

## НЕПАРАКСИАЛЬНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЫ

В.В.Котляр<sup>1,2</sup>, А.А.Ковалёв<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

## Аннотация

Получено явное аналитическое выражение, описывающее точное решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах в виде произведения двух функций Куммера. Это решение представлено в виде суммы двух слагаемых, которые описывают непараксиальные гипергеометрические световые пучки, распространяющиеся вдоль оптической оси в прямом и обратном направлениях. При удалении от начальной плоскости на расстояние много большее длины волны полученное выражение для непараксиального гипергеометрического пучка совпадает с выражением для параксиальной гипергеометрической моды.

**Ключевые слова:** уравнение Шредингера, уравнение Гельмгольца, непараксиальная теория дифракции, угловой спектр плоских волн, конфлюэнтная функция (функция Куммера), гипергеометрический пучок, гипергеометрическая мода.

## Введение

В последнее время возрос интерес к точным решениям параксиального уравнения типа Шредингера в цилиндрической системе координат. Так в [1] рассмотрены гипергеометрические (ГГ) моды. Эти пучки вскоре были обобщены и появились гипергеометрические-гауссовы (ГГГ) моды [2], ГГ пучки [3] и круговые пучки (КП) [4]. В [4] указано, что частными случаями круговых пучков являются многие известные световые пучки, например, стандартные [5] и элегантные [6] моды Лагерра-Гаусса, квадратичные Бессель-Гауссовы пучки [7], гауссовы оптические вихри [8,9].

Однако уравнение типа Шредингера описывает распространение света в параксиальном приближении, от которого в некоторых случаях приходится отказываться, как, например, в задачах, требующих острой фокусировки лазерного излучения (острая фокусировка может использоваться, например, для уплотнения информации при лазерной записи, в хирургии, для лазерного напыления паров кремния, для сварки в труднодоступных местах).

В данной работе рассматриваются ГГ моды в непараксиальном случае. Получено аналитическое выражение, являющееся точным решением уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Это решение пропорционально произведению двух функций Куммера. Далее это решение представлено в виде суммы двух слагаемых, описывающих прямую непараксиальную гипергеометрическую (нГГ<sup>+</sup>) моду и обратную непараксиальную гипергеометрическую (нГГ<sup>-</sup>) моду. Эти световые пучки распространяются вдоль оптической оси в прямом и обратном направлениях. Показано, что при больших расстояниях от начальной плоскости (много больших длины волны) нГГ<sup>+</sup> мода совпадает с точностью до константы с параксиальной ГГ модой из [1,3].

### 1. Угловой спектр плоских волн для непараксиальных гипергеометрических мод

Известно, что любое решение уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)E(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число, можно представить в виде углового спектра плоских волн

$$E(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \exp[-ik(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)] \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2)$$

где  $(\theta, \varphi)$  – углы Эйлера, определяющие точку на сфере, задающую направление распространения плоской волны. Рассмотрим конкретный вид углового спектра

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^{\beta} \sin^{-1}(\theta) \exp(2in\varphi), \quad (3)$$

где  $n$  – целое и  $\beta$  – действительное числа. Подставив (3) в (2), получим:

$$E(r, \phi, z) = (-1)^n \exp(i2n\phi) \times \int_0^{\pi} \exp(-ikz \cos \theta) \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^{\beta} J_{2n}(kr \sin \theta) d\theta, \quad (4)$$

где  $J_{\nu}(x)$  – функция Бесселя. С помощью справочного интеграла [10] вместо (4) можно получить явное аналитическое выражение:

$$E(r, \phi, z) = \frac{(-1)^n}{[(2n)!]^2} \exp(i2n\phi + ikz) \times \Gamma\left(\frac{2n+\beta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right) (kr)^{2n} \times {}_1F_1\left(\frac{2n-\beta+1}{2}, 2n+1, x_+\right) \times {}_1F_1\left(\frac{2n-\beta+1}{2}, 2n+1, x_-\right), \quad (5)$$

где  $x_{\pm} = -ik \left[ z \pm (z^2 + r^2)^{1/2} \right]$ ,  $(r, \phi, z)$  – цилиндрические координаты,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  ${}_1F_1(a, b, x)$  – функция Куммера [10]. Выражение (5) является точ-

ным решением уравнения (1) и описывает сумму двух непараксиальных гипергеометрических пучков:

$$E(r, \varphi, z) = E^+(r, \varphi, z; \beta) + E^-(r, \varphi, z; \beta), \quad (6)$$

где  $E^+$  - прямая нГГ<sup>+</sup> мода, которая описывается выражением (4), в котором интеграл по  $\theta$  вычисляется от 0 до  $\pi/2$ , а  $E^-$  - обратная нГГ<sup>-</sup> мода, которая описывается выражением (4), в котором интеграл по  $\theta$  вычисляется от  $\pi/2$  до  $\pi$ . Можно показать, что  $E^-(r, \varphi, z; \beta) = E^+(r, \varphi, -z; -\beta)$ . Отсюда, в частности, следует, что при  $z = \beta = 0$  прямая и обратная нГГ моды совпадают и равны выражению:

$$E^-(r, \varphi, 0; 0) = E^+(r, \varphi, 0; 0) = 0,5E(r, \varphi, z) = (-1)^n (\pi/2) \exp(i2n\varphi) J_n^2(kr/2). \quad (7)$$

Из этого выражения следует, что основная нГГ мода при  $z = \beta = n = 0$  порождается квадратом функции Бесселя нулевого порядка и имеет диаметр центрального светового пятна  $1,53\lambda$ , где  $\lambda$  - длина волны (под диаметром понимается удвоенное расстояние от максимума до первого корня функции Бесселя).

**2. Прямые и обратные непараксиальные гипергеометрические моды**

В общем случае, когда  $z \neq 0$  или  $\beta \neq 0$ , из (5) нужно выделить в явном виде составляющие, описывающие прямые и обратные моды.

Для конфлюэнтных функций известно асимптотическое разложение [11]:

$$E(r, \varphi, z) = (-1)^n \exp(i2n\varphi) \Gamma\left(\frac{2n+\beta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right) [(2n)!]^{-1} (kr)^{2n} {}_1F_1\left(\frac{2n-\beta+1}{2}, 2n+1, x_-\right) \times \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2n+\beta+1}{2}\right)} \exp(ikz) \left[ +ikz + ik(z^2+r^2)^{1/2} \right]^{\frac{2n-\beta+1}{2}} {}_2F_0\left(\frac{2n-\beta+1}{2}, \frac{-2n-\beta+1}{2}, -\frac{1}{x_+}\right) + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right)} \exp[-ik(z^2+r^2)^{1/2}] \left[ -ikz - ik(z^2+r^2)^{1/2} \right]^{\frac{-2n-\beta-1}{2}} {}_2F_0\left(\frac{2n+\beta+1}{2}, \frac{-2n+\beta+1}{2}, \frac{1}{x_+}\right) \right\}, \quad (10)$$

где  ${}_2F_0(a, b, x)$  - гипергеометрическая функция [10]. Применив преобразование Куммера

$${}_1F_1(a, b, z) = \exp(z) {}_1F_1(b-a, b, -z), \quad (11)$$

получим:

$$E(r, \varphi, z) = (-1)^n \exp(i2n\varphi) \Gamma\left(\frac{2n+\beta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right) [(2n)!]^{-1} (kr)^{2n} \times \left\{ \frac{\exp(+ikz)}{\Gamma\left(\frac{2n+\beta+1}{2}\right)} \left[ ikz + ik(z^2+r^2)^{1/2} \right]^{\frac{-2n+\beta-1}{2}} {}_2F_0\left(\frac{2n-\beta+1}{2}, \frac{-2n-\beta+1}{2}, -\frac{1}{x_+}\right) {}_1F_1\left(\frac{2n-\beta+1}{2}, 2n+1, x_-\right) + \frac{\exp(-ikz)}{\Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right)} \left[ -ikz - ik(z^2+r^2)^{1/2} \right]^{\frac{-2n-\beta-1}{2}} {}_2F_0\left(\frac{2n+\beta+1}{2}, \frac{-2n+\beta+1}{2}, \frac{1}{x_+}\right) {}_1F_1\left(\frac{2n+\beta+1}{2}, 2n+1, -x_-\right) \right\}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & {}_1F_1(a, b, z) = \frac{\exp(\pm i\pi a) z^{-a}}{\Gamma(b) \Gamma(b-a)} \times \\ & \times \left[ \sum_{n=0}^{R-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-z)^{-n} + O(|z|^{-R}) \right] + \\ & + \frac{\exp(z) z^{a-b}}{\Gamma(a)} \times \\ & \times \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} z^{-n} + O(|z|^{-S}) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где верхний знак берется для случая  $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$  и нижний - для  $-3\pi/2 < \arg z \leq -\pi/2$ . Устремляя  $R$  к бесконечности, получим, что

$$\begin{aligned} & {}_1F_1(a, b, z) = \frac{\exp(\pm i\pi a) z^{-a}}{\Gamma(b) \Gamma(b-a)} {}_2F_0 \times \\ & \times \left( a, 1+a-b, -\frac{1}{z} \right) + \\ & + \frac{\exp(z) z^{a-b}}{\Gamma(a)} {}_2F_0 \left( b-a, 1-a, \frac{1}{z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим (9) в (5) вместо конфлюэнтной функции с аргументом  $x_+$ :

Обозначив  $q_{\pm} = \pm ik \left[ z + (z^2 + r^2)^{1/2} \right]$ , запишем выражение для комплексных амплитуд нГГ<sup>±</sup> мод:

$$E^{\pm}(r, \phi, z) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \exp(i2n\phi \pm ikz) (kr)^{2n} \times \Gamma\left(\frac{2n+\beta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right) \times \Gamma^{-1}\left(\frac{2n \pm \beta + 1}{2}\right) q_{\pm}^{-(2n \mp \beta + 1)/2} \times {}_2F_0\left(\frac{2n \mp \beta + 1}{2}, \frac{-2n \mp \beta + 1}{2}, q_{\pm}^{-1}\right) \times {}_1F_1\left(\frac{2n \mp \beta + 1}{2}, 2n + 1, \pm x_{\pm}\right). \quad (13)$$

Выражение для  $E(r, \phi, z)$  из (12) является суммой  $E^+(r, \phi, z)$  и  $E^-(r, \phi, z)$  из (13).

Если в выражении (13) для прямой волны  $E^+(r, \phi, z)$  устремить  $z$  к бесконечности, то получим асимптотическое выражение:

$$E^+(r, \phi, z \gg \lambda) \approx \left[ (2n)! \right]^{-1} \times \exp(i2n\phi + ikz + it) \Gamma\left(\frac{2n-\beta+1}{2}\right) \times (2ikz)^{(\beta-1)/2} t^n {}_1F_1\left(\frac{2n+\beta+1}{2}, 2n+1, -t\right), \quad (14)$$

где  $t = ikr^2/(2z)$ . Выражение (14) с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением для комплексной амплитуды параксиальной ГГ моды [1,3] при условии, что  $m = -1$ ,  $i\gamma = \beta$ ,  $w = k^{-1}$  и  $n$  заменить на  $2n$ .

### 3. Моделирование

При распространении вблизи начальной плоскости  $z=0$  распределение интенсивности для нГГ<sup>+</sup> пучка изменяется в основном в области боковых лепестков (периферийных световых колец картины дифракции) (рис. 1а,б). При  $z \gg \lambda$ , когда нГГ<sup>+</sup> пучок совпадает с ГГ модой, изменения интенсивности происходят только масштабно, а вид дифракционной картины пучка сохраняется (рис. 1в).

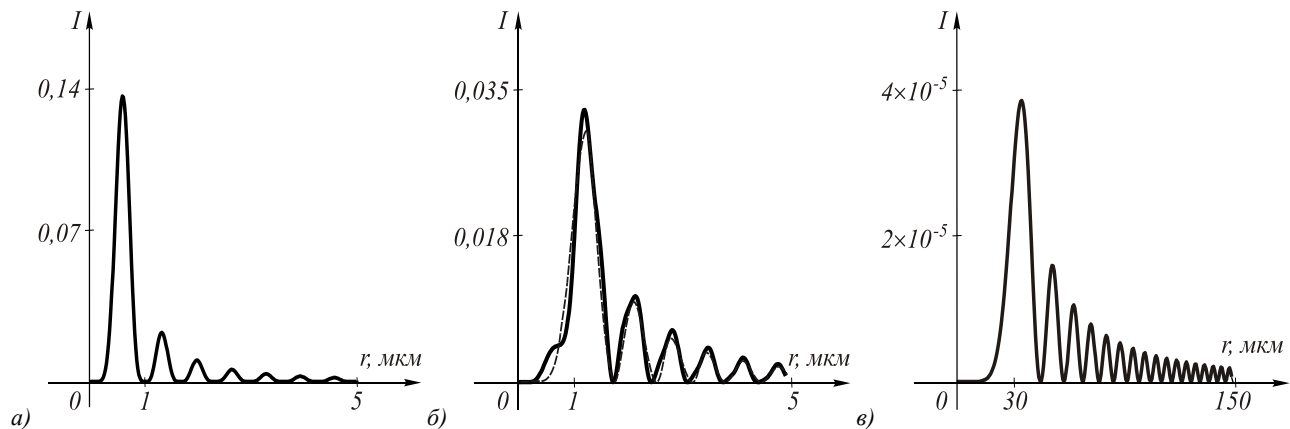


Рис. 1. Распределения интенсивности нГГ<sup>+</sup> моды при  $\lambda = 633$  нм,  $\beta = 0$ ,  $n = 2$  на расстояниях  $z$ : 0 (а), 1 мкм (б), 1 мм (в)

На рис. 1 показана интенсивность

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$$

в относительных единицах при  $\lambda=633$  нм,  $\beta=0$ ,  $n=1$  при разных расстояниях от  $z=0$ , рассчитанная с помощью уравнения (4) при интегрировании от 0 до  $\pi/2$ . На рис. 1б пунктирная линия – результат расчета по формуле (13).

Для проверки расчетов (рис. 1б) было проведено численное моделирование с использованием программы FullWave 6.0 (производитель RSoft Design, USA, <http://www.rsoftdesign.com>), предназначенной для решения уравнений Максвелла методом FDTD (finite-difference time-domain). В плоскости  $z=0$  было задано электромагнитное линейно поляризованное вдоль оси  $x$  поле (7) при  $n=1$ ,  $\lambda=633$  нм, с дискретизацией  $\lambda/20$ . На рис. 2а показана картина дифракции

такого поля в плоскости  $z = 1$  мкм. Размер картины 5x5 мкм. На рис. 2б показано сечение картины дифракции. Из сравнения рисунков 1б и 2б видно, что они хорошо согласуются между собой, хотя на рис. 1б показана величина  $|E_x|^2$ , а на рис. 2б

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2.$$

### Заключение

Итак, в работе получены точные аналитические выражения для непараксиальных гипергеометрических мод, распространяющихся в прямом и обратном направлениях вдоль оптической оси. При больших расстояниях от начальной плоскости прямая непараксиальная гипергеометрическая мода совпадает с точностью до постоянной с параксиальной модой из [1,3].

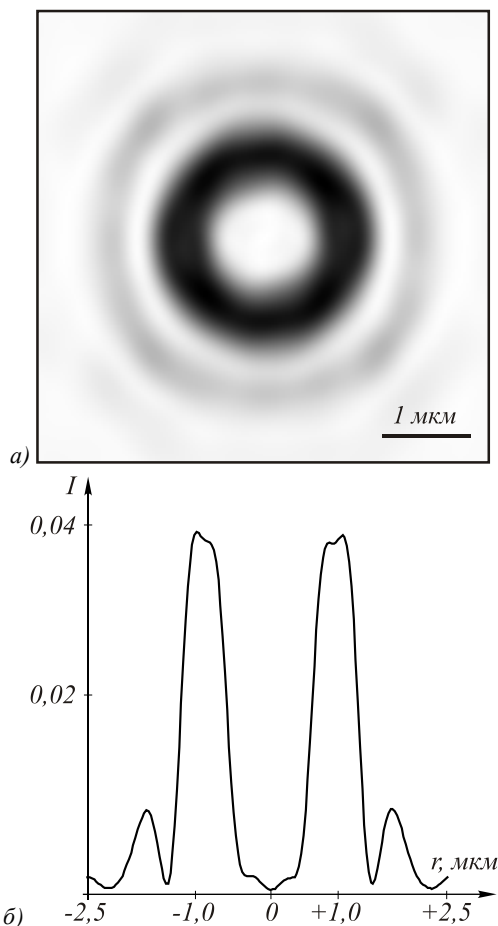


Рис. 2. Картина дифракции  $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$  (а) и ее горизонтальное сечение (плоскостью  $y=0$ ) (б) для непараксиального гипергеометрического пучка с начальной ( $z=0$ ) комплексной амплитудой (7) на расстоянии  $z=1$  мкм

### Благодарности

Работа поддержана российско-американской программой «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-SA-06), Российским фондом фундаментальных исследований (грант 08-07-99007) и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9).

### Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar [and other] // Opt. Lett. 2007. – Vol. 32. – p.742-744.
2. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi [and other] // Opt. Lett. 2007. – Vol. 32. – p.3053-3055.
3. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A 2008. – Vol. 25. – p.262-270.
4. **Bandres, M.A.** Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega // Opt. Lett. 2008. – Vol. 33. – p.177-179.
5. **Siegman, A.E.** Lasers / A.E. Siegman – University Science, 1986.
6. **Takenaka, T.** Propagation of light beams beyond the paraxial approximation / T. Takenaka, M. Yokota, O. Fukumitsu // J. Opt. Soc. Am. A 1985. – Vol. 2. – p.826-829.
7. **Caron, C.F.R.** Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence / C.F.R. Caron, R.M. Potvliege // Opt. Commun. 1999. – Vol. 164. – p.83-93.
8. **Rozas, D.** Propagation dynamics of optical vortices / D. Rozas, C.T. Law, G.A. Swartzlander // J. Opt. Soc. Am. B 1997. – Vol. 14. – p.3054-3065.
9. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar [and other] // J. Opt. Soc. Am. A 2005. – Vol. 22. – p.849-861.
10. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.:Наука, 1983.
11. Handbook of Mathematical Functions / ed. by. M. Abramovitz, I.A. Stegun. – National Bureau of Standards, Applied Math. Series, 1965.

## NONPARAXIAL HYPERGEOMETRIC MODES

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia

<sup>2</sup>S.P. Korolyov Samara State Aerospace University, Samara, Russia

### Abstract

We derive an analytical expression to describe the exact solution of Helmholtz equation in the cylindrical coordinates as a product of two Kummer's functions. The solution is presented as a sum of two terms that describe the non-paraxial hypergeometric light beams propagated along the optical axis in the positive and negative directions. With the distance from the initial plane becoming much larger than the wavelength of light, the expression derived for the non-paraxial hypergeometric beam coincides with that for a paraxial hypergeometric mode.

**Keywords:** Schrödinger equation, Helmholtz equation, nonparaxial diffraction theory, angular spectrum of plane waves, confluent function (Kummer's function), hypergeometric beam, hypergeometric mode.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Nonparaxial hypergeometric modes. *Computer Optics* 2008; 32(3): 222-5.

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian-American program "Basic Research and Higher Education" (grant CRDF RUX0-014-SA-06), the Russian Foundation for Basic Research (grant 08-07-99007) and a grant from the President of the Russian Federation for support of leading scientific schools (NS-3086.2008. 9).

### References

- [1] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. *Optics Letters* 2007; 32(7): 742-744.
- [2] Karimi E. Hypergeometric-Gaussian modes. *Opt. Lett.* 2007; 32: 3053-3055.
- [3] Kotlyar VV, Kovalev AA. Family of hypergeometric laser beams. *J. Opt. Soc. Am. A* 2008; 25(1): 262-270.
- [4] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Circular beams. *Opt. Lett.* 2008; 33: 177-179.
- [5] Siegman AE. *Lasers*. University Science, 1986.
- [6] Takenaka T, Yokota M, Fukumitsu O. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A* 1985; 2: 826-829.
- [7] Caron CFR, Potvliege RM. Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence. *Opt. Commun.* 1999; 164: 83-93.
- [8] Rozas D, Law CT, Swartzlander GA. Propagation dynamics of optical vortices. *J. Opt. Soc. Am. B* 1997; 14: 3054-3065.
- [9] Kotlyar VV. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J. Opt. Soc. Am. A* 2005; 22: 849-861.
- [10] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. *Integrals and Series. Special Functions* [In Russian]. Moscow: "Nauka" (Science) Publisher; 1983.
- [11] Abramovitz M, Stegun IA. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Applied Math. Series, 1965.