выполнении условия

$$\frac{\int_0^{\infty} |\tilde{g}(\omega, \omega_0)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega, \omega_0)|^2 d\omega} \ll 1 \quad (5)$$

и учитывая, что интегрирование в (1) ведется только по  $\omega > 0$ , предлагается второе слагаемое в (3) приравнять к нулю. Условие (5) выполняется для  $T \geq 10$ . С учетом всего вышесказанного, рассмотрим временную зависимость первоначального импульса в виде

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \exp(i\varphi_0 - i\omega_0 t); & |t| \leq T \\ 0; & |t| > T \end{cases} \quad (2a)$$

Частотный спектр (2a) равен (4).

Т.к.  $\tilde{g}(\omega, \omega_0)$  в области отрицательных частот принимает значения мало отличные от нуля, то нижний предел интегрирования в (1) можно положить равным минус бесконечности. Подставляя (4) в (1) и интегрируя по  $d\omega$ , получаем интегральное представление для поля импульса

$$\begin{aligned}
E(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi cz} \exp(i\varphi_0 + i\omega_0 t) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta_1 + T) \varphi(u, v) dudv - \\
&- \frac{1}{2\pi cz} \exp(i\varphi_0 - i\omega_0 t) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta_1 - T) \varphi(u, v) dudv - \\
&- \frac{\omega_0 i}{2\pi cz} \iint_{G(u, v)} \tilde{\gamma}(\eta_1) \varphi(u, v) dudv
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \eta_1 = t - \frac{z}{c} - \frac{(u-x)^2}{2cz} - \frac{(v-y)^2}{2cz}.$$

Первое и второе слагаемое в (6) описывают поле, создаваемое передним и задним фронтами первоначального импульса соответственно. При выполнении условия  $\text{Im}(\varphi(u, v)) = 0$ , т.е. для начального импульса с плоским волновым фронтом, учитывая, что  $\text{Re}[\tilde{\gamma}(\pm T)] = 0$ , вклад первого и второго слагаемого в поле равен нулю. На область интегрирования третьего слагаемого наложены ограничения из условия  $|\eta_1| \leq T$ , возникающего при задании временного профиля первоначального импульса (2а).

Из полученного интегрального представления поля следует, что временная структура импульса влияет на эволюцию пространственно-временного распределения поля при его распространении.

Рассмотрим импульс с гауссовским распределением в поперечном сечении

$$\varphi(u, v) = \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{\sigma^2}\right). \text{ Из (6) получаем следующие выражения для поля:}$$

$$\eta < -T$$

$$E(x, y, z, t) \equiv 0 - \text{поле не дошло}$$

$$\text{до этой точки} \quad (7.1)$$

$$|\eta| < T$$

$$\begin{aligned}
E(x, y, z, t) &= -\frac{iA_0\omega_0}{2zc} \times \\
&\times \exp\left(i\varphi_0 - i\omega_0\eta - \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \times \\
&\times \int_0^{\rho_1^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right) I_0\left(2\frac{r\rho}{\sigma^2}\right) d\rho^2
\end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\eta > T$$

$$\begin{aligned}
E(x, y, z, t) &= -\frac{iA_0\omega_0}{2zc} \times \\
&\times \exp\left(i\varphi_0 - i\omega_0\eta - \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \times \\
&\times \int_{\rho_2^2}^{\rho_1^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right) I_0\left(2\frac{r\rho}{\sigma^2}\right) d\rho^2
\end{aligned} \quad (7.3)$$

где

$\rho_1 = \sqrt{2zc(\eta + T)}$  - радиус окружности во входной плоскости с центром в точке  $(u = x, v = y)$ , с которой начальное поле уже влияет на поле в точке наблюдения  $(x, y, z, t)$ ;

$\rho_2 = \sqrt{2zc(\eta - T)}$  - радиус окружности во входной плоскости, с которой начальное поле уже не влияет на поле в точке наблюдения;

$$\eta = t - \frac{z}{c} - \text{"бегущее время"};$$

$I_0(\dots)$  - модифицированная функция Бесселя [5];

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{a^2(z)} = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{i\omega_0}{2zc}.$$

Формулы (7) дают окончательное выражение поля импульса вида (2а) при  $z > 0$  для любого момента времени.

В случае  $\sigma \rightarrow \infty$  (что соответствует бесконечному в поперечном сечении импульсу) из (7) получаем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} E(x, y, z, t) = A_0 \gamma(\eta)$$

- т.е. импульс распространяется без изменения.

При  $\rho_1 \rightarrow \infty$ , т.е. когда поле в исследуемой точке формируется всем первоначальным импульсом, получаем обычный гауссов пучок в параболическом приближении [1], что и следовало ожидать

$$E_c(x, y, z, t) = \frac{\sigma^2}{\rho^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{\rho^2(z)}\right) \tilde{\gamma}(\eta) \quad (8)$$

$$\text{где } \rho(z) = \sigma \sqrt{1 + i \frac{2z}{\kappa_0 \sigma^2}}.$$

Поле на оси определяется выражениями

$$|\eta| < T$$

$$\begin{aligned}
E(x, y, z, t) &= -\frac{iA_0\omega_0}{2zc} a^2(z) \times \\
&\times \exp(i\varphi_0 - i\omega_0\eta) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho_1^2}{a^2}\right) \right]
\end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\eta > T$$

$$E(x, y, z, t) = -\frac{iA_0\omega_0}{2zc} a^2(z) \times \exp(i\varphi_0 - i\omega_0\eta) \left[ \exp\left(-\frac{\rho_2^2}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{\rho_1^2}{a^2}\right) \right] \quad (9.2)$$

Время нарастания амплитуды поля на оси ( и время спада ) равно

$$\Delta\eta \approx \frac{\sigma^2}{2zc} \quad (10)$$

Видно, что длительность процесса установления и спада амплитуды поля обратно пропорционально расстоянию до входной плоскости. Элементарные оценки показывают, что эти процессы могут занимать от нескольких периодов до долей периода.

Перед обсуждением результатов моделирования следует сделать замечание о величинах, которые следует рассматривать в нашем случае.

При стандартном рассмотрении поля в скалярном приближении его задают в виде  $E = A \exp(i\varphi)$ . Плотность энергии электромагнитного поля  $Q$  [6], величина, регистрируемая приборами, определяется уравнением

$$Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \tilde{E})^2 \right] \quad (11)$$

где  $\tilde{E} = \text{Re}(E)$ ,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}$  - для полей с цилиндрической симметрией. Получаем, что

$$\tilde{E}_t = A_t \text{Cos}(\varphi) + A\varphi_t \text{Cos}(\varphi + \pi/2) \quad (12.1)$$

$$\tilde{E}_z = A_z \text{Cos}(\varphi) + A\varphi_z \text{Cos}(\varphi + \pi/2) \quad (12.2)$$

$$\tilde{E}_r = A_r \text{Cos}(\varphi) + A\varphi_r \text{Cos}(\varphi + \pi/2) \quad (12.3)$$

где  $\varphi \sim \omega t - kz$ . Учитывая малость длин волн для электромагнитного спектра, первыми слагаемыми в первых двух уравнениях пренебрегают по сравнению со вторым, что эквивалентно применению метода медленно меняющихся амплитуд.

Значение слагаемых третьего уравнения так же малы по сравнению с оставленными членами. Учитывая, что среднее значение  $\text{Cos}^2(\varphi + \pi/2)$  за период равно 0.5, получаем - плотность энергии электромагнитного поля для длинных импульсов пропорциональна  $A^2$  или  $|E|^2$ .

В случае же переходных процессов метод медленно меняющихся амплитуд не применим. Для данных процессов следует рассматривать  $|\text{Re}(E)|$ , т.е. действительное значение поля.

При помощи полученных уравнений (7) исследуем эволюцию пространственно-временной структуры импульса со следующими параметрами:  $T = 10$ ,  $a_0 = 10^3$ .

На рисунках 1-3 представлены распределение действительной части и амплитуды поля рассчитанного по формуле (7) для различных расстояний от входной плоскости. Видно, что в пространственно-временном распределении амплитуды поля наблюдаются ярко выраженные процессы установления и спада, их длительность оценивается формулой (10). На переднем фронте наблюдается всплеск амплитуды, который уменьшается по мере удаления от входной плоскости. В ходе выхода амплитуды поля на стационарное значение, она претерпевает осцилляции с частотой  $\omega_0$ . На периферии пучка переходные процессы начинаются позже и длятся дольше, чем на оси. В пространственно-временном распределении  $|\text{Re}(E)|$  не наблюдается сколь либо заметных переходных процессов. Можно сделать вывод, что для физически наблюдаемых параметров электромагнитного импульса процесс установления и спада происходит мгновенно.

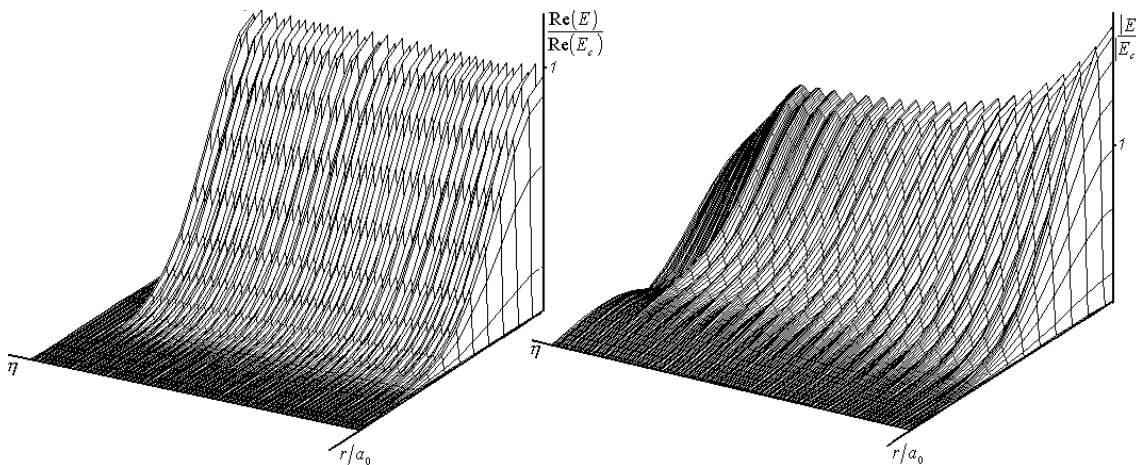


Рис.1. Радиальное распределение  $|\text{Re}(E)|$  и  $|E|$  для импульса (2а) на расстоянии  $z = 100 \cdot a_0$ .

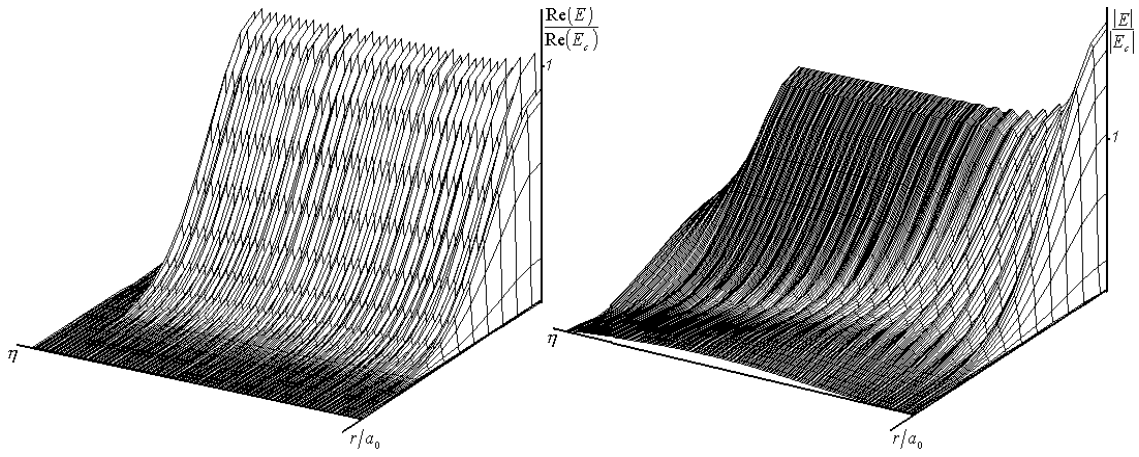


Рис.2. Радиальное распределение  $|\text{Re}(E)|$  и  $|E|$  для импульса (2a) на расстоянии  $z = 300 \cdot a_0$ .

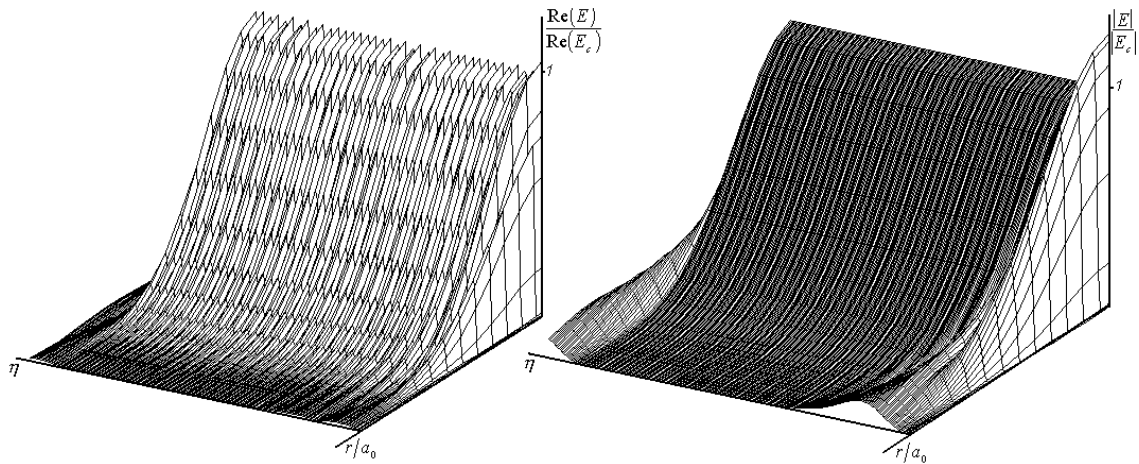


Рис.3. Радиальное распределение  $|\text{Re}(E)|$  и  $|E|$  для импульса (2a) на расстоянии  $z = 1500 \cdot a_0$ .

### Вывод

Специальным подбором функции временного профиля с крутым фронтом удалось получить удобное интегральное представление для поля импульса с гауссовым распределением в поперечном сечении. Показано, что для поля импульсов, длительностью более двадцати периодов, отсутствуют ярко выраженные переходные процессы (амплитуда переходных процессов пренебрежимо мала по сравнению с абсолютным значением  $|\text{Re}(E)|$ ).

Результаты, представленные в данной статье, являются справедливыми для любых волновых процессов описываемых волновым уравнением.

### Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П., Теория волн. - М.: Наука, 1979.
2. Гладких А.В., Уравнения для описания пространственно-временной эволюции предельно-коротких импульсов// Компьютерная оптика- 2000, т. 20.
3. Борн М., Вольф Э., Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
4. Бельский А.М., Хапалюк А.П., О распространении пространственно-ограниченного импульса в изотропной среде// Журнал прикладной спектроскопии- 1972, т. 27, в. 1, стр. 150-155.
5. Справочник по специальным функциям М.: Наука, 1979.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Квантовые поля. -М.: Наука, 1993.

# **Analysis of the space-time structure of a steep electromagnetic impulse field when propagating in vacuum**

*A.V. Gladkikh, S.I. Kharitonov  
Image Processing Systems Institute of RAS  
Samara State Aerospace University*

## ***Abstract***

The aim of this work is to study the evolution of the space-time structure of the field of an electromagnetic impulse with a steep leading and trailing edge when propagating in vacuum. Attention is drawn to the processes of the impulse field setting and falling. Due to the specifics of the processes under study (the rate of change in time), the slow-changing amplitudes method, which is traditionally used in optics, is not applicable [1]. The research was performed on the basis of the solution of the Fresnel diffraction integral for the function of the frequency spectrum of the initial impulse [2]. The method presented in this work and the results obtained are valid for the impulses with the duration of at least twenty periods.

*Citation:* Gladkikh AV, Kharitonov SI. Analysis of the space-time structure of a steep electromagnetic impulse field when propagating in vacuum. *Computer Optics* 2000; 20: 44 - 47.

## ***References***

- [1] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP, Theory of waves. Moscow: Nauka Publisher; 1979.
- [2] Gladkikh AV. Equations to govern the space-time evolution of extremely short impulses. *Computer Optics* 2000; 20: 41 - 43.
- [3] Born M, Wolf E. Basics of optics. Moscow: Nauka Publisher; 1973: 856.
- [4] Belsky AM, Khapalyuk AP. On the propagation of a spatially confined impulse in an isotropic medium. *Journal of Applied Spectroscopy*; 1972; 27(1): 150-155.
- [5] Reference book on special functions. Moscow: Nauka Publisher; 1979.
- [6] Bogoliubov NN, Shirkov DV. Quantum fields. Moscow: Nauka Publisher; 1993.