

ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ФОКУСАТОРА В ЛИНИЮ В НЕПАРАКСИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

А.Ю. Дмитриев^{1,2}, Л.Л. Досколович^{1,2}, С.И. Харитонов^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

² Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Получено общее аналитическое представление для эйконала дифракционного оптического элемента (ДОЭ) для фокусировки в линию в непараксиальном случае. Эйконал записан в специальных криволинейных координатах. Для расчета функции, определяющей распределение энергии вдоль кривой фокусировки, предложен итерационный метод. Проведен расчет эйконалов ДОЭ для фокусировки в отрезок.

Ключевые слова: фокусатор, эйконал, криволинейные координаты, итерационный метод, интенсивность, световое поле, трассировка лучей.

Введение

В работах [1-5] рассмотрен геометрикооптический расчет ДОЭ для фокусировки в произвольную линию. ДОЭ такого типа известны как фокусаторы. Однако, даже в параксиальном приближении аналитический расчет фокусаторов возможен только для случаев фокусировки в простые линии, такие как отрезок, кольцо и т.п. В общем случае произвольной кривой фокусировки расчет фазовой функции фокусатора требует решения нелинейного уравнения для каждой точки апертуры [4,5].

В работах [4,5] предложено использовать специальную криволинейную систему координат, значительно упрощающую расчет фокусатора в параксиальном приближении.

В данной работе предложен метод расчета фокусаторов с использованием новых криволинейных координат. Предложенная криволинейная система координат позволяет получить простое аналитическое выражение для фазовой функции в общем, непараксиальном случае. В качестве примера проведен расчет фокусатора в отрезок.

1. Фазовая функция фокусатора в криволинейной системе координат

Рассматривается задача расчета фокусатора, преобразующего плоский пучок с распределением интенсивности $I_0(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = (u, v)$ - декартовы координаты в плоскости фокусатора, в кривую, заданную параметрическим уравнением

$$\mathbf{X}(\xi) = (X(\xi), Y(\xi), f), \quad (1)$$

где ξ - натуральный параметр, а f - расстояние от плоскости фокусатора ($z=0$) до плоскости фокусировки ($z=f$).

При расчете фокусаторов предполагается выполненным приближение тонкого оптического элемента. Это приближение сводит расчет функции высоты микрорельефа фокусатора к расчету эйконала фокусатора $\psi(\mathbf{u})$ [4,5]. В приближении геометрической оптики эйконал $\psi(\mathbf{u})$ определяется из уравнения наклонов [4,5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\mathbf{u})}{\partial u} &= \frac{X(\xi(\mathbf{u})) - u}{\sqrt{(X(\xi(\mathbf{u})) - u)^2 + (Y(\xi(\mathbf{u})) - v)^2 + f^2}}, \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{u})}{\partial v} &= \frac{Y(\xi(\mathbf{u})) - v}{\sqrt{(X(\xi(\mathbf{u})) - u)^2 + (Y(\xi(\mathbf{u})) - v)^2 + f^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi(\mathbf{u})$ - функция лучевого соответствия. Функция $\xi(\mathbf{u}) = \xi_0$ определяет линию $\Gamma(\xi_0)$ в плоскости апертуры $z = 0$, лучи из точек которой приходят в точку кривой $\mathbf{X}(\xi_0)$. Линию $\Gamma(\xi_0)$ принято называть слоем. Согласно теории фокусаторов, лучи, приходящие в точку фокальной кривой, лежат на круговом конусе [6]. Ось конуса совпадает с касательной к кривой фокусировки. Уравнение конуса световых лучей имеет вид [4,5]:

$$\begin{aligned} ((u - X(\xi))X'(\xi) + (v - Y(\xi))Y'(\xi)) = \\ = c^2(\xi) \left((u - X(\xi))^2 + (v - Y(\xi))^2 + (z - f)^2 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $c(\xi)$ - косинус угла раствора конической поверхности. Таким образом, слой представляет собой пересечение конуса и плоскости фокусатора. Кривая (1) лежит в плоскости, параллельной плоскости фокусатора. В этом случае слой является гиперболой [2,3,6-8].

Расчет фокусаторов предлагается проводить в следующей криволинейной системе координат, связанной с лучами:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= X(\xi) + a(\xi)\sqrt{f^2 + \eta^2}X'(\xi) - \eta Y'(\xi), \\ v(\xi, \eta) &= Y(\xi) + a(\xi)\sqrt{f^2 + \eta^2}Y'(\xi) + \eta X'(\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a(\xi) = \frac{c(\xi)}{\sqrt{1 - c^2(\xi)}}$ - котангенс угла раствора конической поверхности (3), на которой лежат лучи, приходящие в точку $\mathbf{X}(\xi)$ кривой фокусировки. Координата ξ в (4) определяет слой, а координата η - положение точки на слое $\Gamma(\xi)$.

Из (2), (4) несложно получить частные производные эйконала по переменным ξ, η в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-a(\xi)}{\sqrt{1+a^2(\xi)}} \left(1 + a'(\xi) \sqrt{f^2 + \eta^2} \right), \\ \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{\sqrt{1+a^2(\xi)}}{\sqrt{f^2 + \eta^2}} \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Эйконал фокусатора может быть восстановлен из (5) методами теории потенциала в виде:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta; a(\xi)) &= -\sqrt{1+a^2(\xi)} \sqrt{f^2 + \eta^2} - \\ &- \int_0^\xi \frac{a(t)}{\sqrt{1+a^2(t)}} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Эйконал (6) зависит от функции $a(\xi)$, задающей углы раствора конусов лучей, приходящих на линию фокусировки. Функция $a(\xi)$ определяет распределения энергии вдоль кривой фокусировки.

2. Расчет распределения энергии вдоль линии фокусировки

В работах [9-12] предложено использовать усредненное интегральное представление для интенсивности (освещенности) в плоскости фокусировки, справедливое в приближении геометрической оптики. Указанное представление имеет вид:

$$I(\mathbf{x}) = \iint_D I_0(\mathbf{u}) \delta_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) d\mathbf{u}, \quad (7)$$

где D – область апертуры фокусатора, $\delta_\sigma(\mathbf{x})$ – аппроксимация δ -функции в виде гауссовой функции

$$\delta_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right). \quad (8)$$

Функция $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ в (7) определяет координаты точки прихода лучей в плоскость фокусировки

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \nabla\psi(\mathbf{u}) \frac{f}{\sqrt{1 - (\nabla\psi(\mathbf{u}))^2}}, \quad (9)$$

где $\nabla\psi(\mathbf{u})$ - градиент эйконала. Выражение (7) ориентировано на расчет интенсивности с использованием метода трассировки лучей [13]. В этом случае формула (7) дает усредненное значение интенсивности по окрестности, определяемой «эффективной» шириной функции $\delta_\sigma(\mathbf{x})$. Величина этой окрестности обычно определяется шагом дискретизации в области наблюдения.

Перейдем в (7) от декартовых координат к криволинейным координатам (4). В результате выражение для усредненной интенсивности (7) примет вид:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \iint_{D(\xi, \eta)} I_0(\xi, \eta) \times \\ &\times \delta_\sigma(x - X(\xi), y - Y(\xi)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (10)$$

где $D(\xi, \eta)$ - область апертуры в координатах (ξ, η) ,

$$J(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} -$$

- якобиан преобразования координат.

Усредненную интенсивность вдоль кривой фокусировки будем описывать функцией

$$\begin{aligned} I(X(\xi), Y(\xi)) &= \iint_{D(\xi, \eta)} I_0(\xi_1, \eta_1) J(\xi_1, \eta_1) \times \\ &\times \delta_\sigma(X(\xi) - X(\xi_1), Y(\xi) - Y(\xi_1)) d\xi_1 d\eta_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что функция $a(\xi)$ входит в якобиан и выражение для интенсивности $I_0(\xi, \eta)$. Чтобы подчеркнуть этот факт, введем обозначение

$$F(\xi, \eta; a(\xi)) = I_0(\xi, \eta) J(\xi, \eta). \quad (12)$$

Пусть $I(\xi)$ - заданное распределение энергии вдоль кривой фокусировки. В этом случае функция $a(\xi)$ в (6) определяется из уравнения

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \iint_{D(\xi, \eta)} F(\xi_1, \eta_1; a(\xi_1)) \times \\ &\times \delta_\sigma(X(\xi) - X(\xi_1), Y(\xi) - Y(\xi_1)) d\xi_1 d\eta_1 \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, задача фокусировки в линию сводится к задаче нахождения функции $a(\xi)$ из уравнения (13).

3. Итерационный метод

Решение уравнения (13) является сложной задачей. Рассмотрим градиентный метод расчета функции $a(\xi)$. Определим функцию $a(\xi)$ в выражении (6) в виде полинома

$$a(\xi) = \sum_{i=1}^n v_i \xi^i. \quad (14)$$

Введем функцию невязки

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \int (I(X(\xi), Y(\xi); \mathbf{v}) - I(\xi))^2 d\xi, \quad (15)$$

представляющую отличие расчетного и требуемого распределений интенсивности вдоль отрезка фокусировки, где \mathbf{v} – вектор коэффициентов полинома.

Для расчета вектора коэффициентов \mathbf{v} будем использовать градиентный метод минимизации функции (15). Градиентный метод состоит в итерационной коррекции вектора коэффициентов \mathbf{v} по правилу:

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1} - h \nabla \varepsilon(\mathbf{v}_{n-1}), \quad (16)$$

где \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_{n-1} – векторы коэффициентов на n -ом и $n-1$ -ом шагах, $\nabla \varepsilon(\mathbf{v})$ – градиент функции невязки, а h – шаг метода. Компоненты вектора градиента могут быть получены из (11), (15) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{v})}{\partial v_i} &= 2 \int \frac{\partial I(X(\xi), Y(\xi); \mathbf{v})}{\partial v_i} \times \\ &\times (I(X(\xi), Y(\xi); \mathbf{v}) - I(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial I(X(\xi), Y(\xi); \mathbf{v})}{\partial v_i} = \iint_D \frac{\partial F(\xi_1, \eta_1; a(\xi_1; v))}{\partial v_i} \times \\ \times \delta_\sigma (X(\xi) - X(\xi_1), Y(\xi) - Y(\xi_1)) d\xi_1 d\eta_1.$$

Мы не приводим конечные формулы для компонент вектора градиента из-за их громоздкости.

В работе для минимизации функции невязки (15) и реализации градиентного метода (16) была использована функция `fminunc` из пакета оптимизации Optimization Toolbox программного комплекса MATLAB.

4. Фокусировка в отрезок

Рассмотрим задачу фокусировки в отрезок

$$\mathbf{X}(\xi) = \xi - \frac{d}{2}, \quad \xi \in [0, d] \quad (17)$$

с постоянным распределением интенсивности. Апертуру фокусатора будем считать квадратной со стороной $2L$, а интенсивность падающего пучка - постоянной, $I_0(\mathbf{u}) = I_0$. Для отрезка (17) криволинейные координаты (4) имеют вид:

$$u = \xi - \frac{d}{2} + a(\xi) \sqrt{f^2 + \eta^2}, \quad (18) \\ v = \eta.$$

Для расчета функции $a(\xi)$ использовался итерационный метод. В качестве начального приближения для $a(\xi)$ использовалась функция

$$a_0(\xi) = \left(\xi \left(\frac{2L}{d} - 1 \right) + \frac{d}{2} - L \right) / f, \quad (19)$$

рассчитанная для случая паракиального приближения. Функция (19) была получена подстановкой первого уравнения из (18) в закон сохранения светового потока в паракиальной форме

$$\int_0^\xi I d\xi' = \int_{-L}^{u(\xi)} \int_{-L}^L I_0 du' dv'. \quad (20)$$

Расчет проводился при следующих параметрах: $\lambda = 1$ мкм, $d = 60\lambda$, $L = 50\lambda$, $f = 50\lambda$. Функция $a(\xi)$ была представлена в виде полинома 7-ой степени

$$a(\xi) = \sum_{i=1}^4 v_i \left(\xi - \frac{d}{2} \right)^{2i-1}. \quad (21)$$

В силу симметрии в (21) использованы только нечетные степени. Полученные в результате оптимизации коэффициенты полинома имеют вид $v_1 = 0,11217$, $v_2 = 0,04954$, $v_3 = 0,09688$, $v_4 = 0,14141$.

Фазовая функция в декартовых координатах $\varphi(\mathbf{u}) = k\psi(\mathbf{u})$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ - длина волны освещающего пучка, рассчитанная при полученной функции $a(\xi)$, приведена на рис. 1. На рис. 2 представлено результирующее распределение энергии вдоль отрезка фокусировки. Расчет производился

при $\sigma = 0,1\lambda$ в (8). В силу малости указанного значения σ приведенное распределение интенсивности пропорционально интенсивности на отрезке. Для сравнения на рис. 2 пунктирной линией показано распределение интенсивности, формируемое для случая паракиальной функции (19). Распределение интенсивности для рассчитанной функции (21) является значительно более равномерным. Процесс оптимизации $a(\xi)$ позволил скомпенсировать спад интенсивности на концах отрезка.

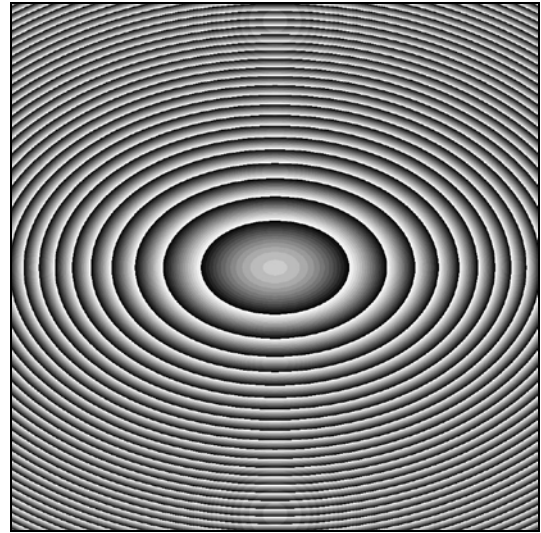


Рис. 1. Фазовая функция фокусатора в отрезок

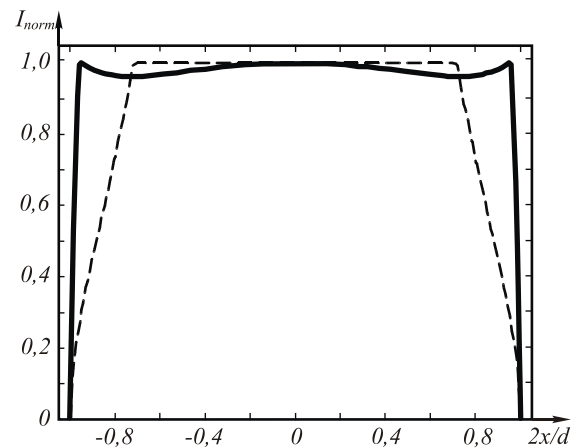


Рис. 2. Нормированное распределение интенсивности вдоль отрезка фокусировки в случае квадратной апертуры фокусатора

Для проверки правильности итерационной процедуры и оценки полученного решения распределение интенсивности рассчитывалось в рамках скалярной теории дифракции с использованием интеграла Кирхгофа:

$$I(x, y, f) = \left| \frac{-ik}{2\pi} \iint_D \sqrt{I_0} \exp(ik\psi(\mathbf{u})) \times \right. \\ \left. \times \frac{\exp(ik\tilde{R})}{\tilde{R}^2} \frac{f}{\tilde{R}} d\mathbf{u} \right|^2, \quad (22)$$

где $\tilde{R} = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + f^2}$.

На рис. 3, 4 представлены результаты расчета интенсивности вдоль отрезка в приближении Кирхгофа для непараксиального и параксиального эйконала фокусатора в отрезок для случая квадратной апертуры.

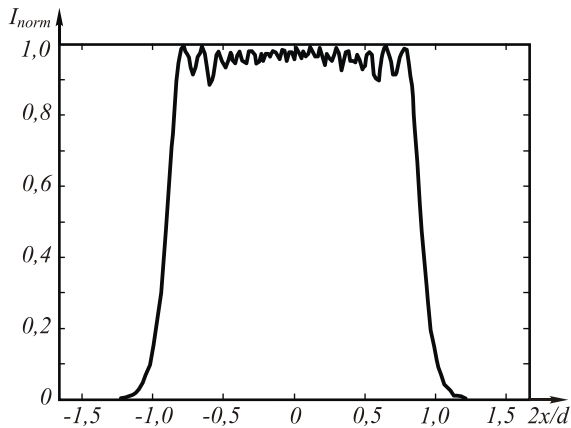


Рис. 3. Нормированное распределение интенсивности вдоль отрезка фокусировки в случае квадратной апертуры при непараксиальном эйконале

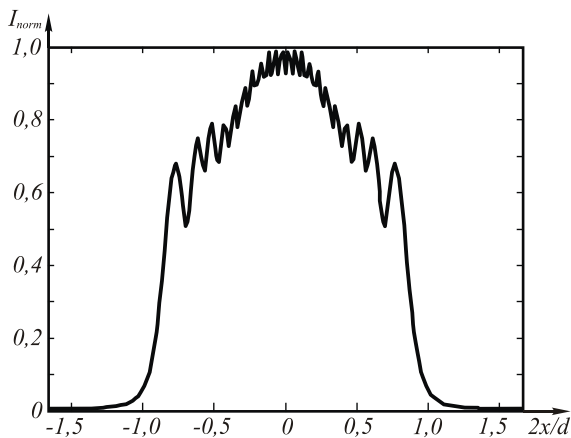


Рис. 4. Нормированное распределение интенсивности вдоль отрезка фокусировки в случае квадратной апертуры при параксиальном эйконале

Сравнение рис. 3, 4 показывает, что и в приближении Кирхгофа непараксиальный эйконал обеспечивает значительно более равномерное распределение энергии вдоль отрезка фокусировки.

В качестве второго примера был произведен расчет эйконала фокусатора в отрезок (17) при круглой апертуре радиуса R . Начальное приближение для $a(\xi)$ также рассчитывалось в параксиальном приближении. Для круглой апертуры «параксиальная» функция $a(\xi)$ определяется из уравнения

$$\frac{da(\xi)}{d\xi} = \frac{\pi R^2}{f} \left(2d\sqrt{R^2 - \left(\xi - \frac{d}{2} + a(\xi)f\right)^2} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Уравнение (20) получено подстановкой первого уравнения из (17) в закон сохранения светового потока в параксиальной форме

$$\int_0^\xi Id\xi' = \int_{-R}^{u(\xi)} \int_{-\sqrt{R^2-u'^2}}^{\sqrt{R^2-u'^2}} I_0 du' dv'. \quad (24)$$

Расчет проводился при следующих параметрах: $\lambda=1$ мкм, $d=60\lambda$, $R=50\lambda$, $f=50\lambda$. Функция $a(\xi)$ была также представлена в виде полинома (21). Рассчитанные коэффициенты полинома имеют вид $v_1 = 0,17850$, $v_2 = -0,03880$, $v_3 = 0,64090$, $v_4 = -1,07513$. Расчетное распределение интенсивности вдоль отрезка фокусировки для случая круглой апертуры представлено на рис. 5 и близко к равномерному. Среднеквадратичное отклонение полученного распределения от равномерного составляет 4,3%.

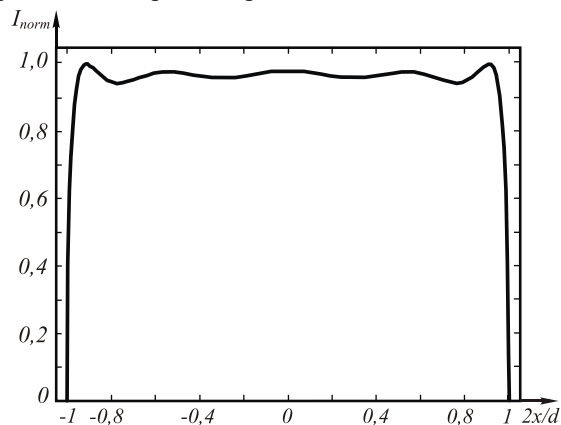


Рис. 5. Нормированное распределение интенсивности вдоль отрезка фокусировки в случае круговой апертуры фокусатора

Заключение

Предложено проводить расчет фокусатора с использованием специальных криволинейных координат. Криволинейные координаты позволили получить аналитическое представление для эйконала фокусатора в произвольную кривую в общем, непараксиальном случае. Для расчета функции, определяющей распределение интенсивности вдоль кривой фокусировки, предложен итерационный метод. Проведен расчет эйконалов фокусаторов в отрезок для случая квадратной и круглой апертур. Показано, что непараксиальный эйконал обеспечивает значительно более равномерное распределение интенсивности вдоль отрезка фокусировки по сравнению с параксиальным решением.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (RUXO-014-SA-06), грантов РФФИ № 07-07-97601-р_офи, 07-01-96602-р_поволжье_а, 07-07-91580-АСП_а, 08-07-99005-р_офи и Фонда содействия отечественной науке.

Литература

1. Оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в произвольную фокальную линию / [В.А. Данилов и др.] // препринт, №69 – М.: ФИАН, 1983, С 41.

2. Обратные задачи когерентной оптики, фокусировка в линию // Гончарский А.В., Степанов В.В. // Журнал вычислительной математики и математической физики. -1986. -Т. 26. -№1. -С. 80-91.
3. Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую / [А.В. Гончарский и др.] // Доклады АН СССР 1983. -Т. 273. -№3. -С. 605-608.
4. Методы компьютерной оптики / под ред. В.А. Соифера - М.: Физматлит, 2000. Глава 5.
5. Дифракционная компьютерная оптика / под ред. В.А. Соифера - М.: Физматлит, 2007. Глава 3.
6. **Гончарский А.В.** Введение в компьютерную оптику / А.В. Гончарский, В.В. Попов, В.В. Степанов – М.: Изд-во МГУ, 1991.
7. О существовании гладких решений для задач фокусировки электромагнитного излучения / Гончарский А.В., Степанов В.В. // Доклады АН СССР. 1984. -Т. 279. -№4. -С. 788-792.
8. Теория когерентных фокусаторов / Данилов В.А., Кинбер Б.Е. // Компьютерная оптика. -1987. -№1. -С. 40-50.
9. Градиентный метод расчет эйконала для фокусировки в заданную область / Белоусов А.А., Досколович Л.Л., Харитонов С.И. // Автометрия, -2007, -Т. 43 -№1. -С. 98-106.
10. Градиентный метод решения задачи двумерную область при протяженном источнике / Белоусов А.А., Досколович Л.Л. // Компьютерная оптика, -2007, -Т. 31. -№3. -С. 20-26.
11. Градиентный метод расчета оптических элементов для формирования заданной освещенности на криволинейной поверхности / Белоусов А.А., Досколович Л.Л., Харитонов С.И. // Оптический журнал, 2008. Т. 75, №3, С. 30-35.
12. Градиентный метод расчета преломляющих поверхностей для формирования заданных распределений освещенности / Белоусов А.А., Досколович Л.Л., Харитонов С.И. // Автометрия, -2008. -Т. 44. -№2. -С. 91-100.
13. **Young C.** Ray Tracing Creations, 2d Ed./ Young C., Wells D. // London. Waite Group Press, 1994.

GEOMETRIC-OPTICS DESIGN OF FOCUSATORS INTO A LINE IN NOPARAXIAL CASE

A.Yu. Dmitriev^{1,2}, L.L. Doskolovich^{1,2}, S.I. Kharitonov^{1,2}

¹ *Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,*

² *S.P. Korolev Samara State Aerospace University, Samara, Russia*

Abstract

The common analytical expression for the phase function of the diffractive optical element (DOE) to focus into a line in neparaxial case is received. The phase function is given in the special curvilinear coordinates. To calculate the function, that defines the energy distribution along the line, the iteration method is proposed. The calculation of the phase functions of the DOE to focus into the line-segment is produced.

Key words: focuser, phase function, curvilinear coordinates, iteration method, intensity, light field, ray tracing.

Citation: Dmitriev AYu, DoskolovichLL, Kharitonov SI. Geometric-optics design of focusators into a line in neparaxial case. Computer Optics 2008; 32(4): 343-7.

Acknowledgements: This work was supported by the program "Basic Research and Higher image-tion» (RUXO-014-SA-06), RFBR grants № 07-07-97601-r_ofi, 07-01-96602-r_povolzhe_a, 07-07-91580-ASTP_A, 08-07-99005-r_ofi Fund sodey-tion of domestic science.

References

- [1] Danilov VA, et al. Optical elements focusing coherent radiation into arbitrary focal curve [In Russian]. Preprint FIAN N 69. Moscow: Lebedev Physical Institute of the U.S.S.R. Academy of Sciences 1983; 41.
- [2] Goncharsky AV, Stepanov VV. Inverse problems of coherent optics, focusing in a line [In Russian]. Computational Mathematics and Mathematical Physics 1986; 26(1): 50-57.
- [3] Goncharsky AV, Danilov VA, Popov VV, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA, Stepanov VV. Solution of the inverse problem of focusing of laser radiation into an arbitrary curve [In Russian]. Doklady AN SSSR 1983; 273(3): 605-608.
- [4] Soifer VA, ed. Methods of Computer Optics [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher 2000; 5.
- [5] Soifer VA, ed. Diffractive Computer Optics [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher 2007; 3.
- [6] Goncharsky AV, Popov VV, Stepanov VV. Introduction to computer optics [In Russian]. Moscow: Lomonosov Moscow State University Publisher; 1991.
- [7] Goncharsky AV, Stepanov VV. The existence of smooth solutions in problems of electromagnetic focusing [In Russian]. Doklady AN SSSR 1984; 279(4): 788-792.
- [8] Danilov VA, Kinber BE, Shishlov AV. Theory of coherent focusers. Computer Optics 1989; 1(1): 29-37.
- [9] Belousov AA, Doskolovich LL, Kharitonov SI. Gradient method for calculating the eikonal for focusing to a given region. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing 2007; 43(1): 76-82.
- [10] Belousov AA, Doskolovich LL. A gradient method for solving light focusing problem from extended source in two-dimensional region [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(3): 20-26.
- [11] Belousov AA, Doskolovich LL, Kharitonov SI. A gradient method of designing optical elements for forming a specified irradiance on curved surface. Journal of Optical Technology 2008; 75(3): 161-165.
- [12] Belousov AA, Doskolovich LL, Kharitonov SI. Gradient design of refractive surfaces for forming required light distributions. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing 2008; 44(2):161-168.
- [13] Young C, Wells D. Ray Tracing Creations, 2d Ed. London. Waite Group Press 1994.