

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГРУППОВОГО ТОЧЕЧНОГО ОБЪЕКТА ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ НУМЕРАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ОТМЕТОК

Хафизов Д.Г.

Марийский государственный технический университет

Аннотация

Рассмотрены вопросы оценки параметров вращения изображений пространственных групповых точечных объектов на основе применения метода главных компонент. Применение данного метода позволяет получить оценку параметров вращения пространственного группового точечного объекта при отсутствии информации о нумерации точек в объекте, что существенно упрощает решение задач обработки пространственных групповых точечных объектов.

Ключевые слова: пространственный групповой точечный объект, гиперкомплексное число, кватернионы, кватернионные сигналы, вращающий кватернион, параметры вращения, матрица вращений.

Введение

Задачи обработки 2D и 3D изображений в виде скоплений точечных объектов характерны для целого ряда радиотехнических систем. При этом надежность результатов обработки таких изображений зависит от выбранной модели представления точечного объекта. Как было показано в работах [1-4], наиболее адекватной моделью представления с позиции применяемого математического аппарата и наибольшей информативности меры схожести является представление в виде кватернионных сигналов (КТС).

Применение теории кватернионных сигналов для задач обработки пространственных групповых точечных объектов (ПГТО) подробно рассмотрено в работах [2,4]. В этих работах было показано, что величина скалярного произведения кватернионных сигналов, как мера схожести и базовая операция, применяемая при их обработке, является инвариантной к параметрам вращения (пространственному положению) сигнального КТС по отношению к эталонному сигналу. В качестве подходов к решению данной проблемы применялись различные методы совмещения изображений пространственных групповых точечных объектов, что, по сути, сводится к оценке параметров вращений ПГТО. Решение задачи оценки параметров вращения необходимо для возможности дальнейшей обработки пространственных групповых точечных объектов.

Задачам оценки параметров вращения или совмещения ПГТО посвящён ряд работ, и здесь можно выделить следующие методы: метод совмещения с последующим усреднением [1]; метод оценки параметров вращения на основе амплитудно-фазовых моделей (АФМ) [5]; метод оценки параметров вращения на основе сферических гармоник [2,6]; метод оценки параметров вращения по результатам фильтрации [8] и двухэтапный метод оценки параметров вращения [7].

Предлагаемое в данной работе решение задачи оценки параметров вращения основано на известном методе, используемом в многомерном статистическом анализе данных – методе главных компонент [9,10].

1. Постановка задачи

Пусть имеется пространственный групповой точечный объект, заданный в виде множества точек, расположенных в трёхмерном пространстве:

$$\Xi = \{\xi(n)\}_{0,s-1}, \quad (1)$$

где $\xi(n) = (\xi_1(n), \xi_2(n), \xi_3(n))$ – пространственные координаты n -й точки; а также ПГТО $\Omega = \{\omega(m)\}_{0,s-1}$, где $\omega(m) = (\omega_1(m), \omega_2(m), \omega_3(m))$, который отличается от исходного тем, что повернут относительно некоторой неизвестной оси (вектора) \mathbf{c} на неизвестный угол 2ϕ . Также следует отметить, что порядок нумерации точек ПГТО Ω не совпадает с порядком нумерации в ПГТО Ξ .

Требуется оценить параметры вращения ПГТО Ω относительно Ξ .

2. Кватернионы и кватернионные сигналы

Комплексные числа, кватернионы и октавы, наряду с вещественными числами, являются системами, для которых определены четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Кватернионы и октавы называются гиперкомплексными числами. Перечисленные системы чисел представляют интерес с точки зрения выполнения над сигналами различного вида операций, так как никакие другие числовые системы такими свойствами по отношению к четырём арифметическим действиям не обладают.

Кватернион (четверное число) так же, как и комплексное число, представляет собой сумму вещественного и мнимого чисел. В отличие от комплексных чисел в кватернионах применяют не один, а три вида мнимых чисел: i , j и k . На рис. 1 приведена диаграмма, задающая правила перемножения мнимых единиц [11]. Если сомножители берутся по направлению часовой стрелки, то третье по счёту число равно произведению первых двух. Когда же сомножители берутся в обратном порядке, то произведение равно третьему по счёту числу, но взятому с обратным знаком.

Полный кватернион записывается следующим образом:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad (2)$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 – коэффициенты, являющиеся произвольными вещественными числами. Коэффициент

$q_0 = \text{Re } \mathbf{q}$ называется вещественной частью полного кватерниона \mathbf{q} , а $q_1 i + q_2 j + q_3 k$ – векторным кватернионом, или гиперкомплексной частью полного кватерниона \mathbf{q} : $q_1 i + q_2 j + q_3 k = \text{hyps } \mathbf{q}$. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \text{Re } \mathbf{q} + \text{hyps } \mathbf{q}. \quad (3)$$

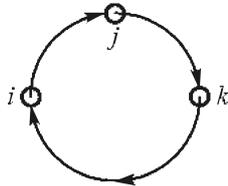


Рис. 1. Диаграмма для определения результатов перемножения двух мнимых единиц

Сложение (вычитание) двух кватернионов выполняется по такому же правилу, как сложение (вычитание) комплексных чисел. При нахождении произведения кватернионов \mathbf{q} и \mathbf{p} необходимо учитывать правила перемножения мнимых единиц. Как следует из диаграммы на рис. 1, знак произведения мнимых единиц i, j и k зависит от порядка следования сомножителей, т.е. умножение кватернионов является, в отличие от умножения вещественных и комплексных чисел, некоммутативной операцией.

Кватернионы тесно связаны с векторами, заданными в трёхмерном пространстве. Каждый полный кватернион \mathbf{q} есть сумма некоторого действительного числа q_0 и 3D вектора $q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Произведение $\mathbf{q}\mathbf{p}$ двух векторных кватернионов даёт две важные характеристики векторов с координатами (q_1, q_2, q_3) и (p_1, p_2, p_3) :

$$\text{Re } \mathbf{q}\mathbf{p} = -(q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3), \quad (4)$$

$$\text{hyps } \mathbf{q}\mathbf{p} = (q_2 p_3 - q_3 p_2) i + (q_3 p_1 - q_1 p_3) j + (q_1 p_2 - q_2 p_1) k. \quad (5)$$

Первое из этих выражений есть скалярное произведение (взятое с обратным знаком) векторов (q_1, q_2, q_3) и (p_1, p_2, p_3) в евклидовом пространстве, а второе выражение – запись векторного произведения этих же векторов. Таким образом:

$$\mathbf{q}\mathbf{p} = -(\mathbf{q}, \mathbf{p})_E + [\mathbf{q}, \mathbf{p}]. \quad (6)$$

Основной базовой операцией при линейной обработке векторных сигналов является скалярное произведение, служащее мерой их схожести. К образованию такого произведения обрабатываемого и эталонного сигналов сводятся такие распространённые операции, как разложение и фильтрация сигналов, а также получение их АКФ и ВКФ.

Скалярное произведение кватернионов определяется из соотношения:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})^* = \mathbf{q}\mathbf{p}^*, \quad (7)$$

где \mathbf{p}^* есть комплексно сопряжённый кватернион.

Как видно из (7), скалярное произведение векторных кватернионов \mathbf{q} и \mathbf{p} находится как простое произведение кватернионов \mathbf{q} и \mathbf{p}^* . Но тогда, как следует из свойств произведения $\mathbf{q}\mathbf{p}^*$ (4) и (5), для скалярного произведения векторных кватернионов получим

$$\eta_H = (\mathbf{q}, \mathbf{p})_H = (\mathbf{q}, \mathbf{p})_E + [\mathbf{q}, \mathbf{p}]. \quad (8)$$

Таким образом, скалярное произведение векторных кватернионов, задающих в евклидовом пространстве векторы $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ и $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, представляет полный кватернион:

$$\eta_H = \text{Re } \eta_H + \text{hyps } \eta_H. \quad (9)$$

Реальная часть кватерниона η_H равна скалярному произведению векторов \mathbf{q} и \mathbf{p} в евклидовом пространстве:

$$\text{Re } \eta_H = (\mathbf{q}, \mathbf{p})_E = q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 = |\mathbf{q}| |\mathbf{p}| \cos \varphi, \quad (10)$$

где φ – угол между векторами \mathbf{q} и \mathbf{p} . Гиперкомплексная часть кватерниона η_H есть векторное произведение трёхмерных векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} :

$$\text{hyps } \eta_H = [\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \mathbf{r} |\mathbf{q}| |\mathbf{p}| \sin \varphi. \quad (11)$$

Вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 i + \mathbf{r}_2 j + \mathbf{r}_3 k$, заданный в виде кватерниона, имеет единичный модуль и представляет собой нормаль к собственной плоскости векторов \mathbf{q} и \mathbf{p} , а величина $|\mathbf{q}| |\mathbf{p}| \sin \varphi$ есть площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Процедура вращения вектора трёхмерного пространства, заданного кватернионом \mathbf{q} , реализуется также с помощью кватернионов. В этом случае результат поворота вектора \mathbf{q} на угол 2φ вокруг оси с направляющим вектором \mathbf{c} находится как

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}\mathbf{q}\mathbf{b}^*, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{b} = \cos \varphi + \mathbf{c} \sin \varphi, \quad |\mathbf{b}| = 1, \quad (13)$$

вращающий кватернион, а $\mathbf{c} = \rho_1 i + \rho_2 j + \rho_3 k$ – векторный кватернион единичной длины, задающий ось вращения.

К кватернионным сигналам приводит необходимость решения задач обработки изображений, расположенных в трёхмерном пространстве множества S точек, задающих пространственный групповой точечный объект. Желательно, чтобы точечное множество было упорядочено. Для формирования КТС выберем в трёхмерном пространстве некоторую точку – полюс – и примем его в качестве начала системы отсчёта. Соединив полюс с каждой из точек множества,

получим пучок из векторов $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}(n)\}_{n=0}^{s-1}$. Любой из этих векторов будем рассматривать как векторный кватернион $\mathbf{q}(n) = q_1(n)i + q_2(n)j + q_3(n)k$, $n = 0, 1, \dots, s-1$. Заданное в виде последовательности таких кватернионов исходное множество точек называется *кватернионным сигналом* [2].

Скалярное произведение КТС \mathbf{Q} и \mathbf{P} является полным кватернионом и получается в виде суммы скалярных произведений составляющих их кватернионов:

$$\eta = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \sum_{n=0}^{s-1} \mathbf{q}(n) \mathbf{p}^*(n). \quad (14)$$

При повороте КТС на угол 2ϕ вокруг единичной оси с направляющим вектором \mathbf{c} на данный угол поворачивается каждый радиус – вектор сигнала вокруг одной и той же оси:

$$\mathbf{P} = \mathbf{b} \mathbf{Q} \mathbf{b}^*. \quad (15)$$

3. Метод главных компонент

Анализ главных компонент – это метод преобразования одной последовательности наблюдаемых переменных в другую последовательность переменных и заключается в получении новых показателей – главных компонент, являющихся линейными комбинациями исходных. Главные компоненты упорядочиваются в порядке убывания той дисперсии, которую они «объясняют». Первая главная компонента объясняет большую часть дисперсии, чем вторая, вторая – большую, чем третья и т.д. [9, 10].

Метод главных компонент (МГК) осуществляет переход к новой системе координат y_1, \dots, y_p в исходном пространстве признаков x_1, \dots, x_p , которая является системой ортонормированных линейных комбинаций:

$$\begin{cases} y_j(\mathbf{x}) = w_{1j}(x_1 - m_1) + \dots + w_{pj}(x_p - m_p); \\ \sum_{i=1}^p w_{ij}^2 = 1, \quad (j = \overline{1, p}); \\ \sum_{i=1}^p w_{ij} w_{ik} = 0, \quad (j, k = \overline{1, p}, j \neq k), \end{cases} \quad (16)$$

где m_i – математическое ожидание признака x_i .

Линейные комбинации выбираются таким образом, что среди всех возможных линейных нормированных комбинаций исходных признаков первая главная компонента $y_1(\mathbf{x})$ обладает наибольшей дисперсией. Геометрически это выглядит как ориентация новой координатной оси y_1 вдоль направления наибольшей вытянутости эллипсоида рассеивания объектов исследуемой выборки в пространстве признаков x_1, \dots, x_p . Вторая главная компонента

имеет наибольшую дисперсию среди всех оставшихся линейных преобразований, некоррелированных с первой главной компонентой. Она интерпретируется как направление наибольшей вытянутости эллипсоида рассеивания, перпендикулярное первой главной компоненте и т.д.

Вычисление коэффициентов главных компонент w_{ij} основано на том факте, что векторы $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, \dots, w_{p1})^T, \dots, \mathbf{w}_p = (w_{1p}, \dots, w_{pp})^T$ являются собственными (характеристическими) векторами ковариационной матрицы. В свою очередь, соответствующие собственные числа этой матрицы равны дисперсиям проекций множества объектов на оси главных компонент.

Метод главных компонент допускает следующую геометрическую интерпретацию: вначале производится перенос начала координат в точку, являющуюся центром эллипсоида рассеивания; затем производится поворот осей координат таким образом, чтобы новые оси координат были направлены вдоль осей эллипсоида рассеивания точек, причём разброс точек вокруг первой выбранной оси должен быть не меньше, чем вдоль второй выбранной оси и т.д.

4. Применение МГК для анализа КТС

Пусть имеется векторный КТС \mathbf{Q} размерности s . Пусть далее каждая компонента кватернионов, входящих в состав сигнала, есть проекция на соответствующую ось в декартовой системе координат. Применение МГК подразумевает переход к другой ориентации осей координат, в которых координаты исходного объекта при пересчёте координат не будут изменяться в зависимости от их исходного положения.

Представим КТС в виде матрицы с тремя столбцами и s строками

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ s-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} q_1(0) & q_2(0) & q_3(0) \\ q_1(1) & q_2(1) & q_3(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ q_1(s-1) & q_2(s-1) & q_3(s-1) \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (17)$$

Здесь столбцы в терминах МГК – это переменные, т.е. $p = 3$. Тогда ковариационная матрица $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}$:

$$s_{i,j} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} (q_i(k) - \bar{q}_i)(q_j(k) - \bar{q}_j); \quad i, j = 0, 1, 2, \quad (18)$$

где \bar{q}_i и \bar{q}_j – математические ожидания i и j столбца матрицы (17).

Для определения главных компонент необходимо определить собственные вектора $\mathbf{w}_0 = (w_{00}, w_{10}, w_{20})$, $\mathbf{w}_1 = (w_{01}, w_{11}, w_{21})$ и $\mathbf{w}_2 = (w_{02}, w_{12}, w_{22})$ ковариационной матрицы (18).

Теперь, выполнив пересчёт координат исходного кватернионного сигнала $\Phi_Q = \{\varphi_Q(n)\}_{0,s-1}$, где

$$\begin{aligned} \Phi_Q &= \varphi_{Q,1}i + \varphi_{Q,2}j + \varphi_{Q,3}k : \\ \varphi_{Q,1}(n) &= w_{00}(q_1(n) - \bar{q}_1) + w_{10}(q_2(n) - \bar{q}_2) + \\ &+ w_{20}(q_3(n) - \bar{q}_3); \\ \varphi_{Q,2}(n) &= w_{01}(q_1(n) - \bar{q}_1) + w_{11}(q_2(n) - \bar{q}_2) + \\ &+ w_{21}(q_3(n) - \bar{q}_3); \\ \varphi_{Q,3}(n) &= w_{02}(q_1(n) - \bar{q}_1) + w_{12}(q_2(n) - \bar{q}_2) + \\ &+ w_{22}(q_3(n) - \bar{q}_3); \end{aligned} \quad (19)$$

получим изображение КТС в новых координатных осях, причём данное изображение по определению не будет зависеть от исходного положения КТС (параметров его вращения), т.е.

$$\Phi_Q = \Phi_{bQb^{-1}}. \quad (20)$$

Рассмотрим основные свойства, связанные с использованием собственных значений и собственных векторов.

1. Собственные значения линейного оператора выражают его свойства, и их значения не зависят от используемой системы координат [13]. Это означает, что и для исходного Q , и повернутого bQb^{-1} КТС собственные значения ковариационной матрицы будут одинаковы.

2. Использование собственных векторов означает использование в качестве координатных базисных векторов, направление которых зависит только от конфигурации группового точечного объекта.

3. Совокупность собственных векторов образует невырожденную модальную матрицу T , определитель которой равен 1, и с помощью которой задаётся преобразование координат, т.е. является оператором вращения [2]

$$p = Tq, \quad (21)$$

здесь $q = q_1i + q_2j + q_3k$ и $p = p_1i + p_2j + p_3k$, соответственно исходный и повернутый кватернион, причём $q = T^{-1}p$.

5. Решение задачи оценки параметров вращения

Как было показано, метод главных компонент позволяет получить представление ПГТО инвариантное к параметрам вращения, т.е. $\Phi_\Xi = \{\varphi_\Xi(n)\}_{0,s-1} =$

$$\begin{aligned} \Xi \equiv & \left\{ \left[(b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)\omega_1(m) + 2(b_1b_2 + b_0b_3)\omega_2(m) + 2(b_1b_3 - b_0b_2)\omega_3(m) \right] i + \right. \\ & + \left[2(b_1b_2 - b_0b_3)\omega_1(m) + (b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2)\omega_2(m) + 2(b_3b_2 + b_0b_1)\omega_3(m) \right] j + \\ & \left. + \left[2(b_1b_3 + b_0b_2)\omega_1(m) + 2(b_3b_2 - b_0b_1)\omega_2(m) + (b_0^2 + b_3^2 - b_2^2 - b_1^2)\omega_3(m) \right] k \right\}_{0,s-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

или

$$\{\xi(n)\}_{0,s-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1(n) \\ \xi_2(n) \\ \xi_3(n) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1} \equiv \{T \bullet \omega(m)\}_{0,s-1} = \left\{ T \bullet \begin{pmatrix} \omega_1(m) \\ \omega_2(m) \\ \omega_3(m) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1}, \quad (24)$$

где

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_{\Xi,1}(n) \\ \varphi_{\Xi,2}(n) \\ \varphi_{\Xi,3}(n) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1} = \left\{ T_\Xi \begin{pmatrix} \xi_1(n) \\ \xi_2(n) \\ \xi_3(n) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1}, \text{ где } T_\Xi - \text{ опера-}$$

тор вращения, представляющий собой невырожденную модальную матрицу, сконструированную из совокупности собственных векторов ковариационной матрицы S .

Для ПГТО $\Omega = \{\omega(m)\}_{0,s-1}$ аналогично получим

$$\Phi_\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_{\Omega,1}(m) \\ \varphi_{\Omega,2}(m) \\ \varphi_{\Omega,3}(m) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1} = \left\{ T_\Omega \begin{pmatrix} \omega_1(m) \\ \omega_2(m) \\ \omega_3(m) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1}, \text{ причём}$$

$\Phi_\Xi \equiv \Phi_\Omega$, здесь тождественное равенство означает, что Φ_Ξ равен Φ_Ω с точностью до порядка нумерации точек в ПГТО.

Тогда для оценки параметров вращения ПГТО $\Xi = \{\xi(n)\}_{0,s-1}$ относительно ПГТО $O = \{\xi(n)\}_{0,s-1}$, при неизвестном порядке нумерации точечных отсчётов в объекте можно записать:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_1(n) \\ \xi_2(n) \\ \xi_3(n) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1} \equiv \left\{ T_\Xi^{-1} T_\Omega \begin{pmatrix} \omega_1(m) \\ \omega_2(m) \\ \omega_3(m) \end{pmatrix} \right\}_{0,s-1}, \quad (22)$$

здесь $T = T_\Xi^{-1} T_\Omega$ – матрица вращений, являющаяся, по сути, оценкой параметров вращений ПГТО $\Omega = \{\omega(m)\}_{0,s-1}$ относительно $\Xi = \{\xi(n)\}_{0,s-1}$.

В том случае, если ПГТО задан кватернионным сигналом, то из матрицы T можно получить оценку параметров вращений в виде вращающего кватерниона, т.е. если

$$\Xi = \{\xi(n)\}_{0,s-1} = \{\xi_1(n)i + \xi_2(n)j + \xi_3(n)k\}_{0,s-1},$$

и

$$\Omega = \{\omega(m)\}_{0,s-1} = \{\omega_1(m)i + \omega_2(m)j + \omega_3(m)k\}_{0,s-1}$$

, при условии, что

$$\Xi = \{\xi(n)\}_{0,s-1} \equiv b\Omega b^{-1} = \{b\omega(m)b^{-1}\}_{0,s-1},$$

где $b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ – вращающий кватернион, то получим

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 & 2(b_1b_2 + b_0b_3) & 2(b_3b_1 - b_0b_2) \\ 2(b_1b_2 - b_0b_3) & b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2 & 2(b_3b_2 + b_0b_1) \\ 2(b_3b_1 + b_0b_2) & 2(b_3b_2 - b_0b_1) & b_0^2 + b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

или согласно [2]

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi + \rho_1^2(1 - \cos 2\varphi) & \rho_2\rho_1(1 - \cos 2\varphi) + \rho_3 \sin 2\varphi & \rho_3\rho_1(1 - \cos 2\varphi) - \rho_2 \sin 2\varphi \\ \rho_2\rho_1(1 - \cos 2\varphi) - \rho_3 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi + \rho_2^2(1 - \cos 2\varphi) & \rho_3\rho_2(1 - \cos 2\varphi) + \rho_1 \sin 2\varphi \\ \rho_3\rho_1(1 - \cos 2\varphi) + \rho_2 \sin 2\varphi & \rho_3\rho_2(1 - \cos 2\varphi) - \rho_1 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi + \rho_3^2(1 - \cos 2\varphi) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Следовательно, учитывая выражения (22), (25) и (26), т.е.

$$\begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 & 2(b_1b_2 + b_0b_3) & 2(b_3b_1 - b_0b_2) \\ 2(b_1b_2 - b_0b_3) & b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2 & 2(b_3b_2 + b_0b_1) \\ 2(b_3b_1 + b_0b_2) & 2(b_3b_2 - b_0b_1) & b_0^2 + b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \Xi \mathbf{T}_\Omega = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & t_{0,2} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,0} & t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi + \rho_1^2(1 - \cos 2\varphi) & \rho_2\rho_1(1 - \cos 2\varphi) + \rho_3 \sin 2\varphi & \rho_3\rho_1(1 - \cos 2\varphi) - \rho_2 \sin 2\varphi \\ \rho_2\rho_1(1 - \cos 2\varphi) - \rho_3 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi + \rho_2^2(1 - \cos 2\varphi) & \rho_3\rho_2(1 - \cos 2\varphi) + \rho_1 \sin 2\varphi \\ \rho_3\rho_1(1 - \cos 2\varphi) + \rho_2 \sin 2\varphi & \rho_3\rho_2(1 - \cos 2\varphi) - \rho_1 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi + \rho_3^2(1 - \cos 2\varphi) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

можно найти параметры вращения ПГТО Ω относительно Ξ , заданных в виде КТС, т.е. вычислить ось вращения – $\mathbf{c} = \rho_1 i + \rho_2 j + \rho_3 k$ и угол поворота 2φ :

$$2\varphi = \arccos\left(\frac{t_{0,0}}{2} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,2}}{2} - \frac{1}{2}\right); \quad (28)$$

$$\rho_1 = \frac{t_{1,2} - t_{2,1}}{2 \sin(2\varphi)}; \quad \rho_2 = \frac{t_{2,0} - t_{0,2}}{2 \sin(2\varphi)}; \quad \rho_3 = \frac{t_{0,1} - t_{1,0}}{2 \sin(2\varphi)}. \quad (29)$$

Заключение

Использование метода главных компонент, основанного на свойствах характеристических векторов ковариационной матрицы \mathbf{S} , рассчитанной по координатам точек пространственного группового точечного объекта, позволяет получить оценку параметров вращений пространственного группового точечного объекта. При этом достоинством метода является то, что для оценки параметров вращений нет необходимости в упорядочении точечных отметок ПГТО, т.е. порядок следования точек в исходном и повернутом ПГТО может не совпадать. Данное обстоятельство позволяет упростить решение таких задач обработки пространственных групповых точечных объектов, как обнаружение и распознавание ПГТО, так как не требуется разрабатывать трудоёмкую процедуру нумерации точек в объекте, устойчивую к воздействию шумов и к процедуре вращения ПГТО.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-07-00585-а).

Литература

1. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий, А.К. Передреев [и др.]; под ред. Я.А. Фурмана. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 592 с.
2. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий, А.А. Рожнецов [и др.]; под ред. Я.А. Фурмана. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 456 с.
3. **Фурман, Я.А.** Распознавание групповых точечных объектов в трёхмерном пространстве / Я.А. Фурман, Д.Г. Хафизов // Автометрия. – 2003. – Т. 39, №1. – С. 3-18.
4. **Furman, Ya.A.** Processing of Quaternion Signals Specifying Spatially Located Group Point Objects / Ya.A. Furman // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2002. – Vol.12, № 2. – P. 175-193.
5. **Хафизов, Д.Г.** Упорядочение точек пространственно изобразимого группового точечного объекта на базе амплитудно-фазового представления / Д.Г. Хафизов // Автометрия. – 2007. – Т. 43, №1. – С. 10-23.
6. **Леухин, А.Н.** Оценка параметров вращений трёхмерного группового точечного объекта без предварительной нумерации формирующих точек / А.Н. Леухин, Д.Г. Хафизов // Математические методы распознавания образов: Доклады 11-й Всероссийской конференции. – М., 2003. – С. 130-133.
7. **Фурман, Я.А.** Обратная задача вращения трёхмерных векторных сигналов / Я.А. Фурман, И.Л. Егошина // Автометрия. – 2010. – Т. 46, №1. – С. 46-56.
8. **Фурман, Я.А.** Нахождение параметров вращения пространственного группового точечного объекта по результатам его фильтрации / Я.А. Фурман, К.Б. Рябинин // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, №1. – С. 86-97.
9. **Дронов, С.В.** Многомерный статистический анализ: учеб. пособие / С.В. Дронов. – Барнаул: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2003. – 213 с.
10. **Калинина, В.Н.** Введение в многомерный статистический анализ: учеб. пособие / В.Н. Калинина, В.И. Соловьёв. – ГУУ. – М., 2003. – 66 с.
11. **Кантор, И.Л.** Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – М.: Наука, 1973.
12. **Хафизов, Д.Г.** Получение аналитического представления формы пространственного группового точечного объекта / Д.Г. Хафизов // Вестник МарГТУ Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2008. – №2. – С. 35-41.

13. **Корн. Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

References

1. Contour Analysis introduction and its image and signal processing application / Ya.A. Furman, A.V. Krevetsky, A.K. Peredreyev [and etc.]; under edition of Ya.A. Furman. – Secondary Edition – Moscow: Fizmatlit, 2003. – 592 p. – (in Russian).
2. Complex and hypercomplex systems at tasks of multidimensional signal processing / Ya.A. Furman, A.V. Krevetsky, A.A. Rozhentsov [and etc.]; under edition of Ya.A. Furman. – Moscow: Fizmatlit, 2004. – 456 p. – (in Russian).
3. **Furman, Ya.A.** Recognition of group point objects in three-dimensional space / Ya.A. Furman, D.G. Khafizov// Avtometriya. – 2003. – V. 39, №1. – P. 3-18. – (in Russian).
4. **Furman, Ya.A.** Processing of quaternion signals specifying spatially located group point objects / Ya.A. Furman // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2002. – Vol.12, № 2. – p. 175-193.
5. **Khafizov, D.G.** Sequencing points of the spatial image of a group point object based on amplitude-phase representation / D.G. Khafizov // Avtometriya. – 2007. – V. 43, №1. – P. 10-23. – (in Russian).
6. **Leukhin, A.N.** Estimation of rotation parameters of three-dimensional group point object without preliminary numbering points / A.N. Leukhin, D.G. Khafizov // «Mathematical methods of image recognition»: Reports of 11th All-Russia conference. – Moscow, 2003. – P. 130-133.
7. **Furman, Ya.A.** Inverse problem of rotation of three-dimensional vector signals / Ya.A. Furman, I.L. Egoshina // Avtometriya. – 2010. – V. 46, №1. – P. 46-56. – (in Russian).
8. **Furman, Ya.A.** Determining the rotational variables of a spatial group point object / Ya.A. Furman, K.B. Ryabinin // Radioengineering and electronics. – 2008. – V. 53, №1. – P. 86-97. – (in Russian).
9. **Dronov, S.V.** The multidimensional statistical analysis / S.V. Dronov. – Barnaul: Publishing house of the Altay state university, 2003. – 213 p. – (in Russian).
10. **Kalinina, V.N.** Introduction in the multidimensional statistical analysis / V.N. Kalinina, V.I. Solov'ev. – SUM. – Moscow, 2003. – 66 p. – (in Russian).
11. **Kantor, I.L.** Hypercomplex numbers / I.L. Kantor, A.S. Solodovnikov. – Moscow: Nauka, 1973. – (in Russian).
12. **Khafizov, D.G.** Getting an analytical representation of the spatial group point objects form/ D.G. Khafizov// The bulletin of MarSTU Radioengineering and infocommunication systems. – 2008. – №2. – P. 35-41. (in Russian).
13. **Korn, G.** The directory on the mathematician for scientist and engineers / G. Korn, T. Korn. – Moscow: Nauka, 1968. – 720 p. – (in Russian).

DEFINITION OF ROTATION PARAMETERS OF SPATIAL GROUP POINT OBJECT AT UNKNOWN NUMBERING OF DOT MARKS

D. G. Khafizov
Mari State Technical University
Abstract

Questions of rotation parameters of spatial group point objects images on the basis of the main things method are considered. The application of the given method allows to receive an estimation of rotation parameters of spatial group point object at the absence of the information on numbering of points in object that essentially simplifies the decision of problems of processing of spatial group points objects.

Key words: spatial group point object, hypercomplex number, quaternion, quaternion signals, rotation quaternion, rotational variables, rotational matrix.

Сведения об авторе



Хафизов Динар Гафиятуллович, 1978 года рождения, в 2001 окончил Марийский государственный технический университет по специальности «Вычислительный машины, комплексы, системы и сети». Кандидат технических наук (2004), доцент кафедры радиотехнических и медико-биологических систем Марийского государственного технического университета (г. Йошкар-Ола). Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов. Публикации: 50 научных трудов. E-mail: HafizovDG@marstu.net

Dinar Gafiyatulloevich Khafizov, (b. 1978), graduated (2001) from Mari State Technical University (MarSTU), majoring in Computer System, Complexes, Systems and Networks. He received his Candidate of Science in engineering (2004). He is the associate professor of radio engineering and medical and biologic systems department at Mari State Technical University (Yoshkar-Ola). Research interests: image processing, pattern recognition. Author of 50 scientific papers.

Поступила в редакцию 6 сентября 2010 г.