

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

## РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

Л.Л. Досколович

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

ДОЭ создаются, как правило, для работы с излучением одной заданной длины волны. Для большого количества прикладных задач, включающих задачи распознавания, обработки изображений, оптической связи, измерения температурных характеристик объектов, цветной печати и фотографии, требуются ДОЭ, позволяющие работать с излучением различных длин волн. Для работы с излучением различных длин волн известны фазовые дифракционные решетки (color separation gratings), позволяющие разделить 3 плоских пучка с длинами волн

$$\lambda_0, \lambda_{+1} = \lambda_0 \frac{N}{N+p}, \lambda_{-1} = \lambda_0 \frac{N}{N-p}, \quad (1)$$

где  $N, p$  – взаимно простые числа, по  $-1, 0$  и  $+1$  дифракционным порядкам [1-4]. В дальнейшем будем называть такие решетки спектральными. Спектральная решетка имеет на периоде  $N$  ступенек равной ширины. Высота ступенек определяется по формуле

$$d_i = \frac{\lambda_0}{(n_0 - 1)} \text{mod}_N(\alpha \cdot i), i = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – целое число, определяемое по формуле

$$\alpha = (N \cdot z + 1) / (N + p), z \in Z. \quad (3)$$

Поскольку числа  $N$  и  $p$  взаимно простые, то уравнение (3) всегда имеет решение в целых числах по теореме о наибольшем общем делителе. Пренебрегая дисперсией материала решетки, определим связь фазового набега  $\varphi$  с высотой рельефа решетки для длины волны  $\lambda$  в виде:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_0 - 1) \cdot d_i, i = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Согласно (4), решетка (2) для плоских пучков с длинами волн (1) формирует следующие фазовые набеги по модулю  $2\pi$ :

$$\varphi_0 = 0, \varphi_{\pm 1} = \mp \frac{2\pi \cdot i}{N}, i = \overline{0, N-1}. \quad (5)$$

Согласно (5), для длины волны  $\lambda_0$  фазовый набег равен нулю и, следовательно, данная спектральная компонента направляется в нулевой порядок. Для длин волн  $\lambda_{\pm 1}$  фазовые набеги (5) соответствуют фазовым функциям призм, квантованных по  $N$  уровням. Это обеспечивает разделение длин волн  $\lambda_{\pm 1}$  по порядкам  $\pm 1$ . Вследствие квантования доля энергии спектральных компонент  $\lambda_{\pm 1}$ , направляемая в порядки  $\pm 1$ , описывается функцией

$$E(N) = \text{Sinc}^2(\pi / N). \quad (6)$$

Рассмотрим расчет спектральных дифракционных решеток, обобщающих известные решетки (2)

на случай общего соотношения длин волн и разделения большого числа длин волн. Отметим, что решетка (2) обращает в ноль функцию невязки, представляющую отличие функций комплексного пропускания квантованных призм от комплексных амплитуд формируемых пучков для плоских пучков с длинами волн (1):

$$F(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \sum_{l=1}^1 \sum_{j=1}^N \left| \exp\left(i \frac{2\pi}{N} l \cdot j\right) - \exp\left(i \frac{N+p \cdot l}{N} \varphi_j\right) \right|^2 \quad (7)$$

$$\text{где } \varphi_j = 2\pi \cdot \text{mod}_N(\alpha_1 j), j = \overline{0, N-1} \quad (8)$$

соответствуют фазовым набегам решетки (4) для длины волны  $\lambda_0$ . Учитывая вышеприведенную связь функции невязки (7) с решеткой (2), предлагается искать решетку для разделения трех произвольных длин волн

$$\lambda_0, \lambda_{+1} = \lambda_0 c_{+1}, \lambda_{-1} = \lambda_0 c_{-1} \quad (9)$$

по порядкам  $\pm 1$  из условия минимума функции невязки

$$F(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \sum_{l=1}^1 \sum_{j=1}^N \left| \exp\left(i \frac{2\pi}{N} l \cdot j\right) - \exp\left(\frac{i}{c_l} \varphi_j\right) \right|^2, c_0 = 1 \quad (10)$$

Естественным технологическим ограничением при синтезе решетки является ограничение на максимальную высоту профиля. Отметим, что высота профиля решетки (2) превышает в  $N$  раз высоту рельефа обычной решетки для работы с излучением одной длины волны  $\lambda_0$ . Поэтому при больших значениях  $N$  в (1) или при общем соотношении длин волн целесообразно искать профиль спектральной решетки из условия минимума функции невязки (10) при ограничении  $\varphi_j \in [0, 2\pi K]$ ,  $j = \overline{0, N}$ , где значение  $K$  определяет максимальную высоту профиля. При этом значения  $\varphi_j$  несложно найти простым перебором из условия минимума невязок

$$\sum_{p=-1}^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{N} j - \frac{\varphi_j}{2c_p}\right) \rightarrow \min, \quad (11)$$

где  $\varphi_j \in [0, 2\pi K]$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $c_0 = 1$ . В качестве примера была рассчитана решетка для разделения длин волн  $\lambda_0=1,55$  мкм,  $\lambda_{+1}=1,31$  мкм,  $\lambda_{-1}=1,625$  мкм, используемых в системах телекоммуникаций. Сле-

дует отметить, что приведенные длины волн не удовлетворяют соотношению (1);

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_{+1}} = \frac{1,55}{1,31} \approx \frac{6}{5}, \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_{-1}} = \frac{1,55}{1,625} \approx \frac{20}{21}.$$

Расчет решетки проводился при  $K=16$ ,  $N=8$  и  $\varphi_j \in \{2\pi \cdot l_j, l_j = 1, 2, \dots, K\}$ . Рассчитанные высоты ступенек профиля равны

$$(d_1, \dots, d_8) = \frac{1,55}{(n_0 - 1)} (0, 1, 7, 8, 8, 14, 15, 16) \text{ мкм}. \quad (12)$$

Выбранный вид значений  $\varphi_j = 2\pi \cdot l_j, l_j \leq K$

дает для длины волны  $\lambda_0$  фазовый набег по модулю  $2\pi$  равный нулю. Поэтому пучок с длиной волны  $\lambda_0$  направляется в нулевой порядок. Для оценки энергетической эффективности решетки были рассчитаны интенсивности  $\pm 1$  порядков для длин волн  $\lambda_{\pm 1}$ .

$$I(\lambda_{\pm 1}) = \left| \int_0^1 \exp\left(\frac{i}{c_{\pm 1}} \varphi(x) \pm 2\pi i x\right) dx \right|^2, \quad (13)$$

где  $\varphi(x)$  – фазовая функция решетки при  $\lambda = \lambda_0$ . Согласно расчетам, решетка (12) направляет 100% энергии спектральной компоненты  $\lambda_0 = 1,55$  мкм в 0-й порядок, 86,7% энергии спектральной компоненты  $\lambda_{+1} = 1,31$  мкм в 1-й порядок и 80,1% энергии спектральной компоненты  $\lambda_{-1} = 1,625$  мкм в -1-й порядок.

В качестве следующего примера была рассчитана решетка для разделения длин волн  $\lambda_0 = 1,55$  мкм,  $\lambda_{+1} = \lambda_0(21/23) = 1,4152$  мкм,  $\lambda_{-1} = \lambda_0(21/19) = 1,7132$  мкм, удовлетворяющих соотношению (1) при  $N=21$  и  $p=2$ . При расчете по аналитической формуле (2) решетка будет иметь 21 ступеньку на периоде при максимальной высоте ступеньки  $d_{\max} = 20 \frac{1,55}{(n_0 - 1)}$  мкм. С целью упрощения технологических параметров была рассчитана решетка из условия минимума невязок (11) с 8-ю ступеньками на периоде при  $K=8$  и  $\varphi_j = 2\pi \cdot l_j, l_j \leq K$ . Рассчитанные высоты ступенек профиля равны

$$(d_1, \dots, d_8) = \frac{1,55}{(n_0 - 1)} (0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 8) \text{ мкм}. \quad (14)$$

Согласно результатам расчета интенсивностей  $\pm 1$  порядков (13), решетка (14) направляет 100% энергии спектральной компоненты  $\lambda_0 = 1,55$  мкм в 0-й порядок и по 87,5% энергии спектральных компонент  $\lambda_{\pm 1}$  в порядки 1-й и -1-й. Полученная решетка, по сравнению с аналитически рассчитанной решеткой (2), теряет 12,5% энергии для спектральных компонент  $\lambda_{\pm 1}$ , однако имеет в 2,5 раза меньшую высоту и более простую структуру периода. Приведенный пример показывает, что при  $N > 8,9$  для снижения технологических требований решетки для разделения длин волн (1) также следует рассчитывать из условия минимума невязок (11).

Приведенный подход легко обобщается на случай разделения более трех длин волн. При этом для разделения длин волн  $\lambda_0, \lambda_n = \lambda_0 c_n, n = \overline{1, L}$  по порядкам  $n_0, \dots, n_L$  значения  $\varphi_j \in [0, 2\pi K]$  ищутся из условия минимума невязок

$$\sum_{p=0}^L \sin^2 \left( \frac{\pi}{N} n_p j - \frac{\varphi_j}{2c_p} \right) \rightarrow \min, c_0 = 1, j = \overline{1, N}. \quad (15)$$

В качестве примера была рассчитана решетка для разделения пяти длин волн  $\lambda_0 = 1,55$  мкм,  $\lambda_{-2} = \lambda_0(23/19)$ ,  $\lambda_{-1} = \lambda_0(21/19)$ ,  $\lambda_{+1} = \lambda_0(21/23)$ ,  $\lambda_{+2} = \lambda_0(21/25)$  по порядкам 0, -2, -1, +1, +2. Расчет решетки проводился при  $\varphi_j = 2\pi \cdot l_j, l_j \leq K$ ,  $K=10$  и  $N=16$ . Рассчитанные высоты ступенек профиля равны

$$(d_1, \dots, d_{16}) = \frac{1,55}{(n_0 - 1)} (0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10) \text{ мкм}. \quad (16)$$

Для решетки (16) доли энергии спектральных компонент  $\lambda_{\pm 1}, \lambda_{\pm 2}$ , направляемых в порядки -1, +1, -2, +2 составляют 96,3%, 96,3%, 80,4% и 85,9%, соответственно.

Использованный метод расчета спектральных решеток может быть также использован для расчета сложных дифракционных оптических элементов (ДОО), выполняющих заданные преобразования волновых фронтов для излучения различных длин волн. Будем считать, что микрорельеф ДОО определен на двумерной сетке отсчетов  $(i, j), i, j = \overline{1, N}$ . Предположим, что для длин волн  $\lambda_0, \lambda_n = \lambda_0 c_n, n = \overline{1, L}$  ДОО должен сформировать пучки с фазовыми функциями  $\varphi_0(i, j), \dots, \varphi_L(i, j)$ . В этом случае значения  $\varphi_{ij} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_0 - 1) \cdot d_{ij}$ , определяющие высоту микрорельефа ДОО, определяются из условия минимума невязок

$$\sum_{p=0}^L \sin^2 \left( \frac{\varphi_p(i, j)}{2} - \frac{\varphi_{ij}}{2c_p} \right) \rightarrow \min, i, j = \overline{1, N}. \quad (17)$$

где  $\varphi_j \in [0, 2\pi K], j = \overline{0, N}, c_0 = 1$ .

### Литература

1. Досколович Л.Л. Расчет дифракционных оптических элементов для разделения и фокусировки излучения различных длин волн // Компьютерная оптика. 1998. В. 18. С. 16-24.
2. Досколович Л.Л., Петрова О.И. Расчет спектральных ДОО // Компьютерная оптика. 1999. В. 19. С. 29-32.
3. L.L. Doskololovich, M. Repetto Design of Does for Focusing Different wavelengths // Optical Memory and Neural Network. 2000. V. 9, № 1. P. 13-23.
4. Досколович Л.Л. Расчет дифракционных оптических элементов для фокусировки различных длин волн // Автометрия. 2000. В. 3. С. 99-108.

# Design of spectral gratings

*L.L. Doskolovich*

*Image Processing Systems Institute of RAS, Samara*

## **Abstract**

As a rule, DOEs are designed to work with radiation of a particular wavelength. Various applied tasks, including recognition, image processing, optical communication, measurement of temperature characteristics of objects, color printing, and photography require DOEs that provide for working with the radiation of different wavelengths.

Citation: Doskolovich LL. Design of spectral gratings. *Computer Optics* 2001; 21: 7-8.

## **References**

- [1] Doskolovich LL. Design of DOEs for separating and focusing radiation of different wavelengths [In Russian]. *Computer Optics* 1998; 18: 16-24.
- [2] Doskolovich LL, Petrova OI. Design of spectral DOE [In Russian]. *Computer Optics* 1999; 19: 29-32.
- [3] Doskolovich LL, Repetto M. Design of DOEs for focusing different wavelengths. *Optical Memory and Neural Network* 2000; 9(1): 13-23.
- [4] Doskolovich LL. Design of DOEs for focusing of different wavelengths [In Russian]. *Avtometriya* 2000; 3: 99-108.