

ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ С ОСОБЕННОСТЬЮ В ЦЕНТРЕ ПЕРЕТЯЖКИ

А.А. Ковалев^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}, С.Н. Хонина^{1,2}, В.А. Соифер^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрено новое двухпараметрическое семейство параксиальных лазерных пучков, которые порождаются начальной комплексной амплитудой, состоящей из трех сомножителей: Гауссова пучка, логарифмического аксикона, спиральной фазовой пластинки или угловой гармоники, а также амплитудной гиперболической функции, имеющей особенность в начале координат. В ближней зоне комплексная амплитуда таких пучков пропорциональна вырожденной гипергеометрической функции, и поэтому пучки названы – гипергеометрическими. При замене Гауссова пучка плоской волной эти пучки переходят в гипергеометрические моды, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба. Распределение интенсивности в поперечном сечении таких пучков похоже на распределение интенсивности для мод Бесселя и представляет собой набор концентрических чередующихся светлых и темных колец.

Введение

В современных научных исследованиях интерес к различным типам лазерных пучков заметно возрос. Продолжаются исследования хорошо известных мод Лагерра-Гаусса [1]. В [2] с помощью функции Вигнера рассмотрены непараксиальные моды Лагерра-Гаусса. Продолжают исследоваться элегантные пучки Лагерра-Гаусса [3] и Эрмита-Гаусса [4]. Эти пучки описываются соответствующими полиномами с комплексными аргументами. В [5, 6] исследовались разными методами эллиптические пучки Лагерра-Гаусса. Лазерный пучок с эллиптической симметрией можно сформировать при наклонном падении плоской волны, например, на аксикон. В [7] исследуются лазерные пучки, сформированные при наклонном падении на аксикон. Интерес также вызывает линейная комбинация лазерных мод. Так, в [8] показано, что с помощью подбора мод в осевой линейной комбинации можно получить лазерные пучки с вращающейся поперечной интенсивностью, но не обладающие орбитальным угловым моментом. Можно также сформировать лазерный вихревой пучок, картина дифракции которого будет представлять собой только одно светлое кольцо, а все периферийные кольца будут подавлены [9].

В недавних работах авторов [10, 11] рассматривалось новое семейство параксиальных лазерных пучков – гипергеометрические моды. Эти моды близки к известным модам Бесселя [12, 13], они также обладают бесконечной энергией и могут быть сформированы с помощью ДОЭ только приближенно. В данной работе рассматривается некоторое обобщение гипергеометрических мод – гипергеометрические пучки, которые переходят в моды при замене исходного Гауссова пучка плоской волной или при стремлении радиуса перетяжки гауссова пучка к бесконечности. Показано, что комплексная амплитуда у некоторых из таких пучков в дальней зоне пропорциональна модифицированной функции Бесселя целого или полуцелого порядков.

1. Гипергеометрические лазерные пучки

Рассмотрим световое поле с начальной функцией комплексного пропускания вида:

$$E_{\gamma n}(r, \varphi, 0; \sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{w}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right), \quad (1)$$

где (r, φ) – полярные координаты в начальной плоскости ($z = 0$), w и γ – действительные параметры логарифмического аксикона, σ – радиус перетяжки гауссова пучка, n – целый порядок спиральной фазовой пластинки. Комплексная амплитуда (1) описывает световое поле с бесконечной энергией и с особенностью при $r = 0$. Несмотря на это, в любой другой поперечной плоскости на расстоянии z от начальной плоскости комплексная амплитуда светового поля, порожденная функцией (1), уже не будет иметь особенности и будет конечной.

При параксиальном распространении светового поля (1) его комплексная амплитуда на расстоянии z будет определяться преобразованием Френеля, которое в полярных координатах имеет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \iint_{R^2} E(r, \varphi, 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z} [\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)]\right\} r dr d\varphi, \quad (2)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной оптической оси, k – волновое число.

Подставляя (1) в (2) и используя справочный интеграл [14]

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = c^\nu p^{-\frac{\nu+\alpha}{2}} 2^{-\nu-1} \times \times \Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}(\nu+1) {}_1F_1\left(\frac{\nu+\alpha}{2}, \nu+1, -\frac{c^2}{4p}\right), \quad (3)$$

получим следующее выражение для комплексной амплитуды в плоскости z :

$$E_{\gamma n}(\rho, \theta, z; \sigma) = (-i)^{n+1} \frac{w^{1-i\gamma}}{2^{n+2} n! \pi} \left(\frac{k}{z}\right)^{n+1} \rho^n \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z}\right)^{\frac{n+1+i\gamma}{2}} \times \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{\left(\frac{k\rho}{2z}\right)^2}{\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z}}\right), \quad (4)$$

где ${}_1F_1(a, b, x)$ – вырожденная или конфлюэнтная гипергеометрическая функция (функция Куммера):

$${}_1F_1(a, b, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(b)_m} \frac{x^m}{m!}, \quad (5)$$

$(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера. Из выражения (4) видно, что комплексная амплитуда светового поля на расстоянии $z > 0$ имеет конечный модуль в каждой точке ρ .

При большом удалении от начальной плоскости ($z \gg k\sigma^2$) выражение (4) упрощается:

$$E_{\gamma n}(\rho, \theta, z \gg k\sigma^2; \sigma) = \frac{(-i)^{n+1} w^{1-i\gamma}}{2^{n+2} n! \pi} \left(\frac{k}{z}\right)^{n+1} \times \rho^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n+1+i\gamma}{2}} \times \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\rho\sigma}{\sqrt{2z}}\right)^2\right). \quad (6)$$

Частным случаем пучков (6) являются пучки при $\gamma = 0$. Из (6) следует, что комплексная амплитуда таких пучков пропорциональна функции Бесселя второго рода (модифицированной) с целым и полуцелым порядками:

$$E_{0n}(\rho, \theta, z \gg k\sigma^2; \sigma) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \frac{\sigma w}{2\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} - \left(\frac{k\rho\sigma}{2z}\right)^2 + in\theta\right) I_n\left(\left(\frac{k\rho\sigma}{2z}\right)^2\right). \quad (7)$$

2. Гипергеометрические моды

При устремлении радиуса перетяжки гауссового пучка к бесконечности ($\sigma \rightarrow \infty$, т.е. Гауссов пучок переходит в плоскую волну) выражение (4) существенно упрощается:

$$E_{\gamma n}(\rho, \theta, z; \sigma \rightarrow \infty) = \frac{w^{-n} \rho^n}{2\pi n!} \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right) \times \left(-\frac{ikw^2}{2z}\right)^{\frac{n+1-i\gamma}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times {}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (8)$$

Для функции Куммера известно соотношение:

$${}_1F_1(a, b, z) = \exp(z) {}_1F_1(b-a, b, -z). \quad (9)$$

Тогда (8) преобразуется:

$$E_{\gamma n}(\rho, \theta, z) = \frac{w^{-n} \rho^n}{2\pi n!} \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right) \exp(in\theta) \times \left(-\frac{ikw^2}{2z}\right)^{\frac{n+1-i\gamma}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (10)$$

Следует отметить, что справочный интеграл (3) определен для случаев, когда $\text{Re}(p) > 0$, что не соблюдается при $\sigma \rightarrow \infty$. Однако при подстановке (10) в параксиальное уравнение распространения света

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2}\right) U(\rho, \theta, z) = 0, \quad (11)$$

получается верное тождество, а именно, дифференциальное уравнение Куммера:

$$\left[\chi \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + (b-\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} - a\right] F(a, b, \chi) = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} a = \frac{n+1-i\gamma}{2}, \\ b = n+1, \\ \chi = \frac{ik\rho^2}{2z}. \end{cases} \quad (13)$$

Гипергеометрическая мода (10) формируется из начальной комплексной амплитуды ($z=0$) с особенностью в начале координат:

$$E(r, \varphi, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{w}{r} \exp\left(i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right). \quad (14)$$

3. Гипергеометрические моды при $\gamma = 0$

Рассмотрим однопараметрическое семейство гипергеометрических мод (10) при условии, что $\gamma = 0$.

В этом случае воспользуемся известным соотношением для конфлюэнтной функции [15]

$${}_1F_1\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, 2\frac{n}{2} + 1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{4z}\right) \left(\frac{k\rho^2}{8z}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right). \quad (15)$$

После подстановки (15) в (10) получается

$$E_{0n}(\rho, \theta, z) = \frac{w}{2} \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}(n+1)\right] \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{4z} + in\theta\right) J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right). \quad (16)$$

Из (16) видно, что комплексная амплитуда гипергеометрических мод при $\gamma = 0$ пропорциональна функции Бесселя первого рода (сравните с уравнением (7), где появляется функция Бесселя второго рода) целого и полу целого порядков. Заметим, что все рассмотренные выше поля (и гипергеометрические пучки (6) и моды (10) зависят от квадрата радиальной переменной. Это означает, что с ростом переменной ρ будет уменьшаться расстояние между соседними локальными максимумами или минимумами. Неограниченное увеличение пространственной частоты картины дифракции является следствием особенности (амплитудной и фазовой) комплексной амплитуды в центре начальной плоскости (в центре перетяжки). В реальности для формирования таких лазерных пучков следует использовать кольцевую диафрагму, «блокирующую» особенность в центре координат. При этом, правда, гипергеометрические пучки можно будет сформировать только приближенно, но зато пространственная частота картины дифракции будет конечной величиной.

Рассмотрим первую вихревую моду при $n = 1$. Тогда вместо (16) получим комплексную амплитуду:

$$E_{01}(\rho, \theta, z) = \frac{2}{\pi\rho} \sqrt{\lambda z} \sin\left(\frac{\pi\rho^2}{2\lambda z}\right) \exp(i\theta). \quad (17)$$

Нули комплексной амплитуды (17) будут иметь координаты $\rho_m = \sqrt{2m\lambda z}$. Первый максимум амплитуды находится из уравнения $2x = \text{tg}(x)$ и имеет координату вблизи точки $\rho_{\max} < \sqrt{\lambda z}$. Заметим, что расстояние между двумя соседними нулями интенсивности поля (17) с номерами m и $m+1$ при $m \gg 1$ равно выражению $\Delta\rho_m \approx \sqrt{\lambda z / (2m)}$. То есть пространственная частота картины дифракции стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$. Устранить это можно, ограничив исходное поле (14) кольцевой диафрагмой, блокирующей особенность в центре.

4. Обобщенные гипергеометрические моды

Рассмотрим функцию следующего вида (более общего, чем (10):

$$E(\rho, \theta, 0) = \rho^p z^q \exp(in\theta) F(s\rho^m z^l), \quad (18)$$

где F – некоторая функция.

После подстановки функции (18) в параксиальное уравнение распространения света (11) получается следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & s^2 m^2 \rho^{2m-2} z^{2l} F'' + \\ & + [(2p+m)sm\rho^{m-2} z^l + 2iksl\rho^m z^{l-1}] F' + \\ & + [p(p-1)\rho^{-2} + p\rho^{-2} - n^2\rho^{-2} + 2ikqz^{-1}] F = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При $p = \pm n$ уравнение упрощается. Для определенности рассмотрим случай, когда $p = +n$:

$$\begin{aligned} & s^2 m^2 \rho^{2m-2} z^{2l} F'' + \\ & + [sm(2n+m)\rho^{m-2} z^l + 2iksl\rho^m z^{l-1}] F' + \\ & + 2ikqz^{-1} F = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы получить из уравнения (20) уравнение Куммера, нужно чтобы коэффициент при производной второго порядка равнялся аргументу функции F . Для этого разделим обе части уравнения на $sm^2 \rho^{m-2} z^l$:

$$\begin{aligned} & s\rho^m z^l F'' + \left(\frac{2n+m}{m} + \frac{2ikl\rho^2 z^{-1}}{m^2}\right) F' + \\ & + \frac{2ikq\rho^{2-m} z^{-l-1}}{sm^2} F = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее нужно, чтобы коэффициент при производной первого порядка был равен разности константы и аргумента функции F , это возможно только в случае, когда

$$\begin{cases} m = 2, \\ l = -1, \\ s = -\frac{2ikl}{m^2} = \frac{ik}{2}. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда вместо (21) получим уравнение вида:

$$\frac{ik}{2} \rho^2 z^{-1} F'' + \left(n+1 - \frac{ik}{2} \rho^2 z^{-1}\right) F' + qF = 0. \quad (23)$$

Получено уравнение Куммера, в котором

$$\begin{cases} a = -q, \\ b = n+1. \end{cases} \quad (24)$$

Решением такого уравнения является конфлюэнтная функция:

$${}_1F_1\left(a, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right), \quad (25)$$

т.е. решением параксиального уравнения распространения (11) является следующая функция:

$$E_{a,+n}(\rho, \theta, z) = \rho^n z^{-a} \exp(in\theta) {}_1F_1\left(a, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (26)$$

При $p = -n$ получается

$$E_{a,-n}(\rho, \theta, z) = \rho^{-n} z^{-a} \exp(in\theta) {}_1F_1\left(a, 1-n, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (27)$$

Объединяя (26) и (27) в одно выражение, получится семейство функций

$$E_{an}(\rho, \theta, z) = \rho^n z^{-a} \exp(\pm in\theta) {}_1F_1\left(a, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (28)$$

Комплексную амплитуду (28) можно рассматривать как обобщенный параксиальный гипергеомет-

рический пучок, который переходит в модовые пучки при условии $a = (n+1+i\gamma)/2$.

5. Численное моделирование

Формула (10) описывает комплексную амплитуду для идеальной гипергеометрической моды, сформированной с помощью начального поля вида (14). На практике это поле должно быть ограничено в размерах. Модуль функции комплексного пропускания также должен быть ограничен единицей. На рис. 1а и б показаны рассчитанные по формуле (14) радиальные распределения амплитуды в плоскости $z = 0$: неограниченное (1а) и ограниченное кольцевой диафрагмой с радиусами $R_1 = 0,2$ мм и $R_2 = 10$ мм. На рис. 1в и г показаны рассчитанные соответствующие радиальные распределения амплитуды в плоскости $z = 2000$ мм: по формуле (10) (1в) и с помощью преобразования Френеля (1г). Параметры расчета: поря-

док СФП $n = 10$, параметры логарифмического аксикона $w = 0,5$ мм и $\gamma = 0$, длина волны $\lambda = 514,5$ нм, дискретизация $\Delta\rho = 0,16$ мм.

На рис. 2 показано рассчитанное радиальное распределение амплитуды на расстоянии $z = 2000$ мм от исходного поля (14) для двух различных значений параметра логарифмического аксикона γ . Видно, что с ростом γ радиус первого (главного) кольца увеличивается.

На рис. 3 показано радиальное распределение амплитуды на расстоянии $z = 2000$ мм от исходного поля (1) для двух различных значений радиуса перетяжки гауссового пучка σ при $\gamma = 0$. Видно, что с ростом σ уменьшается контраст дифракционной картины.

На рис. 2 и 3 остальные параметры расчета такие же, что и на рис. 1.

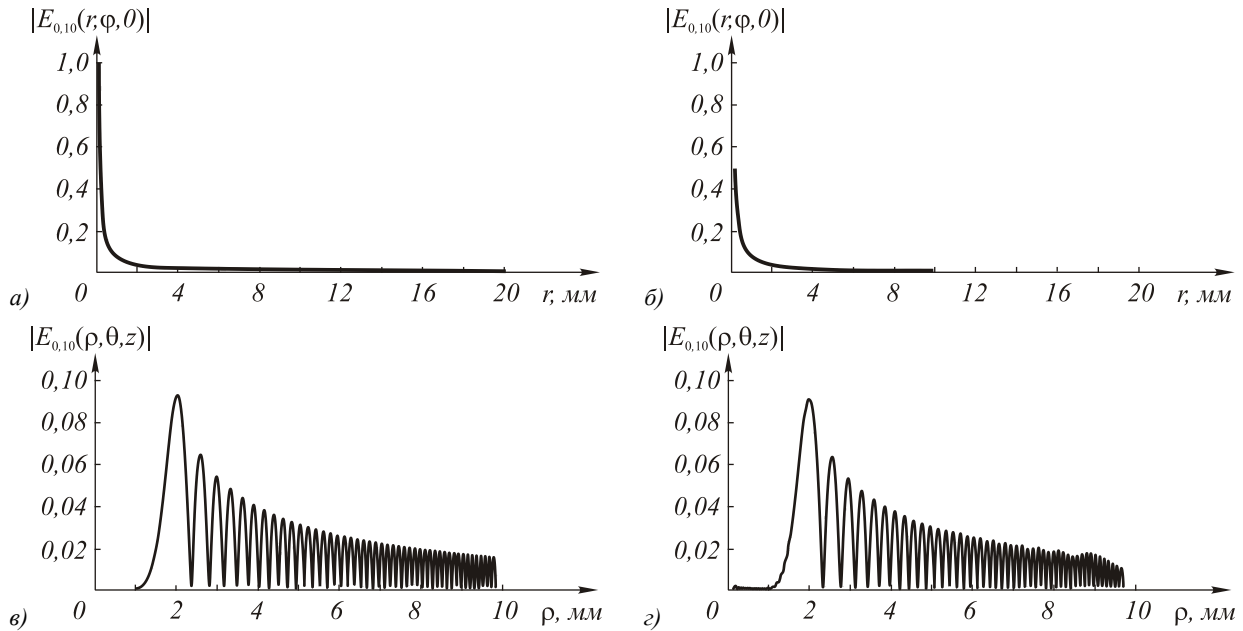


Рис. 1. Радиальные распределения модуля комплексной амплитуды в плоскостях $z = 0$ мм (а и б) и $z = 2000$ мм (в и г) для светового поля (14) с бесконечной апертурой (а и в) и ограниченного кольцевой диафрагмой с радиусами $R_1 = 0,2$ мм и $R_2 = 10$ мм (б и г)

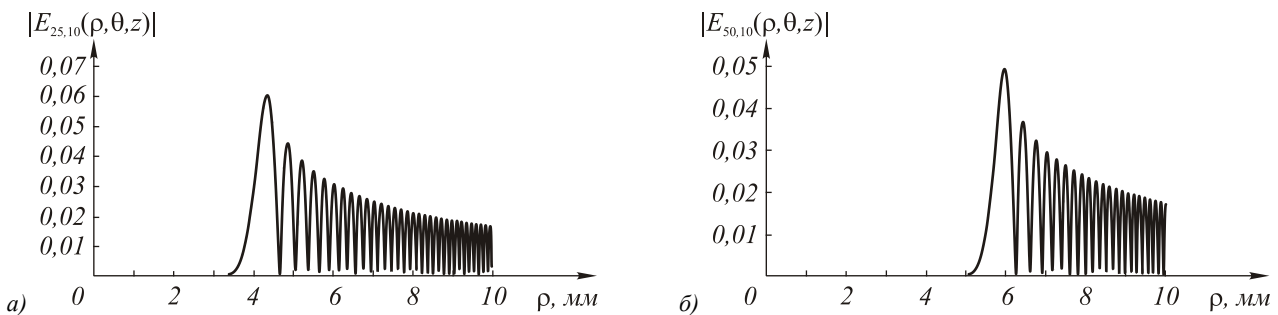


Рис. 2. Радиальные распределения модуля комплексной амплитуды для начального поля (14) ($n = 10$) в плоскости $z = 2000$ мм при $\gamma = 25$ (а) и $\gamma = 50$ (б)

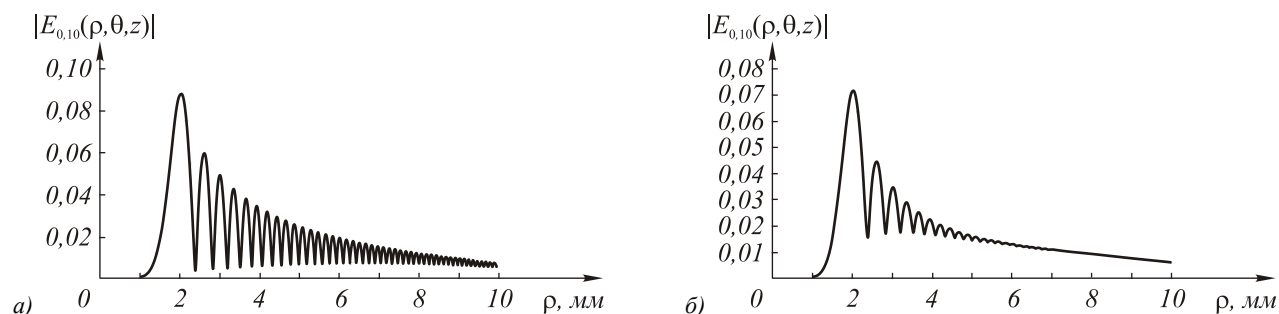


Рис. 3. Радиальные распределения модуля комплексной амплитуды от исходного поля (1) ($n = 10$) в плоскости $z = 2000$ мм при $\sigma = 5$ мм (а) и при $\sigma = 2$ мм (б)

Заключение

Рассмотрено новое двухпараметрическое семейство параксиальных лазерных пучков, которые порождаются начальной комплексной амплитудой, состоящей из трех сомножителей: Гауссова пучка, логарифмического аксикона, спиральной фазовой пластинки или угловой гармоники, а также амплитудной гиперболической функции, имеющей особенность в начале координат. В ближней зоне комплексная амплитуда таких пучков пропорциональна вырожденной гипергеометрической функции, и поэтому пучки названы – гипергеометрическими. При замене гауссова пучка плоской волной эти пучки переходят в гипергеометрические моды, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба. Распределение интенсивности в поперечном сечении таких пучков похоже на распределение интенсивности для мод Бесселя и представляет собой набор концентрических чередующихся светлых и темных колец.

Гипергеометрические моды обладают одной особенностью: пространственная частота картины дифракции асимптотически стремятся к бесконечности.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-SA-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600.

Литература

- Gao M., Gao C., Lin Z. Generation and application of the twisted beam with orbital angular momentum, *Chin. Opt. Lett.*, 2007. V.5. N.2. P.89-92.
- Duan K., Lu B. Application of the Winer distribution function to complex-argument Hermite-and laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation // *Opt. Las. Tech.*, 2007. V.39. P.110-115.
- Seshardi S.R. Self-interaction and mutual interaction of complex-argument Laguerre-Gauss beams // *Opt. Lett.*, 2006. V.31. N.5. P.619-621.
- Kostenbauder A., Sun Y., Siegman A.E. Eigenmode expansions using biorthogonal functions: complex-valued Hermite-Gaussians: reply to comment // *J. Opt. Soc. Am. A*, 2006. V. 23. N.6. P.1528-1529.
- Kotlyar V.V., Khonina S.N., Almazov A.A., Soifer V.A., Jefimovs K., Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams // *J. Opt. Soc. Am. A*, 2006. V.23. N.1. P.43-56.
- Mei Z., Gu J., Zhao D. The elliptical Laguerre-Gaussian beam and its propagation // *Optik*, 2007. V.118. P.9-12.
- Burvall A., Kolacz K., Goncharov A.V., Jaroszewicz Z., Dainty C. Lens axicons in oblique illumination // *Appl. Opt.*, 2007. V.46. N.3. P. 312-318.
- Kotlyar V.V., Khonina S.N., Skidanov R.V., Soifer V.A. Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum // *Opt. Commun.*, 2007 (in press).
- Kotlyar V., Kovalev A., Soifer V., Tuvey C., Devis J. Sidelobes contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon // *Opt. Lett.*, 2007. V.32 (in press).
- Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Khonina S.N., Soifer V.A. Hypergeometric modes // *Opt. Lett.*, 2007. V.32. N.7. (in press).
- Котляр В.В., Скиданов Р.В., Хонина С.Н., Балалаев С.А. Гипергеометрические моды // *Компьютерная оптика, Самара, ИСОИ РАН*, 2006. № 30. С. 16-22.
- Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H. Diffraction-free beams, *Phys. Rev. Lett.*, 1987. V. 58. P. 1-1501.
- Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // *J. Mod. Opt.*, 2004. V.51. N. 14. P. 2167-2184.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды // *Специальные функции*. - М., Наука, 1983.
- Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. - М., Наука, 1979.

PARAXIAL HYPERGEOMETRIC LASER BEAMS WITH SINGULARITY IN THE CENTER OF THE WAIST

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}, V.A. Soifer^{1,2}
¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,
²Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

Abstract

We study a new two-parameter family of paraxial laser beams generated by initial complex amplitude consisting of four cofactors: Gaussian beam, logarithmic axicon, spiral phase plate (or angular harmonic), and the amplitude reciprocal function with a singularity at the origin. In the near field, complex amplitude of these beams is proportional to the degenerate hypergeometric function, and thus the beams are called hypergeometric. If the Gaussian beam is replaced by a plane wave, these beams change into hypergeometric modes preserving their shape up to scale on propagation in space. The cross-section intensity distribution of these beams is similar to that of the Bessel modes and consists of a set of concentric alternating light and dark rings.

Keywords: paraxial laser beams, hypergeometric function, Bessel modes

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Paraxial hypergeometric laser beams with singularity in the center of the waist. *Computer Optics* 2007; 31(1): 9-13.

Acknowledgements: The work was partly supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-SA-06) and the RFBR grants Nos. 05-08-50298 and 07-07-97600.

References:

- [1] Gao M, Gao C, Lin Z. Generation and application of the twisted beam with orbital angular momentum. *Chin.Opt. Lett.* 2007; 5(2): 89-92.
 - [2] Duan K, Lu B. Application of the Winer distribution function to complex-argument Hermite-and Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *Opt. Las. Tech.* 2007;39: 110-115.
 - [3] Seshardi SR. Self-interaction and mutual interaction of complex-argument Laguerre-Gauss beams. *Opt. Lett.* 2006; 31(5): 619-621.
 - [4] Kostenbauder A, Sun Y, Siegman AE. Eigenmode expansions using biorthogonal functions: complex-valued Hermite-Gaussians: reply to comment. *J. Opt. Soc. Am. A* 2006; 23(6): 1528-1529.
 - [5] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptical Laguerre-Gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. A* 2006; 23(1): 43-56.
 - [6] Mei Z, Gu J, Zhao D. The elliptical Laguerre-Gaussian beam and its propagation. *Optik* 2007; 118: 9-12.
 - [7] Burvall A, Kolacz K, Goncharov AV, Jaroszewicz Z, Dainty C. Lens axicons in oblique illumination. *Appl. Opt.* 2007; 46(3): 312-318.
 - [8] Kotlyar VV, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA. Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum. *Opt. Commun.* 2007; 274(1): 8-14.
 - [9] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA, Tuvey C, Devis JA. Sidelobes contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon. *Opt. Lett.* 2007; 32(8): 921-923.
 - [10] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. *Opt. Lett.* 2007; 32(7): 742-744.
 - [11] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Balalaev SA. Hypergeometric modes. *Computer Optics* 2006; 30: 16-22.
 - [12] Durmin J, Miceli JJ, Eberly JH. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.* 1987; 58:1-1501.
 - [13] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimovs K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. *J. Mod. Opt.* 2004; 51: 2167-2184.
 - [14] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Special functions. Moscow: "Nauka" Publisher; 1983.
 - [15] Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of Mathematical Functions [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher 1979.
-