

# АНАЛИЗ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА МИКРОЛИНЗАХ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ВОЛНОВОДЕ

Д.Л. Головашкин, В.В. Котляр, Д.В. Нестеренко\*

Институт систем обработки изображений РАН

\* Самарский государственный аэрокосмический университет

## Введение

Когда минимальный характерный размер дифракционных структур приближается к длине волны освещения, необходимо применять векторную модель для анализа дифракции. Также векторная модель требуется, когда представляющая интерес область находится около дифракционного элемента. Аналитические векторные решения задач дифракции могут быть определены для некоторых периодических структур, для аперийодических структур граничные условия на электромагнитных полях делают аналитическое решение часто невозможным. Следовательно, для моделирования дифракции от аперийодических дифракционных оптических элементов (ДОЭ) должны использоваться численные технологии, основанные на решении уравнений Максвелла. В работах [1] и [2] описаны подходы к решению задач ближнего поля в свободном пространстве и в волноводе соответственно.

Задача о прохождении электромагнитного излучения через дифракционные микролинзы исследована достаточно глубоко, однако без рассмотрения остался вопрос о влиянии толщины дифракционной микролинзы и граничных условий на положение ее фокуса. В случае, когда тонкую рефракционную микролинзу заменяют дифракционной, в силу того, что фокусное расстояние много превосходит толщину рефракционной микролинзы, при определении фокуса дифракционной микролинзы, ее толщиной можно пренебречь. Однако если фокусное расстояние рефракционной микролинзы сравнимо с ее толщиной, то при замене рефракционной микролинзы дифракционной, которая обладает значительно меньшей толщиной, появляется проблема определения фокусного расстояния. Также на определение фокусного расстояния рефракционной микролинзы будут влиять aberrации, которые следует учитывать при нахождении фокуса. Для внесения ясности в этот вопрос было проведено моделирование прохождения электромагнитных волн через дифракционные цилиндрические микролинзы в свободном пространстве и в волноводе.

## Методы расчета

Используя гибридный метод конечных элементов – граничных элементов [1], рассмотрим дифракцию света в свободном пространстве.

Для неоднородной диэлектрической двумерной среды для двух случаев поляризации можно записать уравнение Гельмгольца для монохроматической электромагнитной волны:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right] + k_0^2 \beta \psi(x, y) = 0, \quad (1)$$

где для  $TE$ -поляризации  $\psi = E_z$ ,  $\alpha = \frac{\mu}{\mu_0}$ ,

$$\beta = \frac{\varepsilon(x, y)}{\varepsilon_0}, \quad k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} - \text{волновое число}$$

в вакууме; для  $TM$ -поляризации:  $\psi = H_z$ ,

$$\alpha = \frac{\varepsilon(x, y)}{\varepsilon_0}, \quad \beta = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \text{где } \omega - \text{циклическая частота}$$

излучения,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\vec{E}, \vec{H}$  – вектора электрической и магнитной напряженности электромагнитной волны,  $\mu_0, \varepsilon_0$  – магнитная и электрическая постоянные.

Решение уравнения (1) равносильно минимизации функционала, рассчитываемого в ограниченной области  $\Omega$  [3]:

$$E(\psi) = \iint_{\Omega} \left[ -\frac{1}{\mu(x, y)} \psi(x, y) \Delta \psi(x, y) - k_0^2 \varepsilon(x, y) \psi^2(x, y) - 2f\psi(x, y) \right] dx dy, \quad (2)$$

$$\text{где } \tilde{L} = -\frac{1}{\mu(x, y)} \Delta - k_0^2 \varepsilon(x, y). \quad (3)$$

После линеаризации функционала (2):

$$\frac{\partial E(\psi^s)}{\partial \psi_m^s} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\psi(x, y) = \psi^s(x, y) + \psi^i(x, y)$ ,  $\psi^s(x, y)$ ,  $\psi^i(x, y)$  – полное, неизвестное рассеянное и известное падающее световые поля; получаем систему линейных уравнений, которую необходимо дополнить соотношениями значений поля и его производных на границе:

$$\oint_S \left\{ \frac{\partial \psi^s}{\partial n} G_2 - \psi^s \frac{\partial G_2}{\partial n} \right\} dl = -\frac{1}{2} \psi^s, \quad (x, y) \in S, \quad (5)$$

где Функция Грина для двумерных световых полей (цилиндрическая волна) равна функции Ханкеля второго рода нулевого порядка

$$G(x, x', y, y') = H_0^{(2)} \left( k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) \quad (6)$$

После линеаризации уравнения (5) получим полную систему линейных уравнений.

Моделирование дифракции света в волноводе осуществляется непосредственным решением разностными схемами уравнений Максвелла [2]. В вычислительном эксперименте падающей будет являться волна  $H_{01}$ . Так как граничные условия для уравнений Максвелла соответствуют электрической стенке, то будем считать область эксперимента заключенной в идеально отражающую оболочку. Тогда естественным будет выбрать основную моду полого волновода с электрической стенкой.

### Конструкция дифракционной линзы

Проведем сравнение дифракции света на микролинзах в свободном пространстве и в волноводе. Рассмотрим цилиндрическую рефракционную микролинзу (рис. 1).

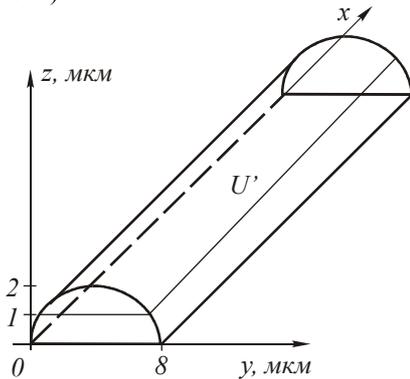


Рис. 1. Цилиндрическая рефракционная микролинза.

Положим, что ее длина  $L_x$  настолько больше ширины  $L_y$ , что длину линзы, по сравнению с шириной, можно считать бесконечной. Рассмотрим численный пример. Определим апертуру линзы как  $a=8$  мкм, радиус кривизны  $R=5$  мкм, показатель преломления  $n=2$  для длины волны  $\lambda=1$  мкм, что примерно соответствует хлориду серебра ( $n_{AgCl}=2,02239$  для  $\lambda=1$  мкм).

Для данной цилиндрической линзы построим линзу с фазовой функцией, приведенной по модулю  $2\pi$ , и дифракционную линзу с двумя степенями градации фазовой функции (рис. 2).

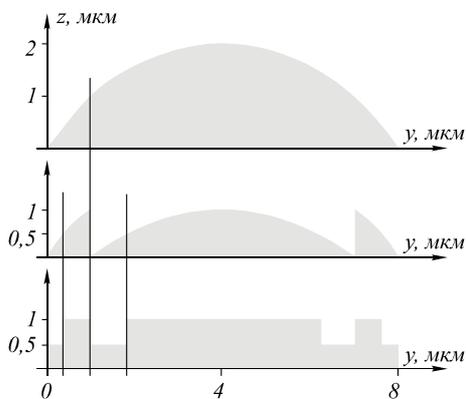


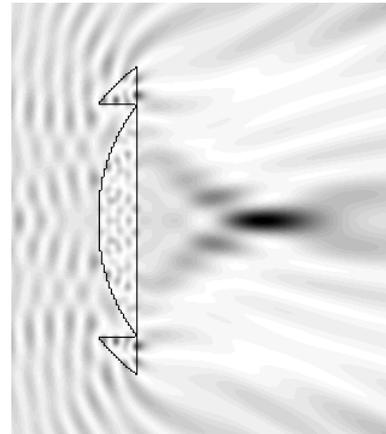
Рис. 2. Построение линзы с фазовой функцией, приведенной по модулю  $2\pi$ , и бинарной дифракционной линзы.

Аналогично для данной рефракционной линзы строятся дифракционные линзы с 4, 8 и 16 уровнями градаций.

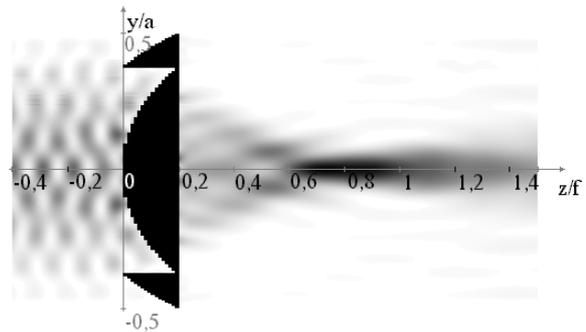
### Численное моделирование

Поставим вычислительный эксперимент, в котором плоская волна будет падать на дифракционные линзы в свободном пространстве и волна  $H_{01}$  – в волноводе. На рис. 3–6 представлены распределения нормированной интенсивности для дифракционных микролинз с 16, 8, 4, 2 степенями градации рельефа. Нормировка проводится по максимальному значению интенсивности рефракционной линзы.

Поле перед оптическими элементами формируется падающей и отраженной волной. Фронт волны, отраженной от бинарной линзы, почти плоский, так как сама бинарная линза похожа на плоскопараллельную пластинку, соответственно, весьма отличен от плоского фронт волны, отраженной от линзы, близкой к рефракционной. Очевидно, чем менее поверхность элемента отличается от сферической, тем более сферичен фронт волны после элемента и тем более выражен фокус элемента.



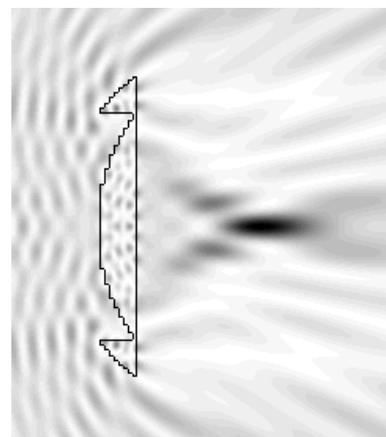
а



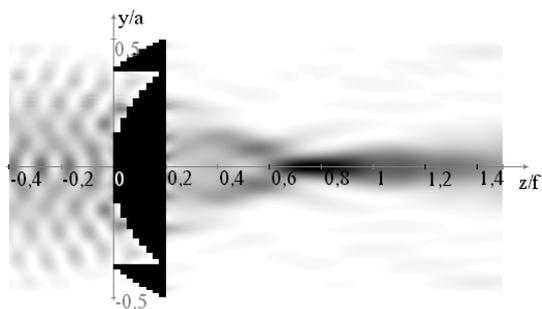
б

Рис. 3. Распределение интенсивности для микролинзы с шестнадцатью степенями градации рельефа при  $f=5$  мкм,  $a=8$  мкм,  $n=2$ ,  $R=4$  мкм:

а – в свободном пространстве, б – в волноводе.

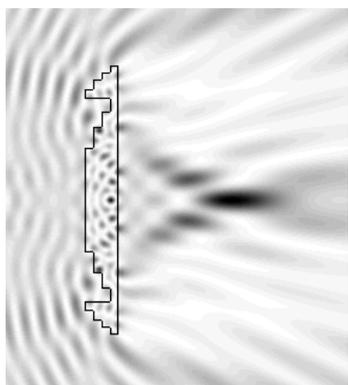


а

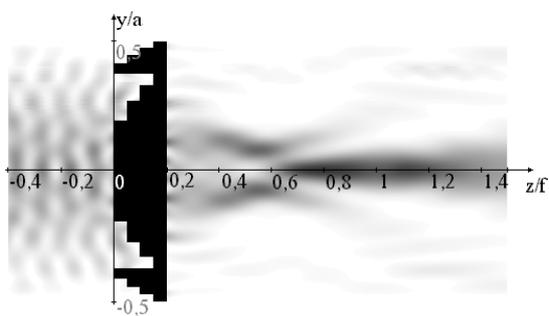


б

Рис. 4. Распределение интенсивности для микролинзы с восемью степенями градации рельефа при  $f=5$  мкм,  $a=8$  мкм,  $n=2$ ,  $R=4$  мкм: а – в свободном пространстве, б – в волноводе.

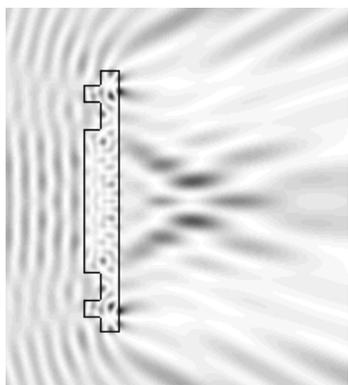


а

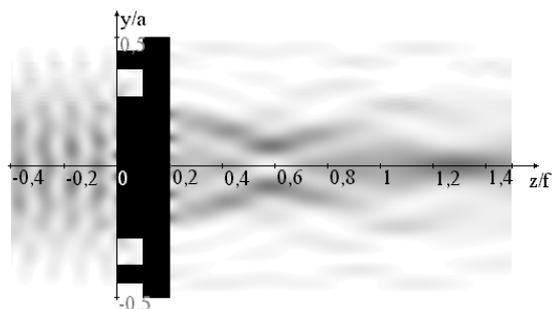


б

Рис. 5. Распределение интенсивности для микролинзы с четырьмя степенями градации рельефа при  $f=5$  мкм,  $a=8$  мкм,  $n=2$ ,  $R=4$  мкм: а – в свободном пространстве, б – в волноводе.



а



б

Рис. 6. Распределение интенсивности для бинарной микролинзы при  $f=5$  мкм,  $a=8$  мкм,  $n=2$ ,  $R=4$  мкм: а – в свободном пространстве, б – в волноводе.

Из рис. 7–9 очевидно, что точка, на которую приходится максимальный модуль амплитуды волны, находится не в месте геометрического фокуса толстой линзы. Исследуем для каждого элемента распределение интенсивности на главной оптической оси.

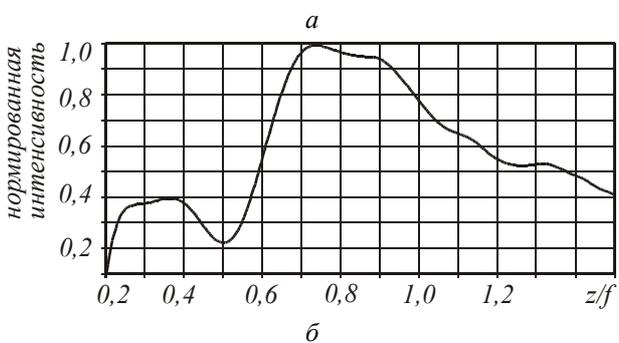
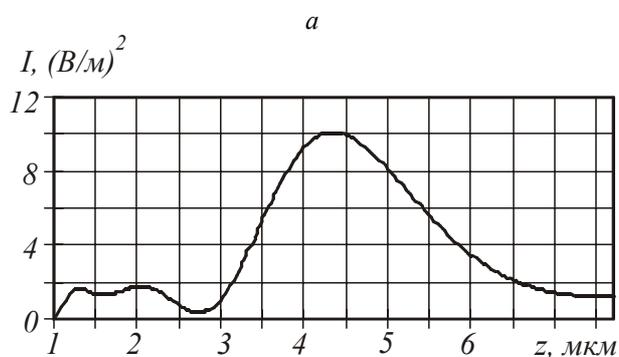
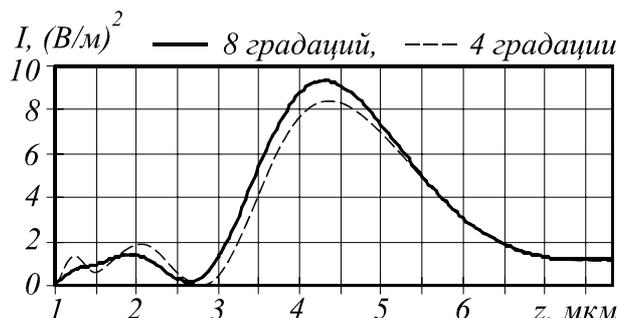


Рис. 7. Распределение интенсивности на главной оптической оси дифракционной микролинзы с шестнадцатью степенями градации рельефа: а – в свободном пространстве, б – в волноводе.



а

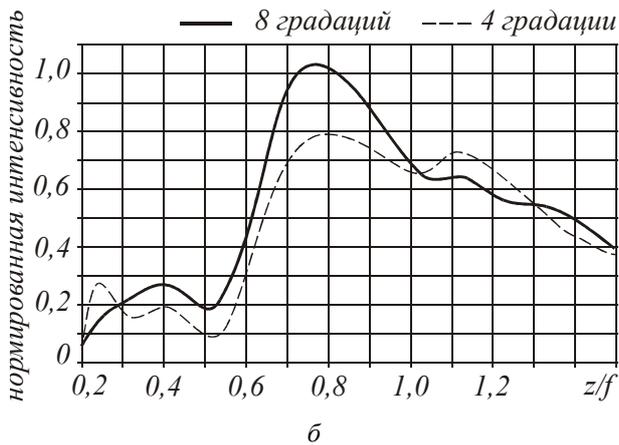


Рис. 8. Распределение интенсивности на главной оптической оси дифракционной микролинзы с 8 и 4 степенями градации рельефа: а – в свободном пространстве, б – в волноводе

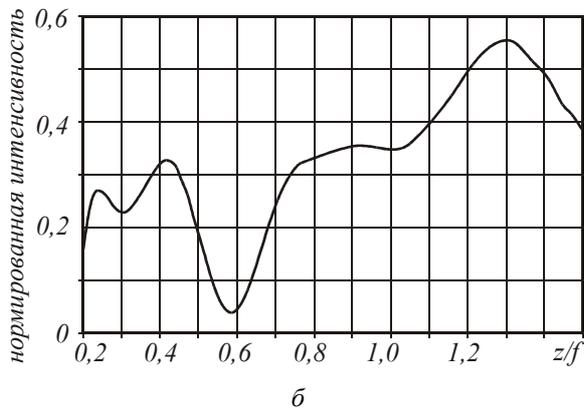
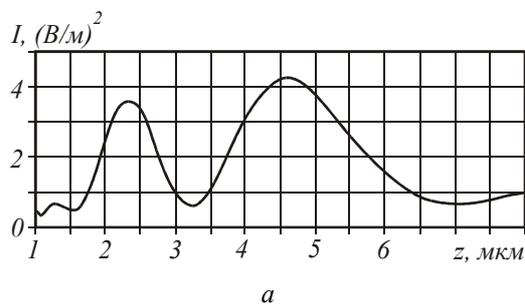


Рис. 9. Распределение интенсивности на главной оптической оси дифракционной микролинзы с двумя степенями градации рельефа: а – в свободном пространстве, б – в волноводе

Для элементов с 16, 8, 4 степенями градации рельефа в свободном пространстве максимум интенсивности располагается на расстоянии около 4,32 мкм и незначительно (на расстоянии порядка  $\lambda/50$ ) смещается вправо с уменьшением числа степеней градации рельефа, для элемента с двумя степенями градации расстояние смещения вправо около  $\lambda/5$ . Для элементов в волноводе с уменьшением числа уровней квантования фокус на главной оптической оси смещается вправо. Распределение интенсивности на главной оптической оси дифракционной микролинзы с шестнадцатью уровнями квантования следует признать довольно близким к аналогичному распределению рефракционной микролин-

зы. Отклонение для линз в свободном пространстве с шестнадцатью степенями градации связано со сферической абберацией. Остальные абберации отсутствуют, так как на микролинзу под прямым углом с ее главными плоскостями падает плоский фронт монохроматической волны.

Ранее подобная особенность смещения фокуса микролинз вправо при уменьшении числа уровней квантования отмечалась в исследованиях для линз с меньшей числовой апертурой. [6]

Дифракционная теория аббераций для случая сферической абберации дает смещение дифракционного фокуса  $z_F = -0,6862$  мкм [5], что подтверждается данными для линз в свободном пространстве. Для микролинз в волноводе наблюдается несоответствие теории, фокус находится ближе к линзе, что объясняется влиянием стенок волновода.

На рис. 10–13 представлены распределения интенсивности в фокальных плоскостях дифракционных микролинз. Принять за эффективность дифракционной микролинзы отношение максимума интенсивности на главной оптической оси к аналогичному максимуму рефракционной микролинзы. Для микролинз с 16, 8, 4, 2 степенями градации рельефа в свободном пространстве их эффективность совпадает с результатами, приведенными в [6], и равна соответственно 0,99; 0,91; 0,84; 0,41. Для микролинз в волноводе с уровнями квантования фазовой функции 4 и 16 наблюдается полное совпадение с результатами, приведенными в [6]. Для бинарной микролинзы нормированная интенсивность в фокусе составляет 0,55, в то время как у перечисленных авто-ров она равна 0,4.

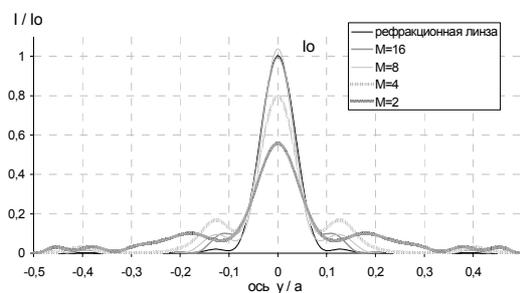


Рис. 10. Сравнение распределений интенсивности в фокальных плоскостях рефракционной и дифракционной микролинз.

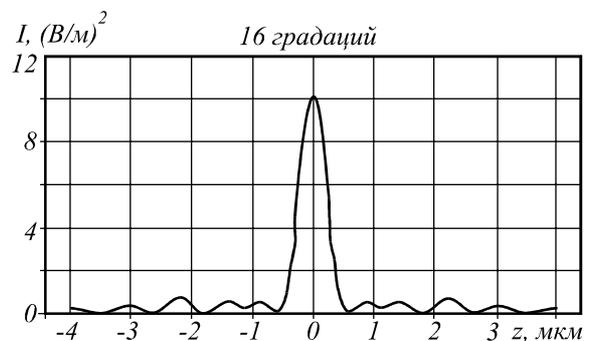


Рис. 11. Распределение интенсивности в фокальной плоскости микролинзы с шестнадцатью степенями градации рельефа в свободном пространстве.

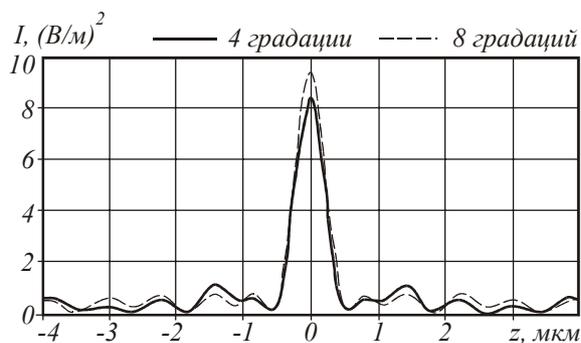


Рис. 12. Распределения интенсивности в фокальной плоскости микролинз с восемью и четырьмя степенями градации рельефа в свободном пространстве.

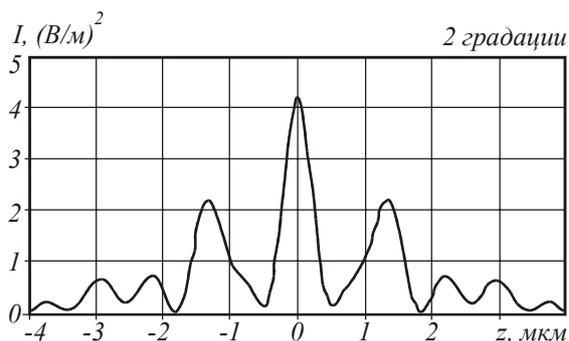


Рис. 13. Распределения интенсивности в фокальной плоскости микролинз с двумя степенями градации рельефа в свободном пространстве.

Для микролинзы с восемью степенями градации рельефа интенсивность в фокусе превысила интенсивность рефракционной микролинзы. Такое расхождение вызвано влиянием стенок волновода на фокусировку.

Следует заметить, что моделирование дифракции света в волноводе гибридным методом [1] может осуществляться путем определения фундаментального решения функции Грина для областей с параллельными границами с учетом граничных условий. Известны фундаментальные решения для полубесконечной области [4], эквивалентные потенциалу поля, образованные единичными источниками: действительным и отраженным. Для областей с параллельными границами фундаментальное решение представляется алгебраической суммой действительного источника и бесконечным рядом отраженных от параллельных границ. Реализация данно-

го подхода оказалась затруднительной, поскольку погрешность вычисления ряда становится достаточно малой при числе последовательно отраженных источников более 100–200.

### Выводы

Проведено сравнение картин дифракции световой волны на микролинзах, которые рассчитаны двумя разными методами: методом конечных элементов и численным решением уравнений Максвелла. В результате рассмотрения дифракции на дифракционных микролинзах в свободном пространстве и в волноводе показано, что при уменьшении числа уровней квантования рельефа микролинз с высокой числовой апертурой фокус микролинз смещается вправо. Отмечено влияние волновода на положение фокуса микролинз и величину максимальной интенсивности.

### Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 99-01-39012, 00-15-96114, 00-01-00031).

### Литература

1. Котляр В.В., Нестеренко Д.В. Анализ задачи дифракции света на микрооптике гибридным методом конечных элементов – граничных элементов // Компьютерная оптика. Самара. ИСОИ РАН. 2000. В. 20. С. 10-14.
2. Головашкин Д.Л., Соيفер В.А. Анализ прохождения электромагнитного излучения через дифракционную линзу // Автометрия. Новосибирск, изд-во СО РАН, № 6, 1999. С. 119-121.
3. V.V. Kotlyar, D.V. Nesterenko Modeling the light diffraction by microoptics elements using the finite element method // Laser physics and spectroscopy, Saratov fall meeting, Proceedings of SPIE. V. 4002. P. 135-142. (1999).
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов // М., Мир. 1987. С. 104 – 107.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // Пер. с англ. М., Наука. 1973. 720 с.
6. Голуб М.А., Казанский Н.Л., Соифер В.А. Математическая модель фокусировки лазерного излучения элементами компьютерной оптики // Научное приборостроение. 1993. Т. 3. N 1. С. 8-28.

# Analysis of light diffraction by microlenses in free space and a waveguide

*D.L. Golovashkin<sup>1</sup>, V.V. Kotlyar<sup>1</sup>, D.V. Nesterenko<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS, Samara*

*<sup>2</sup>Samara State Aerospace University*

## **Abstract**

When the minimum characteristic dimension of diffractive structures approaches the illumination wavelength, a vector model is required to perform the diffraction analysis. The vector model is also needed when the area of interest is located near the diffractive element. Analytical vector solutions of diffraction problems can be determined for some periodic structures; as for the aperiodic structures, the boundary conditions on electromagnetic fields often negate the analytical solution. Therefore, numerical technologies based on solving Maxwell's equations should be used to simulate diffraction by aperiodic diffractive optical elements.

*Citation:* Golovashkin DL, Kotlyar VV, Nesterenko DV. Analysis of light diffraction by microlenses in free space and a waveguide. *Computer Optics* 2001; 21: 31-35.

## **References**

- [1] Kotlyar VV, Nesterenko DV. Analysis of light diffraction by binary micro-optics using a combination of boundary element method and finite element method [In Russian]. *Computer optics* 2000; 20: 10-14.
- [2] Golovashkin DL, Soifer VA. Analysis of propagation of electromagnetic radiation through a diffraction lens [In Russian]. *Avtometriya* 1999; 6: 119-121.
- [3] Kotlyar VV, Nesterenko DV. Modeling the light diffraction by microoptics elements using the finite element method. *Proc SPIE* 1999; 4002: 135-142.
- [4] Brebbia CA, Telles JCF, Wrobel L. *Boundary element techniques*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1984.
- [5] Born M, Wolf E. *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 6<sup>th</sup> ed. New York: Pergamon Press; 1980.
- [6] Golub MA, Kazanskiy NL, Soifer VA. Mathematical model of focusing laser radiation by the elements of computer optics [In Russian]. *Nauchnoe Priborostroenie* 1993; 3(1): 8-28..