

ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ ЛИНЗА МИКАЭЛЯНА

Я.Р. Триандафилов^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}

¹Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия,

²Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

Аннотация

Получены модовые решения в виде гиперболического секанса для двумерной градиентной среды с показателем преломления так же в виде гиперболического секанса. Найден фотонно-кристаллический аналог цилиндрической градиентной линзы Микаэляна и проведено сравнительное численное моделирование дифракции плоской волны на обеих микро-линзах с помощью двумерного FDTD-метода.

Введение

Последние технологические достижения позволяют создавать оптические микро- и нано-объекты с размерами, сопоставимыми с длиной волны света. Поэтому встает вопрос о компьютерном моделировании дифракции света на таких объектах. Для решения этой задачи нужно непосредственно решать систему уравнений Максвелла. Одним из самых распространенных методов для численного решения этих уравнений является метод «конечных разностей во временной области». В англоязычной литературе он закрепил за собой название «finite-difference time-domain method» (FDTD) [1]. Данный метод хорошо себя зарекомендовал, благодаря своей универсальности при решении задач дифракции [2, 3]. Он и используется в данной работе.

Фотонные кристаллы – это структуры, с периодически меняющимся показателем преломления в масштабах, меньших длины волны [4]. В последнее время они привлекают к себе все большее внимание, благодаря ряду своих интересных свойств. Одним из фундаментальных свойств этих материалов является то, что они не пропускают свет в определенном диапазоне длин волн. Эта спектральная область называется «фотонной запрещенной зоной». В настоящее время наибольший интерес представляют фотонные кристаллы, запрещенная зона которых лежит в видимом или ближнем инфракрасном диапазонах [5-8].

Благодаря развитию технологии производства фотонных кристаллов становится возможным создание фотонно-кристаллических линз. Фотонная линза – это фотонный кристалл, радиус дырочек в котором меняется по определенному закону, обеспечивающему фокусировку света. При этом период решетки кристалла остается постоянным. Такие линзы, например, решают проблему фокусировки света на вход фотонно-кристаллического волновода, являясь более компактной альтернативой микролинзам и сужающимся волноводам.

Известно, что градиентная среда с радиальной зависимостью показателя преломления в виде гиперболического секанса, предложенная в [9], используется для самофокусировки лазерного излучения. Градиентная линза с таким показателем преломления, собирает все параллельные оси лучи в фокус на поверхности, носит название линзы Микаэляна.

В [10] предложено искать модовое решение волнового уравнения для 2D градиентной среды с показателем преломления в виде гиперболического секанса, аналогично, поиску солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера.

В данной работе получены параксиальное и непараксиальное решения в виде гиперболического секанса для градиентного двумерного волновода, показатель преломления которого зависит от поперечной координаты в виде гиперболического секанса. Для цилиндрической градиентной линзы Микаэляна найдена аналогичная фотонно-кристаллическая линза, которая может быть изготовлена по технологии фото- или электронной-литографии. На основе реализованного на языке программирования C++ FDTD-метода проведено сравнительное моделирование прохождения плоской волны через обе микролинзы.

1. Модовое решение для градиентной среды Микаэляна

В 1951 году А.Л. Микаэлян показал [9], что в градиентной среде с цилиндрической симметрией и с зависимостью показателя преломления от радиальной координаты в виде функции гиперболического секанса все лучи, исходящие из одной осевой точки, на некотором расстоянии опять соберутся в осевом фокусе. Это явление, называется самофокусировкой света в градиентной среде.

Можно показать, что в двумерной градиентной среде, показатель преломления которой зависит от поперечной координаты в виде функции гиперболического секанса, будет распространяться световое поле, которое сохраняет свою структуру, проявляя модовые (солитонные) свойства, и комплексная амплитуда которого пропорциональна той же функции гиперболического секанса.

Действительно, пусть распределение показателя преломления в 2D модельной градиентной среде зависит только от поперечной координаты в виде функции гиперболического секанса:

$$n(y) = n_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right), \quad (1)$$

где n_0 – максимальный показатель преломления в среде на оптической оси, k – волновое число света в вакууме. В случае ТЕ-поляризации единственная

отличная от нуля проекция вектора напряженности электрического поля монохроматической электромагнитной волны $E_x(y, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k^2 n_0^2}{ch^2 (kn_0 y / \sqrt{2})} \right] E_x(y, z) = 0, \quad (2)$$

где z – направление вдоль оптической оси. Тогда модовое решение уравнения (2) в виде солитона будет иметь вид:

$$E_x(y, z) = E_0 ch^{-1} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{ikn_0 z}{\sqrt{2}} \right), \quad (3)$$

где E_0 – постоянная. Интересно, что решение (3) имеет место и в паракиальном случае. Если вместо градиентной среды (1) выбрать несколько иную зависимость показателя преломления от поперечной координаты:

$$n_1(y) = n_0 \sqrt{1 + ch^{-2} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right)}, \quad (4)$$

где $n_1(0) = \sqrt{2}n_0$ – максимальный показатель преломления среды и $n_1(\infty) = n_0$ – минимальный показатель преломления, то решение паракиального уравнения

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k^2 n_0^2}{ch^2 (kn_0 y / \sqrt{2})} \right] \times E_{1x}(y, z) = 0 \quad (5)$$

будет иметь вид, аналогичный комплексной амплитуде (3):

$$E_{1x}(y, z) = E_0 ch^{-1} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{ikn_0^2 z}{4} \right). \quad (6)$$

Заметим, что решения (3) и (5) обладают конечной энергией:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |E_x(y, z)|^2 dy = |E_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} ch^{-2} (kn_0 y / \sqrt{2}) dy = 2|E_0|^2. \quad (7)$$

Модовые решения, аналогичные (3) и (5), можно найти для 3D-градиентного волновода с показателем преломления:

$$n(x, y) = n_0 ch^{-1} \left(bx + y \sqrt{(kn_0)^2 / 2 - b^2} \right), \quad (8)$$

где b – произвольный параметр. Способ получения такого ch^{-1} – решения можно найти в недавних работах И.В. Алименкова [11, 12], в которых найдены 3D-солитонные решения для нелинейного уравнения Шредингера с керровской нелинейностью тре-

тьего порядка, когда показатель преломления нелинейной среды описывается выражением:

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 + \alpha I(x, y, z), \quad (9)$$

где α – постоянная, $I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2$ – интенсивность одной из компонент вектора напряженности электрического поля световой волны. На аналогию между солитонным ch^{-1} – решением для нелинейной среды (9) и для линейной градиентной среды с показателем преломления (1) или (4) впервые указал A.W. Snyder [10].

В следующем разделе мы покажем, как можно заменить цилиндрическую градиентную микролинзу Микаэляна (ЛМ) на 2D фотонно-кристаллическую линзу.

2. Фотонно-кристаллическая линза

Двумерная фотонно-кристаллическая линза (ФК-линза) состоит из фотонного кристалла, радиус дырочек в котором меняется по определенному закону. Подобно обычной линзе фотонно-кристаллическая линза позволяет сфокусировать параллельный световой пучок в точку. Однако ФК-линза может быть более компактна или может быть более простой в изготовлении. На рис. 1 схематически изображена ФК-линза.

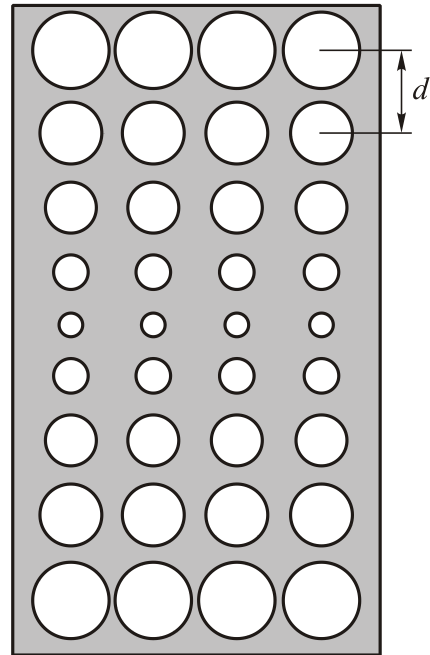


Рис. 1. Фотонно-кристаллическая линза

Любую линзу можно приблизительно заменить ФК-линзой, даже ту, которую трудно или невозможно сделать на текущем уровне технологического развития. Рассмотрим, как можно рассчитать аналог линзы Микаэляна.

Как известно, цилиндрическая ЛМ [9] – это градиентная линза, показатель преломления которой меняется от центра к краю линзы по определенному закону.

$$n(y) = \frac{n_0}{ch\left(\frac{\pi|y|}{2L}\right)}, \quad (10)$$

где L – ширина линзы вдоль оси z , n_0 – показатель преломления в ее центре.

Подберем эквивалентную ФК-линзу из материала с показателем преломления n и шириной a так, чтобы ей можно было бы заменить ЛМ. Для этого потребуем, чтобы в дискретных точках этой линзы оптическая длина пути равнялась оптической длине пути в ЛМ. Оптическая длина пути в ЛМ будет равна:

$$\Delta_1 = \frac{Ln_0}{ch\left(\frac{\pi|y|}{2L}\right)}. \quad (11)$$

В ФК- линзе:

$$\Delta_2 = N[2r(y) + (d - 2r(y))n], \quad (12)$$

где N – количество дырок в ряду, d – постоянная кристалла, $r(y)$ – радиус дырочки, меняющийся от ряда к ряду. Приравнявая оптические длины (11) и (12), получим следующую зависимость для радиуса

$$r(y) = \frac{d}{2(n-1)} \times \left(n - n_0 \frac{1}{ch\left(\frac{\pi|y|}{2L}\right)} \frac{L}{a} \right). \quad (13)$$

Пусть в каждом столбике линзы M дырочек. Тогда полученная зависимость должна выполняться в точках $y = \pm dm$, m меняется от 0 до $M/2$. При этом на радиус дырочки также должны быть наложены определенные условия. Во-первых, радиус должен быть неотрицательным. Из формулы (13) видно, что минимальное значение радиуса достигается в точке $y = 0$. Наложив на него условие неотрицательности, получим следующую связь для параметров ЛМ и соответствующей ей фотонной линзы.

$$na \geq n_0L. \quad (14)$$

Во-вторых, диаметр дырочки, очевидно, должен быть меньше постоянной кристалла. Максимальное значение радиуса достигается в точке $y = b/2$, где b – апертура линзы. Указанное условие налагает следующее ограничение на апертуру линзы:

$$ch\frac{\pi b}{4L} < n_0 \frac{L}{a} \quad (15)$$

В-третьих, на период решетки, как уже было сказано выше, должно налагаться условие $d < \lambda$. Кроме того, при численном моделировании фотонно-кристаллической линзы шаг сетки должен выбираться настолько маленьким, чтобы радиус менялся от ряда к ряду. Дело в том, что может получиться

так, что изменение радиуса от ряда к ряду может оказаться меньшим, чем шаг дискретизации. В этом случае радиус не изменится и желаемый эффект достигнут не будет.

4. Численное моделирование

Моделирование дифракции света на 2D микролинзах проводилось с помощью разностного решения уравнений Максвелла FDTD-методом. На языке C++ в среде разработки MS Visual Studio 6.0 был реализован алгоритм Yee [13] в двумерном случае для ТЕ-поляризации. Ввод излучения в расчетную область реализован с использованием условия «полное поле – рассеянное поле» [14]. В качестве граничных условий выбраны идеально поглощающие слои Беренгера (J. P. Berenger) [15].

Линза Микаэляна обладает свойством фокусировки света в точку на поверхности. В нашем численном эксперименте использовалась ЛМ с параметрами: длина волны $\lambda = 1,5 \text{ мкм}$, $L = 3 \text{ мкм}$, $n_0 = 1,5$, $b = 4 \text{ мкм}$. Распределение квадрата модуля комплексной амплитуды электрического поля при прохождении света через такую линзу показано на рис. 2, и сечение интенсивности – на рис. 3.

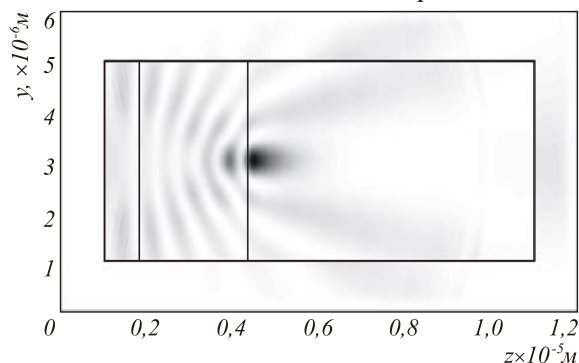


Рис. 2. Распределение квадрата модуля электрического поля $|E_x|^2$ (негатив), расположение линзы указано серым прямоугольником

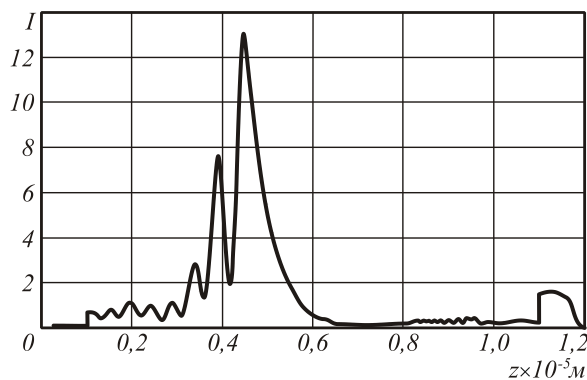


Рис. 3. Распределение квадрата модуля электрического поля $|E_x|^2$ в сечении по главной оси линзы

На графике видно, что фокус такой линзы точно совпадает с ее передней поверхностью.

Теперь промоделируем прохождение света через фотонно-кристаллическую линзу Микаэляна (ФЛМ) с параметрами $a = L = 3$ мкм, $n = n_0 = 1,5$, $d = 0,25$ мкм. На рис. 4 показана зависимость радиуса дырочек (рис. 1) в ФЛМ от номера ряда этих дырочек.

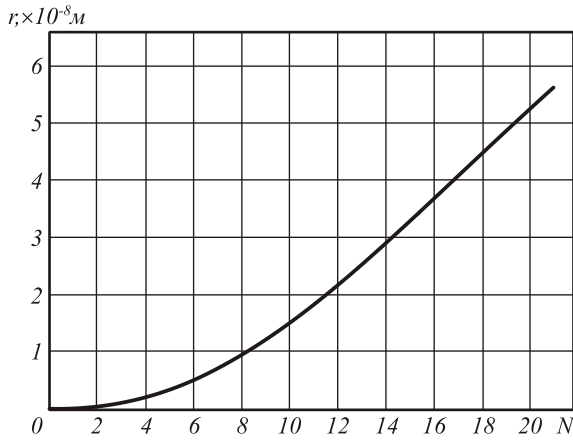


Рис. 4. Зависимость радиуса дырочки от номера ряда

Однако даже при большой дискретизации $\lambda/h = 100$, получается достаточно неточное приближение для радиуса. Это показано на рис. 5.

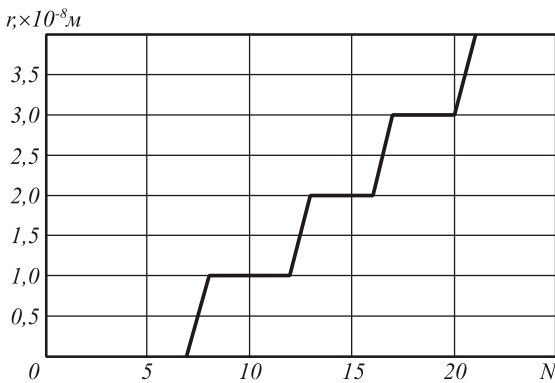


Рис. 5. Зависимость радиуса дырочки от номера ряда, при дискретизации 100 отсчетов на длину волны

На рис. 6 и 7 показано распределение квадрата модуля комплексной амплитуды света при прохождении через линзу.

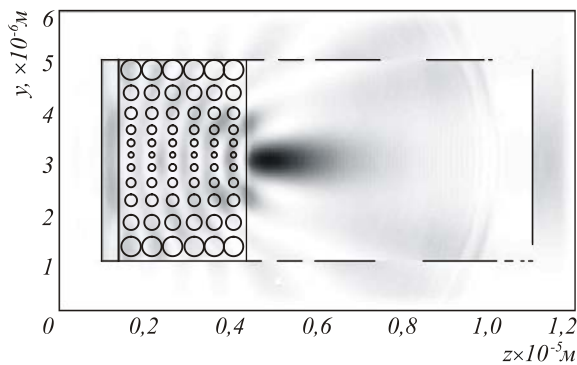


Рис. 6. Распределение квадрата модуля электрического поля $|E_x|^2$ (негатив).

Расположение линзы указано серым прямоугольником

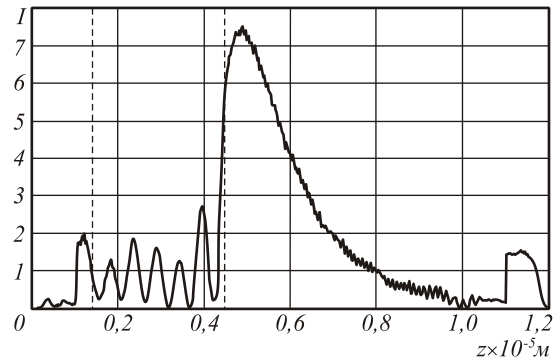


Рис. 7. Распределение квадрата модуля электрического поля $|E_x|^2$ вдоль главной оптической оси линзы

Видно, что фокус этой линзы находится на расстоянии $f = 3,3$ мкм от начала линзы, т.е. достаточно точно соответствует ЛМ с $L = 3$ (мкм). Интенсивность в фокусе $I_f = 7,5$, что меньше, чем в ЛМ, и длина фокуса по оси z этой линзы в 2 раза больше, чем у ЛМ. Это объясняется малой дискретизацией и слабой аппроксимацией (рис. 5) кривой на рис. 4. На рис. 7 видны шумы, вызываемые соединительными условиями процедуры «полное поле – рассеянное поле» (это не физические шумы). Распределение квадрата модуля электрического поля в фокальной плоскости показано на рис.8.

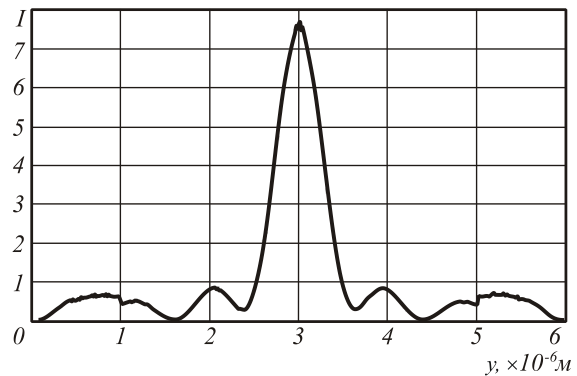


Рис.8. Распределение квадрата модуля электрического поля $|E_x|^2$ в фокальной плоскости

Из рис. 8 видно, что диаметр светового пятна равен $D = 1,2$ мкм. По формуле скалярной оптики, диаметр пятна равен:

$$D_{теор} = \frac{2\lambda f}{b}. \tag{16}$$

Согласно (16) получим, что $D_{теор} = 1,02$ мкм. Отличие рассчитанного диаметра фокального пятна ФЛМ от диаметра по формуле (16) составляет 18%. Это свидетельствует о том, что скалярная оптика на расстояниях в несколько длин волн дает достаточно точные результаты.

Заключение

В работе получены следующие результаты.

- 1) Получены ch^{-1} -модовые решения (параксиальное и непараксиальное) для 2D градиентной среды с показателем преломления в виде гиперболического секонса.
- 2) На языке программирования C++ в среде разработки MS Visual Studio 6.0 реализован 2D FDTD-метод (разностная схема Yee, ввод излучения Мооре, граничные условия Berenger).
- 3) Получен фотонно-кристаллический аналог цилиндрической линзы Микаэляна и с помощью FDTD-метода проведен сравнительный анализ дифракции плоской ТЕ-поляризованной волны на обеих микро-линзах.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600.

Литература

1. Taflov A. Computational Electrodynamics: the finite-difference time-domain method. – М.: Artech House, Inc. 1995. – 597с.
2. Pernice W.H., Payne F.P., Gallagher D.F. Numerical investigation of field enhancement by metal nano-particles using a hybrid FDTD-PSTD algorithm // Optics Express. – 2007. – Vol.15. – P.11433-11443.
3. Kim J.H., Chrostowski L., Bisailon E., Plant D.V. DBR, sub-wavelength grating, and photonic crystal slab Fabry-Perot cavity design using phase analysis by FDTD // Optics Express. – 2007. – Vol.15. – P. 10330-10339.
4. Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics // Phys. Rev. – 1987. – Vol. 58. – P. 2059-2062.
5. Hugonin J.P., Lalanne P., White T.P., Krauss T.F. Coupling into slow-mode photonic crystal waveguides // Opt. Lett.-2007. – Vol. 32. – P. 2639-2640.
6. Kwan K.C., Tao X.M., Peng G.D. Transition of lasing modes in disordered active photonic crystals // Opt. Lett. 2007. – Vol. 32. – P. 2720-2722.
7. Zabelin V., Dunbar L.A., Thomas N.L., Houndre R., Kottlyar M.V., O'Faolain L., Krauss T.F. Self-collimating photonic crystal polarization beam splitter // Opt. Lett.-2007. – Vol. 32. – P. 530-532.
8. Li Y., Jin J. Fast full-wave analysis of large-scale three-dimensional photonic crystal device // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. – Vol. 24. – P.2406-2415.
9. Микаэлян А. Л. Применение свойств среды для фокусирования волн // Доклады академии наук СССР. – 1951. – Вып. 81. – С. 569-571.
10. Snyder A.W., Mitchell D.J. Spatial solitons of the power-law nonlinearity // Opt. Lett. – 1993. – Vol.18. – P.101-103.
11. Алименков И.В. Точно решаемые математические модели в нелинейной оптике // Компьютерная оптика. – 2005. – №28. – С. 45-54.
12. Алименков И.В. Нелинейное уравнение Шредингера в трех пространственных переменных // Компьютерная оптика. – Самара, 2005. – № 28. – С. 55-59.
13. Yee K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1966. – AP-14. – P. 302-307.
14. Moore G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. – 1981. – Vol.23. – P. 377-382.
15. Berenger J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Computational Physics. – 1994. – Vol.114. – P. 185-200.

PHOTONIC-CRYSTAL MIKAEELIAN LENS

Ya.R. Triandaphilov^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}

¹Samara State Aerospace University (SSAU),

²Image Processing Systems Institute of the RAS

Abstract:

Mode solutions are obtained in the form of a hyperbolic secant for the two-dimensional gradient medium with the refraction index in the form of the hyperbolic secant too. A photonic crystal (PhC) analog of a cylinder Mikaelian gradient lens is founded, and the comparative numerical simulation of diffraction of a plane wave is conducted on both microlenses with the help of the two-dimensional FDTD-method.

Keywords: 2D photonic-crystal lens, Mikaelian gradient lens, microoptics

Citation: Triandaphilov YaR, Kotlyar VV. Photonic-crystal Mikaelian lens [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(3): 27-31.

Acknowledgements: The research was partly supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-Sa-06) and the RFBR grants Nos. 05-08- 50298 and 07-07-97600.

References:

- [1] Taflove A. *Computational Electrodynamics: the finitedifference time-domain method*. M.: Artech House, Inc., 1995; 597 p.
- [2] Pernice WH, Payne FP, Gallagher DF. Numerical investigation of field enhancement by metal nano-particles using a hybrid FDTD-PSTD algorithm. *Optics Express* 2007; 15: 11433-11443.
- [3] Kim JH, Chrostowski L, Bisaiillon E, Plant DV. DBR, sub-wavelength grating, and photonic crystal slab FabryPerot cavity design using phase analysis by FDTD. *Optics Express* 2007; 15: 10330-10339.
- [4] Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solidstate physics and electronics. *Phys. Rev.* 1987; 58: 2059-2062.
- [5] Hugonin JP, Lalanne P, White TP, Krauss TF. Coupling into slow-mode photonic crystal waveguides. *Opt. Lett.* 2007; 32: 2639-2640.
- [6] Kwan KC, Tao XM, Peng GD. Transition of lasing modes in disordered active photonic crystals. *Opt. Lett.* 2007; 32: 2720-2722.
- [7] Zabelin V, Dunbar LA, Thomas NL, Houndre R, Kotlyar MV, O'Faolain L, Krauss TF. Self-collimating photonic crystal polarization beam splitter. *Opt. Lett.* 2007; 32: 530-532.
- [8] Li Y, Jin J. Fast full-wave analysis of large-scale threedimensional photonic crystal device. *J. Opt. Soc. Am. B* 2007; 24: 2406-2415.
- [9] Mikaelian AL. Application of medium properties for wave focusing [In Russian]. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR* 1951; 81: 569-571.
- [10] Snyder AW, Mitchell DJ. Spatial solitons of the powerlaw nonlinearity. *Opt. Lett.* 1993; 18: 101-103.
- [11] Alimenkov IV. Exactly solvable mathematical models in nonlinear optics [In Russian]. *Computer Optics* 2005; 28: 45-54.
- [12] Alimenkov IV. The nonlinear Schroedinger equation in three spatial variables [In Russian]. *Computer Optics* 2005; 28: 55-59.
- [13] Yee KS. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1966; AP-14: 302-307.
- [14] Moore G. Absorbing boundary conditions for the finitedifference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility* 1981; 23: 377-382.
- [15] Berenger JP. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Computational Physics* 1994; 114: 185-200.