

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С БАЗИСОМ ХААРА

В.Н. Копенков

*Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева,*

В работе предлагаются два новых быстрых алгоритма вычисления локального дискретного вейвлет-преобразования одномерного сигнала на примере вейвлет-базиса Хаара, приводятся выражения для их вычислительной сложности, производится их сравнение друг с другом и с известным алгоритмом быстрого вейвлет-преобразования. Приведены рекомендации по использованию каждого из предложенных алгоритмов. В частности, указаны области «предпочтения» этих алгоритмов, то есть параметры задачи вычисления вейвлет-преобразования, для которых эти алгоритмы вычислительно эффективны. На основе анализа сложности алгоритмов, а также с учетом дополнительных возможностей, которые дает рекурсивный алгоритм, делается вывод о его преимуществе по сравнению с альтернативным и с известным алгоритмом быстрого вейвлет-преобразования. Представлено обобщение рассмотренных алгоритмов на 2-х мерный случай.

Введение

Вейвлет-анализ является в настоящее время одним из наиболее эффективных инструментов, предназначенных для исследования локальных пространственных и частотных характеристик сигналов [1,2]. В настоящей работе для решения задач локального вейвлет-анализа данных предполагается заменить известную иерархическую вычислительную конструкцию, присущую хорошо известным алгоритмам расчета дискретного вейвлет-преобразования (ДВП), таким как «*algorithme a trous*» [3] и быстрый алгоритм дискретного ортогонального вейвлет-разложения С.Малла [2] (БВП). Замена конструкции предполагает ее трансформацию от иерархической схемы вычислений, используемой в известных алгоритмах, к схеме, в которой вычисление коэффициентов для вейвлетов каждого уровня производится последовательно для всех его позиций на цифровом сигнале в рекурсивном режиме [4-6]. Данное изменение вычислительной конструкции вейвлет-преобразования позволяет отойти от «блочного» характера вычислений [1,2], который обычно приводит либо к избыточной в вычислительном плане схеме последовательного вычисления вейвлет-преобразования (для сильно перекрывающихся блоков анализа), либо к снижению качественных показателей анализа (при расположении блоков вейвлет-преобразования без перекрытий). Изменение вычислительной конструкции в параллельную или параллельно-рекурсивную форму, которая хорошо приспособлена к задаче локального «скользящего» анализа цифровых сигналов и изображений [4-6], приводит, в частности, к существенному снижению сложности обработки.

Работа организована следующим образом.

В первом разделе приводится определение вейвлетов, дискретного вейвлет-преобразования одномерного сигнала, дается вид вейвлет-базисов Хаара. Этот раздел является вводным и содержит

только известные сведения из теории вейвлетов, доступные, например, в монографиях [1,2].

Во втором разделе приводится описание прямого и быстрого алгоритма вычисления дискретного вейвлет-преобразования, приводятся выражения для его вычислительной сложности.

В третьем разделе дается определение локального дискретного вейвлет-преобразования одномерного сигнала, приводятся выражения для сложности реализации локального вейвлет-преобразования в случае, применения известных алгоритмов, описанных во втором разделе. Этот раздел содержит очевидное развитие известных результатов.

В четвертом разделе предлагается алгоритм, который является адаптацией быстрого алгоритма дискретного вейвлет-преобразования одномерного сигнала, приведенного во втором разделе, на случай локальной обработки сигнала. Приводятся выражения для вычислительной сложности предложенного алгоритма.

В пятом разделе приводится описание нового рекурсивного алгоритма локального дискретного вейвлет-разложения одномерного сигнала на основе базиса Хаара, приводятся выражения для его вычислительной сложности.

В шестом разделе представлено обобщение разработанных алгоритмов на случай работы с 2D сигналами (изображениями). Так же приводятся выражения для вычислительной сложности всех алгоритмов в этом случае.

В седьмом разделе производится аналитическое сравнение алгоритмов: модифицированного алгоритма быстрого дискретного вейвлет-преобразования, описанного в четвертом разделе, и рекурсивного, описанного в пятом разделе. Выводится выражение, которое определяет область «предпочтения» каждого из алгоритмов. Приводится ряд возможностей рекурсивного алгоритма, которые, наряду с характеристиками его сложности, позволяют утверждать о его преимуществе по сравнению с модифицированным

алгоритмом быстрого дискретного вейвлет-преобразования. Аналогичные выражения и расчет области предпочтения приведены и для 2D случая.

1. Вейвлет-преобразование (ВП) и базис Хаара

1.1 Непрерывный случай

Функция $\psi(t)$ называется вейвлетом (всплеском), если для нее выполняются следующие условия [1,2]:

- $\psi(t) \in L^2(R)$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.

Функцию двух переменных a, b , задаваемую выражением

$$Wx(b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{b-t}{a}\right) dt, \tag{1}$$

называют вейвлет-преобразованием функции $x(t) \in L^2(R)$ [1,2].

Вейвлеты вида $\{2^{m/2} \psi(2^m t - k)\}$ для фиксированного m являются базисом подпространства $W_m = V_m \setminus V_{m-1}$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) в ортогональном кратномасштабном анализе (ОКА), который определен следующим образом [1,2].

Определение. Система подпространств $V_m \subset L^2(R)$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) в пространстве $L^2(R)$ называется ОКА, если она удовлетворяет условиям:

- ✓ $V_m \subset V_{m+1}$,
- ✓ $v(t) \in V_m \Leftrightarrow v(2t) \in V_{m+1}$,
- ✓ $v(t) \in V_0 \Leftrightarrow v(t+1) \in V_0$,
- ✓ $\bigcup_m V_m = L^2(R)$, $\bigcap_m V_m = \emptyset$,
- ✓ $\exists \varphi(t) \in V_0$, называемая скейлинг-функцией, такая что $\{\varphi(t-m)\}_{m=0, \pm 1, \dots}$ – ортонормированный базис V_0 .

Одним из наиболее известных вейвлет-базисов является базис Хаара [1,2], скейлинг-функция которого определяется следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ 0, & t \notin [0, 1). \end{cases} \tag{2}$$

Вейвлеты Хаара имеет вид [1,2]:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t \notin [0, 1). \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Дискретный случай

Отсчеты дискретного сигнала $x(n)$ интерпретируются как коэффициенты разложения этого сигнала по скейлинг-функциям (2). Таким образом, дис-

кретный сигнал $x(n)$ представляется как кусочно-постоянная функция и, следовательно, интерпретируются как функция пространства V_0 .

Для сигнала $x(n)$ ($n \geq 0$) с нулевым средним дискретное вейвлет-преобразование задается выражением:

$$Wx(k, m) = 2^{-\frac{m+1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \psi\left(\frac{n}{2^{m+1}} - k\right) \quad (m, k \geq 0). \tag{4}$$

Для сигналов со средним, отличным от нулевого, для обратимости преобразования (4) добавляется значение скалярного преобразования со скейлинг-функцией максимального масштаба (берется из размеров сигнала).

2. Алгоритм быстрого вейвлет-преобразования

Расчета коэффициентов вейвлет-преобразования непосредственно по выражению (4) является достаточно трудоемкой процедурой. Действительно, в ортогональном (безизбыточном) представлении (4) дискретного сигнала длины $N = 2^L$ участвуют $N-1$ вейвлетов различных масштабов $m = \overline{1, L}$ и одна скейлинг-функция размера N . Каждый вейвлет масштаба m имеет размер $S(m) = 2^m$ (число ненулевых отсчетов), число вейвлетов этого масштаба – $K(m) = N/2^m = 2^{L-m}$. Поэтому для расчета коэффициентов ортогонального вейвлет-преобразования (4), то есть соответствующих скалярных произведений для всех вейвлетов и скейлинг-функции, требуется, очевидно

$$U(N) = N + \sum_{m=1}^L S(m) K(m) = N + \sum_{m=1}^L N = N(\log_2 N + 1)$$

операций сложения (нормирующие множители здесь и далее не учитываем, умножение на единицу также игнорируется).

Идея ускорения расчета преобразования (4) заключается в простом использовании того факта, что пространства V_m есть прямая сумма пространств W_{m-1}, V_{m-1} : $V_m = W_{m-1} \oplus V_{m-1}$. Тогда, имея текущее представление функции в пространстве V_m , мы можем получить с помощью проекций представления в пространствах W_{m-1}, V_{m-1} [1-3].

Соответствующий быстрый алгоритм ДВП имеет вид [1-3]:

На 1-ом уровне:

$$\begin{aligned} w_1^+(k) &= x(2k) + x(2k+1) \\ w_1^-(k) &= x(2k) - x(2k+1) \end{aligned} \quad k = \overline{0, N/2-1} = \overline{0, K(1)}$$

На 2-ом уровне:

$$\begin{aligned} w_2^+(k) &= w_1^+(2k) + w_1^+(2k+1) \\ w_2^-(k) &= w_1^+(2k) - w_1^+(2k+1) \end{aligned} \quad k = \overline{0, K(2)-1}$$

...

На L -ом уровне:

$$\begin{aligned} w_L^+(0) &= w_{L-1}^+(0) + w_{L-1}^+(1) \\ w_L^-(0) &= w_{L-1}^+(0) - w_{L-1}^+(1), \quad k = 0, \overline{K(L)-1} = 0. \end{aligned}$$

Эту расчетную процедуру иногда называют *быстрым вейвлет-преобразованием* (БВП), а иногда – алгоритмом Малла, по имени человека, доказавшего теорему, которая показывает корректность именно такой процедуры расчета [2].

Вычислительная сложность такого алгоритма, очевидно, составляет [1-3]

$$U_1(N) = 2 \sum_{m=1}^L K(m) = 2N \left(\sum_{m=0}^L 2^{-m} - 1 \right) = 2(N-1) \quad (5)$$

операций сложения, необходимых для вычисления всех коэффициентов дискретного ортогонального ВП. В дальнейшем мы будем пользоваться выражением для приведенной вычислительной сложности, то есть числу операций, приходящихся на один отсчет исходного сигнала. В этом случае, получаем следующее выражение для вычислительной сложности:

$$U_1^* = \frac{U_1(N)}{N} = 2 \frac{N-1}{N} \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} 2. \quad (6)$$

3. Локальное ДВП цифрового сигнала

На практике часто приходится использовать не полное разложение сигнала, а его локальное разложение. При локальном разложении каждый возможный фрагмент сигнала длины $M_2 = 2^{L_2}$ должен быть подвергнут разложению по заданной системе функций. Такую обработку обычно называют обработкой в скользящем окне [4-6], поскольку область обработки из M_2 отсчетов последовательно сдвигается, занимая все возможные положения на оси дискретного аргумента. Обработка в скользящем окне является неотъемлемой частью целого ряда прикладных задач, таких как обнаружение и распознавание локальных объектов/сигналов, локальный анализ, адаптивные преобразования и других [4,5].

При использовании для расчета коэффициентов локального вейвлет-преобразования алгоритма БВП, описанного во втором разделе настоящей работы, сложность обработки в пересчете на число областей/фрагментов анализа составляет, очевидно

$$U_2^*(M_2) = \frac{(N - M_2 + 1)U_1(M_2)}{(N - M_2 + 1)} = 2(M_2 - 1) \quad (7)$$

операций сложения.

Следует отметить, что в большинстве практических задач локального анализа сигналов и изображений нет необходимости получать все возможные коэффициенты разложения [4,5]. Обычно диапазон интересующих функций разложения уже, обычно он ограничен (по частоте) снизу и сверху. Снизу – максимальными размерами объектов, сверху – их минимальными размерами и размерами их существенных деталей. Поэтому введем в рассмотрение раз-

мер $M_1 = 2^{L_1}$ ($1 \leq L_1 \leq L_2$), который ограничивает минимальный уровень вейвлетов в разложении (4). Тогда вычислительная сложность БВП для диапазона уровней $[L_1, L_2]$ составит:

$$U_2^*(L_1, L_2) = 2(2^{L_2} - 1) \quad (8)$$

операций сложения и не зависит от положения «нижнего» уровня L_1 .

4. Модификация алгоритма быстрого вейвлет-преобразования

Алгоритм БВП допускает ряд модификаций, которые позволяют избавиться от избыточных операций, связанных с повторными расчетами на перекрывающихся областях локального анализа. Модификация заключается в следующем:

- построение вейвлет-разложения только для L_2 уровней ($M = 2^{L_2}$);
- учитывается, что вычисление коэффициентов уровня $l \geq L_1$ невозможно производить без расчета коэффициентов $w_j^+(\dots)$ уровней $j = \overline{1, l-1}$. Поэтому для уровней $j \in [1, L_1 - 1]$ производится расчет только коэффициентов $w_j^+(\dots)$;
- для уровней $l \in [L_1, L_2]$ производится вычисление и $w_l^-(\dots)$, и $w_l^+(\dots)$.
- для вейвлета l -го уровня ($l \in [0, L_2]$) рассчитывать столько разложений, сколько допускает ширина вейвлета $K(l)$, то есть $N - S(l) + 1$. Поскольку на предыдущем шаге уже получено $N - S(l-1) + 1$ коэффициентов $w_j^+(\dots)$ для всех возможных положений вейвлета $(m-1)$ -ого уровня, то такая процедура расчета становится правомерной;

В итоге, учитывая, что для получения двух коэффициентов $w_l^-(\dots)$ и $w_l^+(\dots)$ требуется две операции сложения, а для получения одного коэффициента $w_l^+(\dots)$ – одна операция, получим следующее выражение для сложности:

$$U_3^*(L_1, L_2) = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=1}^{L_1-1} (N - S(m) + 1) + 2 \sum_{m=L_1}^{L_2} (N - S(m) + 1) \right)$$

в случае если ($L_1 \geq 2$).

Преобразование приведенной формулы дает следующее явное выражение для вычислительной сложности модифицированного алгоритма:

$$U_3^*(L_1, L_2) = \frac{(N+1)(2L_2 - L_1 + 1) + 2(2^{L_1-1} - 2^{L_2+1} + 1)}{N}.$$

Что можно записать в виде выражения:

$$U_3^*(L_1, L_2) \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} 2L_2 - L_1 + 1, \quad (9)$$

которое уже зависит и от «верхнего» L_2 , и от «нижнего» L_1 уровней ВП.

5. Рекурсивный алгоритм локального ДВП

Для снижения сложности локального ДВП можно использовать рекурсивные методы обработки [4-6]. В рекурсивных методах сложность алгоритма обработки не зависит от размера области определения функции разложения, а определяется разностным уравнением [4-6]. Для базиса Хаара применимо следующее разностное уравнение, которое позволяет вычислять коэффициенты разложения для каждой функции независимо и последовательно, по мере движения области анализа:

$$w_l^-(n) = w_l^-(n-1) - x(n+2^{l-1}) + 2x(n) - x(n-2^{l-1}-1)$$

для всех $l \in [L_1, L_2]$

Как видно из приведенной формулы пересчета коэффициентов вейвлет-преобразования, для расчета локального ДВП необходимо

$$U_4^*(L_1, L_2) = 3(L_2 - L_1 + 1) \quad (10)$$

арифметических операций сложения (умножение на «2» не считается за операцию, поскольку может быть реализована операция побитового сдвига).

6. Обобщение алгоритмов на 2D случай

6.1 Быстрый алгоритм ДВП

Разработанные быстрые алгоритмы локального ДВП можно обобщить на 2D случай, то есть на случай работы с изображениями. При КМА таких сигналов обычно используется схема посторочно-столбцовой развертки сигнала. То есть сначала находится ДВП по строкам, а потом по столбцам изображения.

Для удобства изложения допустим, что производится вычисление ДВП для изображения размера $N \times N$ (в случае размера $N \times M$ все выкладки аналогичны), где $N = 2^L$. Тогда в разложении участвуют $N-1$ вейвлетов различных масштабов $m = \overline{1, L}$ и одна скейлинг-функция размера N для определенного количества строк матрицы соответствующего масштабу, и соответствующего количества столбцов. Каждый вейвлет масштаба m имеет размер $S(m) = 2^m$ (число ненулевых отсчетов), число вейвлетов этого масштаба – $K(m) = N/2^m = 2^{L-m}$, кроме того, количество строк и столбцов матрицы, для которых необходимо рассчитать ДВП, эквивалентно $C(m) = N/2^m = 2^{L-m}$.

Поэтому для расчета коэффициентов ортогонального вейвлет-преобразования (4), то есть соответствующих скалярных произведений для всех вейвлетов и скейлинг-функции, требуется:

$$U(N, N) = 2(NN + \sum_{m=1}^L S(m) K(m) C(m)) = 2(N^2 + \sum_{m=1}^L 2^{(m+L-m+L-m)})$$

операций сложения (нормирующие множители

здесь и далее не учитываем, умножение на единицу также игнорируется). Таким образом:

$$U(N, N) = 2N(2N-1).$$

Идея ускорения расчета преобразования аналогична 1D случаю, а различие состоит в том, чтобы использовать четыре отсчета для получения четырех выходных отсчетов.

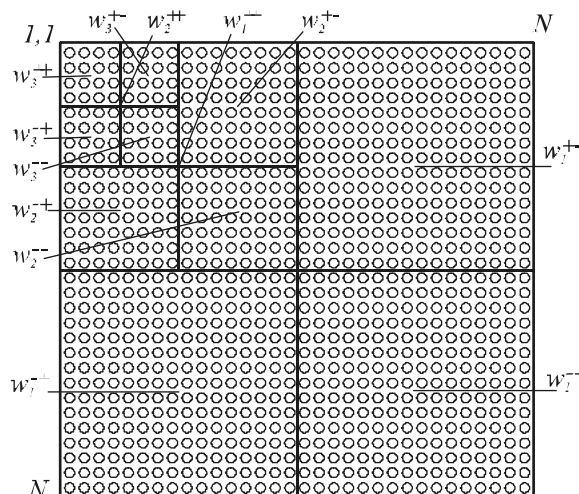


Рис. 1. Пример разложения 2D сигнала до третьего уровня вейвлет-коэффициентов

Соответствующий быстрый алгоритм ДВП имеет вид:

$$\text{На 1-ом уровне: } k, j = 0, \overline{\frac{N}{2}-1} = 0, K(1)-1$$

$$w_1^{++}(k, j) = (x(2k, 2j) + x(2k, 2j+1)) + (x(2k+1, 2j) + x(2k+1, 2j+1))$$

$$w_1^{+-}(k, j) = (x(2k, 2j) - x(2k, 2j+1)) + (x(2k+1, 2j) - x(2k+1, 2j+1))$$

$$w_1^{-+}(k, j) = (x(2k, 2j) + x(2k, 2j+1)) - (x(2k+1, 2j) + x(2k+1, 2j+1))$$

$$w_1^{--}(k, j) = (x(2k, 2j) - x(2k, 2j+1)) - (x(2k+1, 2j) - x(2k+1, 2j+1))$$

$$\text{На 2-ом уровне: } k, j = 0, K(2)-1$$

$$w_2^{++}(k, j) = (w_1^{++}(2k, 2j) + w_1^{++}(2k, 2j+1)) + (w_1^{++}(2k+1, 2j) + w_1^{++}(2k+1, 2j+1))$$

$$w_2^{+-}(k, j) = (w_1^{++}(2k, 2j) - w_1^{++}(2k, 2j+1)) + (w_1^{++}(2k+1, 2j) - w_1^{++}(2k+1, 2j+1))$$

$$w_2^{-+}(k, j) = (w_1^{++}(2k, 2j) + w_1^{++}(2k, 2j+1)) - (w_1^{++}(2k+1, 2j) + w_1^{++}(2k+1, 2j+1))$$

$$w_2^{--}(k, j) = (w_1^{++}(2k, 2j) - w_1^{++}(2k, 2j+1)) - (w_1^{++}(2k+1, 2j) - w_1^{++}(2k+1, 2j+1))$$

...

$$\text{На L-ом уровне: } k, j = 0, K(L)-1 = 0$$

$$w_L^{++}(0, 0) = (w_{L-1}^{++}(0, 0) + w_{L-1}^{++}(0, 1)) + (w_{L-1}^{++}(1, 0) + w_{L-1}^{++}(1, 1))$$

$$w_L^{+-}(0, 0) = (w_{L-1}^{++}(0, 0) - w_{L-1}^{++}(0, 1)) + (w_{L-1}^{++}(1, 0) - w_{L-1}^{++}(1, 1))$$

$$w_L^{-+}(0, 0) = (w_{L-1}^{++}(0, 0) + w_{L-1}^{++}(0, 1)) - (w_{L-1}^{++}(1, 0) + w_{L-1}^{++}(1, 1))$$

$$w_L^{--}(0, 0) = (w_{L-1}^{++}(0, 0) - w_{L-1}^{++}(0, 1)) - (w_{L-1}^{++}(1, 0) - w_{L-1}^{++}(1, 1))$$

Эта расчетная процедура является аналогом процедуры БВП, построенной для 2D случая. Ее вычислительную сложность представима в виде:

$$U_1(N, N) = 8 \sum_{m=1}^L K(m) \cdot K(m) = 8N^2 \left(\sum_{m=0}^L 2^{-2m} - 1 \right).$$

Отсюда:

$$U_1(N, N) = 8N^2 \left(\frac{N^2 - 1}{3N^2} \right) = \frac{8}{3}(N^2 - 1). \quad (11)$$

Если пользоваться выражением для приведенной вычислительной сложности, то есть числу операций, приходящихся на один отчет исходного сигнала, получаем следующее выражение:

$$U_1^* = \frac{U_1(N, N)}{N \cdot N} = \frac{8}{3} \cdot \frac{(N^2 - 1)}{N^2} \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{8}{3} \approx 2.66. \quad (12)$$

6.2 Локальное ДВП цифрового сигнала

Аналогично одномерному случаю, при обработке в режиме скользящего окна [4-6], область обработки из $M_2 \times M_2 = 2^{L_2} \times 2^{L_2}$ отсчетов последовательно сдвигается, занимая все возможные положения внутри области по осям дискретного аргумента.

При использовании для расчета коэффициентов локального вейвлет-преобразования алгоритма БВП, сложность обработки в пересчете на число областей/фрагментов анализа составляет:

$$U_2^*(M_2, M_2) = \frac{(N - M_2 + 1) \cdot (N - M_2 + 1) U_1(M_2, M_2)}{(N - M_2 + 1) \cdot (N - M_2 + 1)},$$

$$U_2^*(M_2, M_2) = U_1(M_2, M_2) = \frac{8}{3}(M_2^2 - 1) \quad (13)$$

операций сложения.

Аналогично выражению (8), при рассмотрении диапазона ограниченных снизу и сверху вейвлетов, вычислительная сложность БВП для диапазона уровней $[L_1, L_2]$ составит:

$$U_2^*(L_1, L_2) = 8/3(2^{2L_2} - 1) \quad (14)$$

операций сложения, не зависящих от положения «нижнего» уровня L_1

6.3 Модификация алгоритма быстрого вейвлет-преобразования

Рассмотрим модификации, аналогичные одномерному случаю, для минимизации избыточности вычислений:

- построение вейвлет-разложения только для L_2 уровней ($M = 2^{L_2}$);
- расчет только коэффициентов $w_i^{++}(\dots)$ для уровней $j \in [1, L_1 - 1]$;
- вычисление $w_i^{+-}(\dots)$, $w_i^{-+}(\dots)$, $w_i^{--}(\dots)$ и $w_i^{++}(\dots)$ для уровней $l \in [L_1, L_2]$.
- для вейвлета l -го уровня ($l \in [0, L_2]$) рассчитывать столько разложений, сколько допускает ширина вейвлета $S(l)$, то есть $(N - S(l) + 1)^2$;

Учитывая, что для получения четырех коэффициентов $w_i^{+-}(\dots)$, $w_i^{-+}(\dots)$, $w_i^{--}(\dots)$ и $w_i^{++}(\dots)$ требуется восемь операций сложения, а для получения

одного коэффициента $w_i^{++}(\dots)$ – три операции, получим следующее выражение для сложности:

$$U_3^*(L_1, L_2) = \frac{\left(3 \sum_{m=1}^{L_1-1} (N - S(m) + 1)^2 + 8 \sum_{m=L_1}^{L_2} (N - S(m) + 1)^2 \right)}{N^2}.$$

При выполнении условия ($L_1 \geq 2$).

Преобразование приведенной формулы дает следующее явное выражение для вычислительной сложности модифицированного алгоритма:

$$U_3^* = \frac{(N+1)^2(8L_2 - 5L_1 - 5) - 2(N+1)(8 \cdot 2^{2L_2} - 5 \cdot 2^{2L_1} - 3) + \frac{1}{3}(8 \cdot 2^{2L_2} - 5 \cdot 2^{2L_1} - 11)}{N^2}.$$

Что аналогично выражению (9) в одномерном случае, зависящему от «верхнего» L_2 , и «нижнего» L_1 уровней ВП:

$$U_3^*(L_1, L_2) \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} 8L_2 - 5L_1 - 5, \quad (15)$$

6.4 Рекурсивный алгоритм локального ДВП

Аналогично одномерному случаю, можно использовать рекурсивные методы обработки [4-5].

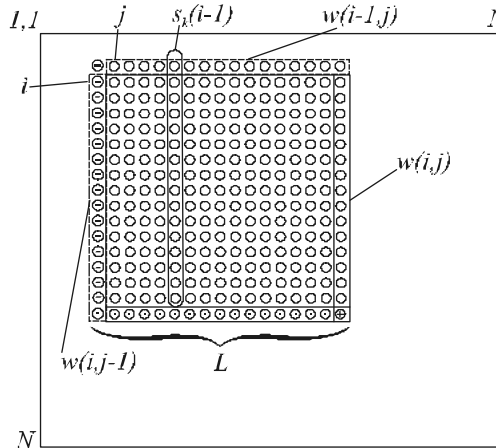


Рис. 2. Вычисление коэффициентов вейвлет-преобразования в режиме «скользящего окна».

Для базиса Хаара применимо следующее разностное уравнение, которое позволяет вычислять коэффициенты разложения для каждой функции независимо и последовательно, по мере движения окна анализа:

$$\begin{aligned} S_{j+L}^+(i) &= S_{j+L}^+(i-1) + x(i+L, j+L) - x(i-1, j+L), \\ w_i^{++}(i, j) &= w_i^{++}(i-1, j) + S_{j+L}^+(i) - S_{j-1}^+(i), \\ w_i^{+-}(i, j) &= w_i^{+-}(i-1, j) + 2 \cdot S_{j+L/2}^+(i) - S_{j-1}^+(i) - S_{j+L}^+(i), \\ S_{j+L}^-(i) &= S_{j+L}^-(i-1) + 2x(i+L, j+L/2) - x(i+L, j+L) - x(i-1, j+L), \\ w_i^{-+}(i, j) &= w_i^{-+}(i-1, j) + S_{j+L}^-(i) - S_{j-1}^-(i), \\ w_i^{--}(i, j) &= w_i^{--}(i-1, j) + 2 \cdot S_{j+L/2}^-(i) - S_{j-1}^-(i) - S_{j+L}^-(i). \end{aligned} \quad (16)$$

$$S_j^+(i) = \sum_{n=1}^L x(i+n, j), \quad S_j^-(i) = \sum_{n=1}^{L/2-1} x(i+n, j) - \sum_{n=L/2}^L x(i+n, j).$$

Как видно из приведенной формулы пересчета коэффициентов вейвлет-преобразования, для расчета всех коэффициентов локального ДВП необходимо лишь 13 сложений. Для расчета всех уровней вейвлетов для всех $l \in [L_1, L_2]$ необходимо:

$$U_4^*(L_1, L_2) = 13(L_2 - L_1 + 1) \tag{17}$$

арифметических операций сложения для любого нового положения окна анализа.

Необходимо заметить, что существуют некоторые дополнительные требования к памяти, а именно необходимо иметь дополнительно $2N$ ячеек памяти для хранения коэффициентов $S_k^+(j)$, $S_k^-(j)$, $k = \overline{1, N}$ и некоторое число дополнительных операций связанных с расчетом $S_k^+(0)$, $S_k^-(0)$, $w_i^{+-}(0, j)$, $w_i^{-+}(0, j)$, $w_i^{--}(0, j)$ и $w_i^{++}(0, j)$.

7. Сравнение рекурсивного и модифицированного алгоритмов БВП

7.1 Одномерный случай

Полученные быстрые алгоритмы локального ДВП, а также выражения для их вычислительной сложности (9) и (10) не позволяют однозначно отдать предпочтение одному из алгоритмов. В то же время можно указать области «предпочтения» каждого из алгоритмов, то есть тот диапазон параметров L_1, L_2 , при которых конкретный алгоритм имеет очевидное преимущество по сложности его выполнения. Для получения границ области «предпочтения» приравняем выражения (9) и (10). Тогда получим:

$$U_3^* = U_4^* \Rightarrow L_1 = \frac{1}{2}L_2 + 1 \text{ или } M_1 = 2\sqrt{M_2}. \tag{18}$$

Таким образом, можно указать простую решающую процедуру, которая оптимальным образом выбирает один из предложенных алгоритмов локального ДВП:

если $L_1 \geq \frac{1}{2}L_2 + 1$, ($M_1 \geq 2\sqrt{M_2}$) то

используется рекурсивный алгоритм ДВП, иначе – модифицированный БВП.

Для удобства ниже представлена таблица, в которой указана область «предпочтения» рекурсивного алгоритма.

параметры локального ДВП		область предпочтения рекурсивного ДВП	
M_2	L_2	$M_1 \geq$	$L_1 \geq$
2	1	-	-
4	2	4	2
8	3	8	3
16	4	8	3
32	5	16	4
64	6	16	4
128	7	32	5
256	8	32	5
512	9	64	6

1024	10	64	6
2048	11	128	7
4096	12	128	7

Как видно из выражений (11) и приведенной таблицы, рост числа «предпочтения» уровней рекурсивного алгоритма пропорционален росту общего числа уровней и составляет около 50%, поскольку

$$L_1 \approx \frac{1}{2}L_2.$$

Это определенно показывает на эффективность рекурсивного алгоритма на тех задачах вейвлет-преобразования, в которых не требуется определения всех коэффициентов вейвлет-преобразования.

Кроме приведенных оценок сложности следует также отметить ряд дополнительных возможностей, которые имеет только рекурсивный алгоритм:

- размер области анализа M_2 не обязательно должен иметь вид степени двойки;
- размеры области определения каждой функции разложения может быть произвольным четным числом;
- производить расчет коэффициентов разложения можно для каждого вейвлета отдельно. Поэтому область уровней, для которых производится расчет вейвлет-преобразования, не обязательно должна быть интервалом;
- рекурсивный алгоритм требует предельно мало памяти. А именно, если отсчеты обрабатываемого сигнала считаются доступными, то для пересчета коэффициентов вейвлет-преобразования требуется всего $L_2 - L_1 + 1$ ячеек памяти, которые хранят собственно значения этих коэффициентов. В отличие от рекурсивного алгоритма, модифицированный алгоритм требует столько ячеек памяти, сколько коэффициентов вейвлет-преобразования получается на области анализа M_2 , то есть около

$$\sum_{m=1}^{L_2-1} (M_2 - S(m) + 1),$$

что составляет следующее число: $(M_2 + 1)(L_2 - 2) + 4$. Очевидно, что для любых L_2, L_1 справедливо: $L_2 - L_1 + 1 \ll (M_2 + 1)(L_2 - 2) + 4$.

7.2 Двумерный случай

Аналогично одномерному случаю, можно считать области «предпочтения» каждого полученных быстрых алгоритмы локального ДВП, используя выражения для их вычислительной сложности (15) и (17). Для получения границ области «предпочтения» приравняем выражения (15) и (17). Тогда получим:

$$U_3^* = U_4^* \Rightarrow L_1 = \frac{5}{8}L_2 + 1 \text{ (} M_1 = 2^{0.625}\sqrt{M_2} \text{)}. \tag{19}$$

Решающая процедура, оптимальным образом выбирающая один из алгоритмов локального ДВП, имеет вид:

если $L_1 \geq \frac{5}{8}L_2 + 1$, то

используется рекурсивный алгоритм ДВП,
иначе – модифицированный БВП.

Дополнительные возможности и особенности, присущие рекуррентному алгоритму, описанные для одномерного случая, естественным образом переносятся и на случай анализа двухмерных сигналов.

Заключение

Описанные в статье модифицированный нерекурсивный и рекурсивный алгоритмы расчета ЛДВП позволяют сократить количество операций при разложении сигналов в задачах локального вейвлет-анализа.

Сравнение полученных выражений для сложности различных алгоритмов вычисления коэффициентов ЛДВП (5) и (6), (9) и (10), а также (15) и (16) (в двумерном случае) позволяет утверждать о преимуществах рекурсивного алгоритма. Кроме того, ряд дополнительных возможностей рекурсивного алгоритма локального ДВП, описанных выше, является серьезным аргументом для того, чтобы отдать предпочтение этому алгоритму при решении довольно широкого класса прикладных задач локального вейвлет-преобразования.

В дальнейшем предполагается построить расширение приведенных алгоритмов на случай построения вейвлетов с масштабирующим коэффициентом N .

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ),

проект № 06-01-00616-а; и Министерства образования и науки РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE).

Литература

1. **I. Daubechies** Ten Lectures on Wavelets // CBMS-NSF Lecture Notes nr. 61, SIAM, 1992. – 377 p.
2. **S. Mallat** A wavelet tour of signal processing // Academic Press, 1999 – 637 p.
3. **M. Holschneider**, A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform // M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, Ph. Tchamitchian Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, Chapter A. Berlin: Springer-Verlag, 1989. - pp. 289-297.
4. **A.V. Chernov** Fast Method for Local Image Processing and Analysis // A.V. Chernov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeev Pattern Recognition and Image Analysis, Vol.9, No.4, 1999, pp. 572-577.
5. **V.V. Myasnikov** Methods for Designing Recursive FIR Filters // Proceedings of International Conference “Computer Vision and Graphics” (ICCVG 2004), Warsaw, Poland, September 22-24, 2004, Springer, pp.845-850.
6. **Копенков В.Н.**, Быстрые алгоритмы локального дискретного вейвлет-преобразования с базисом Хаара // Копенков В.Н., Мясников В.В НТК с межд. участием: «ПИТ-2006» Том 2. 2006 г. Самара. стр. 113-118.

EFFICIENT ALGORITHMS FOR LOCAL DISCRETE WAVELET TRANSFORM WITH HAAR BASIS

V.N. Kopenkov^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute of the RAS,

² Samara State Aerospace University

Abstract

In this paper we propose two new fast algorithms for computing a local discrete wavelet transform of a regular signal as illustrated by Haar wavelet basis, give expressions for their computational complexity, and compare them with each other, as well as with the existing fast wavelet transform algorithm. We also give recommendations how to use each of the proposed algorithms. In particular, we indicate preference regions for these algorithms, i.e. task options for calculation of the wavelet transform, for which these algorithms are computationally efficient. Based on the analysis of algorithms' complexity, with regard to additional features offered by the recursive algorithm, we may come to conclusion about its advantages compared with the existing alternative fast wavelet transform algorithm. We summarized the considered algorithms for a two-dimensional case.

Keywords: local discrete wavelet transform, computational complexity, recursive algorithm

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR project No. 06-01-00616-a), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, the Samara Region Government and U.S. Civilian Research & Development Foundation (CRDF Project SA-014-02), and under the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (BRHE).

Citation: Kopenkov VN. Efficient algorithms for calculating a local discrete wavelet transform based on Haar wavelet basis [In Russian]. Computer Optics 2008; 32(1): 78-84.

References

- [1] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Lecture Notes nr. 61, SIAM 1992; 377 pp.
- [2] Mallat S. A wavelet tour of signal processing. Academic Press 1999; 637 pp.
- [3] Holschneider M, Kronland-Martinet R, Morlet J, Tchamitchian Ph. A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform. Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space. Berlin: Springer-Verlag 1989; A: 289-297.
- [4] Chernov AV, Myasnikov VV, Sergeyev VV. Fast Method for Local Image Processing and Analysis. Pattern Recognition and Image Analysis 1999; 9(4): 572-577.
- [5] Myasnikov VV. Methods for Designing Recursive FIR Filters. Proceedings of International Conference "Computer Vision and Graphics" (ICCVG 2004). Warsaw, Poland, September 22-24; Springer 2004; 845-850.
- [6] Kopenkov VN, Myasnikov VV. Fast algorithms for local discrete wavelet transform with Haar basis [In Russian]. Samara International Scientific and Technical Conference, PIT 2006; 2: 113-118.