

ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ХАНКЕЛЯ-БЕССЕЛЯ

Ковалёв А.А., Котляр В.В.

Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Получено точное решение скалярного уравнения Гельмгольца, описывающее световой пучок, распространяющийся в положительном направлении вдоль оптической оси. Комплексная амплитуда такого пучка пропорциональна произведению двух линейно независимых решений дифференциального уравнения Куммера. Получены выражения для частного случая таких пучков – пучков Ханкеля-Бесселя (ХБ). Исследована фокусировка ХБ-пучков.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, непараксиальная дифракция, параболическая система координат, уравнение Куммера, вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера), оптический вихрь, функция Бесселя, функция Ханкеля.

Введение

В оптике известны лазерные пучки, которые описываются скалярными комплексными амплитудами, являющимися точными решениями непараксиального уравнения Гельмгольца. Это хорошо известные плоские и сферические волны [1], а также полученные недавно моды Бесселя [2], пучки Матье [3] и параболические лазерные пучки [4]. В работе авторов [5] были рассмотрены непараксиальные гипергеометрические (нГГ) лазерные пучки. Они тоже являются решением уравнения Гельмгольца и получены на основе вычисления интеграла для углового спектра плоских волн только для чётных номеров топологического заряда спиральной фазы пучка. Эти нГГ-пучки описываются комплексной амплитудой в виде произведения двух функций Куммера ${}_1F_1(a, b, x)$ [6] с разными аргументами x . Они представляют собой суперпозицию двух одинаковых световых волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оптической оси z . В [5] также с помощью асимптотического разложения одной из функций Куммера получены приближённые выражения для комплексной амплитуды, описывающей прямую и обратные световые волны (гипергеометрические лазерные пучки).

В данной работе мы обобщили результаты работы [5] и получили точное решение уравнения Гельмгольца для любого целого номера топологического заряда, описывающее непараксиальный лазерный пучок, комплексная амплитуда которого представляет собой произведение функции Куммера ${}_1F_1(a, b, x_1)$ и второго решения уравнения Куммера $U(a, b, x_2)$. Так как при определённых параметрах функция $U(a, b, x_2)$ пропорциональна функции Ханкеля, а функция Куммера – функции Бесселя, то такие пучки названы непараксиальными пучками Ханкеля-Бесселя. Заметим, что полученного решения нет в справочниках специальных функций [6, 7] и в известной работе Миллера [8].

Пучки Ханкеля-Бесселя ($n=0$) порождаются источником в начальной плоскости с бесконечной

плотностью энергии. При распространении вдоль положительной оси z эти пучки расходятся пропорционально \sqrt{z} . При ненулевом топологическом заряде n порождающий источник не излучает вдоль оптической оси.

1. Решение уравнения Гельмгольца в параболических координатах

Рассмотрим уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах (r, φ, z) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \times \\ \times E(r, \varphi, z) = 0, \quad (1)$$

где k – волновое число.

Будем искать решение $E(r, \varphi, z)$ в следующем виде:

$$E(r, \varphi, z) = E(r, z) r^p \exp(in\varphi + ikz). \quad (2)$$

Тогда для $E(r, z)$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{2p+1}{r} \right) \frac{\partial E}{\partial r} + \\ + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \left(\frac{p^2 - n^2}{r^2} \right) E = 0. \quad (3)$$

При $p = \pm n$ последнее слагаемое в (3) пропадает. Перейдём к параболическим координатам:

$$\begin{cases} x = z + \sqrt{r^2 + z^2}, \\ y = z - \sqrt{r^2 + z^2}. \end{cases} \quad (4)$$

В параболических координатах (4) уравнение (3) примет вид (при $p = +n$):

$$x \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \\ + (n+1+ikx) \frac{\partial E}{\partial x} - (n+1+iky) \frac{\partial E}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) решается в разделяющихся переменных. Подставив в (5) $E(x, y) = X(x)Y(y)$, получим:

$$\begin{aligned} & \left[x \frac{X''}{X} + (n+1+ikx) \frac{X'}{X} \right] = \\ & = \left[y \frac{Y''}{Y} + (n+1+iky) \frac{Y'}{Y} \right] = C, \end{aligned} \tag{6}$$

где C – постоянная, не зависящая от x и y . Тогда вместо уравнения (5) будем иметь два уравнения:

$$\begin{cases} x \frac{d^2 X}{dx^2} + (n+1+ikx) \frac{dX}{dx} - CX = 0, \\ y \frac{d^2 Y}{dy^2} + (n+1+iky) \frac{dY}{dy} - CY = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначив $\xi = -ikx$, $\eta = -iky$ и $C = -ikD$, оба уравнения (7) преобразуются в уравнения Куммера:

$$\begin{cases} \xi \frac{d^2 X}{d\xi^2} + (n+1-\xi) \frac{dX}{d\xi} - DX = 0, \\ \eta \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + (n+1-\eta) \frac{dY}{d\eta} - DY = 0, \end{cases} \tag{8}$$

решением которых будут являться функции Куммера ${}_1F_1(a, b, z)$ [6]:

$$\begin{cases} X(\xi) = {}_1F_1(D, n+1, \xi), \\ Y(\eta) = {}_1F_1(D, n+1, \eta). \end{cases} \tag{9}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X(x) &= {}_1F_1(D, n+1, -ikx), \\ Y(y) &= {}_1F_1(D, n+1, -iky), \end{aligned}$$

а решение исходного уравнения Гельмгольца (1) теперь можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z) &= E_0 (kr)^n \exp(in\varphi + ikz) \times \\ &\times {}_1F_1(D, n+1, x_+) {}_1F_1(D, n+1, x_-), \end{aligned} \tag{10}$$

где $x_{\pm} = -ik(z \pm \sqrt{r^2 + z^2})$, E_0 – постоянная, характеризующая мощность пучка.

Это решение без вывода приведено в [8]. В частном случае при $D = (n+1)/2$, используя выражения для функций Бесселя через функции Куммера [6]:

$$\begin{aligned} & {}_1F_1\left(v + \frac{1}{2}, 2v+1, 2iz\right) = \\ & = \Gamma(1+v) \exp(iz) \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} J_v(z), \end{aligned} \tag{11}$$

из (10) можно получить

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z) &= E_0 \Gamma^2\left(1 + \frac{n}{2}\right) (4i)^n \exp(in\varphi) \times \\ &\times J_{\frac{n}{2}}\left[\frac{k}{2}\left(z + \sqrt{r^2 + z^2}\right)\right] J_{\frac{n}{2}}\left[\frac{k}{2}\left(z - \sqrt{r^2 + z^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Решение (10) не описывает лазерное излучение, распространяющееся в определённом направлении.

Оно описывает стоячую волну, образованную в результате интерференции двух одинаковых волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оптической оси z .

Это следует из того, что для больших расстояний $z \gg r$, используя приближённые выражения для функции Бесселя от малых и от больших значений аргумента, выражение (12) приближённо равно следующему:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z) &= E_0 \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \exp(in\varphi) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2}{\pi kz}} \left(\frac{2kr^2}{z}\right)^{\frac{n}{2}} \cos\left(kz - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

откуда видно, что амплитуда пропорциональна косинусу от расстояния.

Разделим световое поле (10) на прямые и обратные волны. Для этого воспользуемся связью функции Куммера $M(a, b, x) = {}_1F_1(a, b, x)$ со вторым решением уравнения Куммера [6]:

$$\begin{aligned} U(a, b, z) &= \frac{\pi}{\sin \pi b} \times \\ &\times \left[\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Функция (14) определена также и при целых значениях параметра b [6].

Обратив (14), получим выражение для ${}_1F_1(a, b, x)$ через $U(a, b, x)$:

$${}_1F_1(a, b, z) = AU(a, b, z) + BU(b-a, b, -z), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} D, \\ B &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} (-1)^b e^z D, \end{aligned} \tag{16}$$

$$D = \frac{\sin \pi b}{\sin \pi(b-a) + (-1)^b \sin \pi a}.$$

Используя (15), (16) и пренебрегая постоянными множителями, получим решение уравнения Гельмгольца (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z) &= \\ &= E_0 (kr)^n \exp(in\varphi) \left[\frac{\exp(ikz)}{\Gamma(n+1-D)} \times \right. \\ &\times U(D, n+1, x_+) {}_1F_1(D, n+1, x_-) + \\ &+ (-1)^{n+1} \frac{\exp(-ikz)}{\Gamma(D)} \times \\ &\times U(n+1-D, n+1, -x_+) {}_1F_1(n+1-D, n+1, -x_-) \left. \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Обозначив $D = (n + \beta + 1)/2$ и умножив обе части на $\Gamma(D) \Gamma(n+1-D)$, получим:

$$\begin{aligned}
E(r, \varphi, z) = & i^{2n+1} E_0 (kr)^n \exp(in\varphi) \times \\
& \times \left[-i\Gamma\left(\frac{n+\beta+1}{2}\right) \exp(ikz) U\left(\frac{n+\beta+1}{2}, n+1, x_+\right) {}_1F_1\left(\frac{n+\beta+1}{2}, n+1, x_-\right) + \right. \\
& \left. + i\Gamma\left(\frac{n-\beta+1}{2}\right) \exp(-ikz) U\left(\frac{n-\beta+1}{2}, n+1, -x_+\right) {}_1F_1\left(\frac{n-\beta+1}{2}, n+1, -x_-\right) \right]. \quad (18)
\end{aligned}$$

Данное выражение представляет собой сумму прямого и обратного гипергеометрических пучков, на что указывают показатели экспонент $\exp(\pm ikz)$ в (18). Далее будем рассматривать прямые пучки, распространяющиеся от плоскости $z=0$ в полупространство $z>0$. Выражение для прямого пучка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
E_+(r, \varphi, z) = & (-1)^n \Gamma\left(\frac{n+\beta+1}{2}\right) \times \\
& \times E_0 (kr)^n \exp(in\varphi + ikz) \times \\
& \times U\left(\frac{n+\beta+1}{2}, n+1, x_+\right) {}_1F_1\left(\frac{n+\beta+1}{2}, n+1, x_-\right). \quad (19)
\end{aligned}$$

При $n \neq 0$ комплексная амплитуда такого поля на оптической оси ($r=0$) равна нулю, в то время как при $n=0$ амплитуда отлична от нуля:

$$E_{n=0}(r=0, \varphi, z) = \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) E_0 U\left(\frac{\beta+1}{2}, 1, -2ikz\right). \quad (20)$$

В частности, при $\beta=0$ выражение для прямого пучка (19) примет вид:

$$\begin{aligned}
E_+(r, \varphi, z) = & i^{3n+1} \frac{\pi}{2} \Gamma(n+1) E_0 \exp(in\varphi) \times \\
& \times H_n^{(1)}\left[\frac{k}{2}(z + \sqrt{r^2 + z^2})\right] J_n\left[\frac{k}{2}(\sqrt{r^2 + z^2} - z)\right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

В начальной плоскости ($z=0$) аргументы и функции Ханкеля, и функции Бесселя равны $kr/2$. Функция Ханкеля расходится при стремлении аргумента к нулю. Используя приближённые выражения для функций Ханкеля и Бесселя при малых значениях аргумента [6, выражения 9.1.7, 9.1.9], можно показать, что при $n \neq 0$ и $r=z=0$ амплитуда поля имеет конечное значение:

$$E_+(r \approx 0, \varphi, z=0) = \frac{(-i)^n}{n} \Gamma(n+1) E_0 \exp(in\varphi). \quad (22)$$

Из (21) видно, что комплексная амплитуда непараксиального ГГ-пучка при $\beta=0$ пропорциональна произведению функций Ханкеля и Бесселя целых и полуцелых порядков. Поэтому световые пучки (18) и (21), чтобы их отличать от световых пучков, полученных в [5], будем называть пучками Ханкеля-Бесселя (ХБ). Из (21) видно, что ХБ-пучок не является модой свободного пространства, так как аргументы функций Ханкеля и Бесселя имеют разную зависимость от переменных r и z , и поэтому значения этих функций остаются постоянными при разных r при одинаковом z . То, что пучок (21) распро-

страняется вдоль положительного направления оси z , следует из асимптотики функции Ханкеля 1-го рода при больших z ($kz \gg 1$) [6, выражение 9.2.3]:

$$H_n^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (23)$$

В выражении (23), в отличие от (13), зависимость от расстояния включает в себя экспоненту вместо косинуса.

При $n=0$ на оптической оси ($r=0$) интенсивность равна

$$\begin{aligned}
I(r=0, \varphi, z) = & \left| i \frac{\pi}{2} E_0 H_0^{(1)}(kz) \right|^2 = \\
= & \frac{\pi^2}{4} E_0^2 [J_0^2(kz) + Y_0^2(kz)], \quad (24)
\end{aligned}$$

а максимум интенсивности достигается в точке z , удовлетворяющей уравнению

$$J_0(kz) J_1(kz) + Y_0(kz) Y_1(kz) = 0. \quad (25)$$

Моделирование показало, что функция $f(t) = J_0(t) J_1(t) + Y_0(t) Y_1(t)$ никогда не достигает нуля при $t>0$, поэтому фокусировки такого пучка не происходит, происходит только спад интенсивности вдоль оптической оси вследствие расхождения пучка. Более того, в точке $z=0$ функция (24) обращается в бесконечность, и в этом смысле поле (21) порождается точечным источником с бесконечной плотностью энергии, расположенным в начале координат. На рис. 1 показаны квадрат модуля функции (21) при $z>0$: в плоскости Orz (рис. 1а), а также зависимости вдоль продольной оси z (рис. 1б) и вдоль поперечной оси r (рис. 1в). Из (21) видно, что ХБ-пучки имеют бесконечную энергию.

Из рис. 1в видно, что, несмотря на бесконечное значение в точке $r=z=0$, функция (21) имеет строгий ноль. Из формулы (21) следует значение нуля $r_0 \approx 0,76\lambda$. Это позволяет говорить, что поле (21) порождается источником с бесконечной плотностью энергии и радиусом $0,76\lambda$ ($n=0$).

Рассмотрим другой частный случай, когда $\beta=1$. Тогда выражение для прямого пучка примет вид:

$$\begin{aligned}
E_+(r, \varphi, z) = & (-i)^n \Gamma(n) \frac{\pi E_0 k^{1-n}}{4} \exp(in\varphi) r \times \\
& \times \left[J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k\zeta_-}{2}\right) + i J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{k\zeta_-}{2}\right) \right] \times \\
& \times \left[i H_{\frac{n-1}{2}}^{(1)}\left(\frac{k\zeta_+}{2}\right) + H_{\frac{n+1}{2}}^{(1)}\left(\frac{k\zeta_+}{2}\right) \right], \quad (26)
\end{aligned}$$

где $\zeta_{\pm} = (z^2 + r^2)^{1/2} \pm z$. Из (23) видно, что пучок (26) также распространяется вдоль положительного направления оси z .

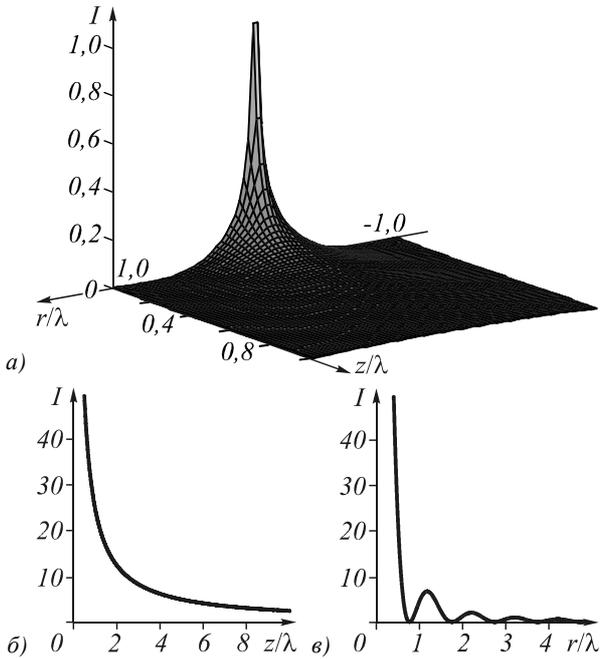


Рис. 1. Квадрат модуля функции (21) в плоскости Orz при $n = 0, E_0 = 100$ (а), зависимость интенсивности от продольной координаты при $r = 0$ (б) и от радиальной координаты при $z = 0$ (в)

В частном случае, при $n=0$ получается тривиальное решение уравнения Гельмгольца, $E_+(r, \varphi, z) = 0$, так как $H_{1/2}^{(1)}(x) + iH_{-1/2}^{(1)}(x) \equiv 0$.

2. Особенности пучков Ханкеля-Бесселя

Расходимость ХБ-пучка при больших z гиперболическая. Это следует из выражения для амплитуды поля при $z \gg \lambda$:

$$E_+(r, \varphi, z) \approx E_0 \exp(in\varphi) H_{n/2}^{(1)}(kz) J_{n/2} \left(\frac{kr^2}{2z} \right). \quad (27)$$

Из (27) видно, что амплитуда поля остаётся неизменной, если координаты r и z связаны соотношением:

$$r = \sqrt{\frac{2\gamma z}{k}}, \quad (28)$$

где γ – постоянная, не зависящая от z . Функция Ханкеля, входящая в (21), расходится при стремлении аргумента к нулю, но такое возможно при одновременно малых значениях r и z . В этом случае аргумент функции Бесселя в (21) также стремится к нулю. Используя приближённые выражения для функций Ханкеля и Бесселя при малых значениях аргумента, можно показать, что

$$E_+(r, \varphi, z) \approx \frac{(-i)^n}{n} \Gamma(n+1) \exp(in\varphi) \tan^n \left(\frac{\xi}{2} \right), \quad (29)$$

где $\tan \xi = r/z$. Т.е. амплитуда поля в некоторой точке, близкой к началу координат, зависит от направ-

ления из начала координат в эту точку (рис. 2). На рис. 2а показан квадрат модуля функции (21) (при $n=1, E_0=100$) в области размером $2\lambda \times \lambda$ (белый цвет – ноль, чёрный цвет – максимум). На рис. 2б-г показаны радиальные сечения интенсивности в плоскостях $z = 0,1\lambda, z = 0,01\lambda, z = 0,001\lambda$.

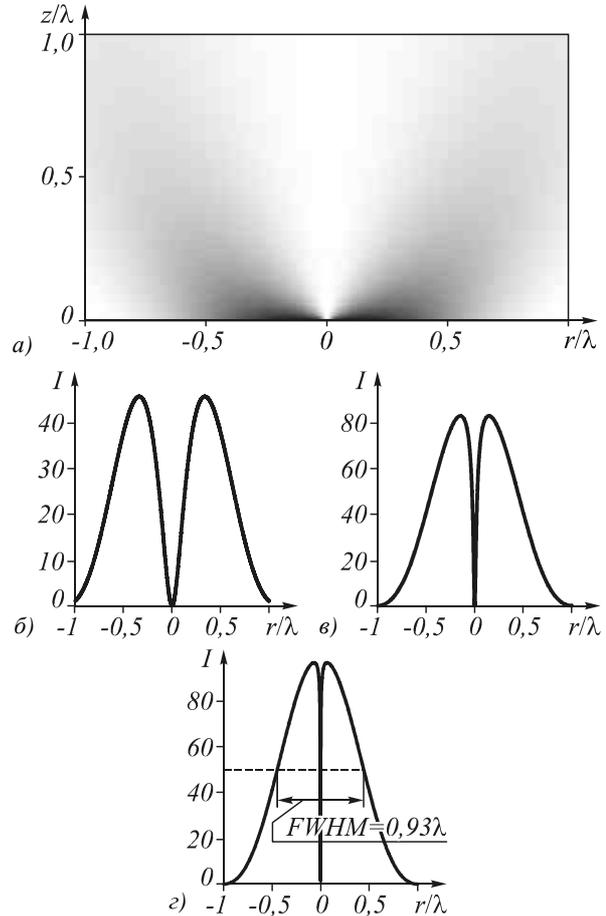


Рис. 2. Интенсивность в плоскости Orz при $n = 1, E_0 = 100$ ($-\lambda \leq x \leq \lambda, 0 \leq z \leq \lambda$, белый цвет – ноль, чёрный цвет – максимум) (а); радиальные сечения квадрата модуля функции (21) в разных плоскостях $z = 0,1\lambda$ (б), $z = 0,01\lambda$ (в), $z = 0,001\lambda$ (г)

3. Частные случаи пучков Ханкеля-Бесселя

При нечётных значениях n функции Бесселя полуполого порядка становятся элементарными. Рассмотрим частный случай при $n = 1$. В этом случае:

$$E_{n=1}(r, \varphi, z) = \frac{-2i}{kr} E_0 \exp(i\varphi) \times \sin \left[\frac{k}{2} (\sqrt{r^2 + z^2} - z) \right] \exp \left[\frac{ik}{2} (z + \sqrt{r^2 + z^2}) \right]. \quad (30)$$

Несмотря на то, что r находится в знаменателе (30), при $r=0$ на оптической оси будет нулевая амплитуда. Это можно показать, считая $r \ll z$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} E_{n=1}(r, \varphi, z) = \frac{-2i}{k} E_0 \exp(i\varphi + ikz) \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r} \sin \left(\frac{kr^2}{4z} \right) \right\} = 0. \quad (31)$$

Поле (30) формируется при следующем распределении амплитуды в начальной плоскости (в перетяжке):

$$E_{n=1}(r, \varphi, z=0) = \frac{-2i}{kr} E_0 \sin\left(\frac{kr}{2}\right) \exp\left(\frac{ikr}{2} + i\varphi\right). \quad (32)$$

Диаметр перетяжки этого пучка $FWHM=0,93\lambda$ (рис. 2з).

Амплитуда вблизи центра начальной плоскости равна $E_{n=1}(r \approx 0, \varphi, z=0) = -iE_0 \exp(i\varphi)$, а в самой центральной точке не определена из-за винтовой фазовой особенности, зато интенсивность при $r=z=0$ отлична от нуля $I = |E_{n=1}(r=0, \varphi, z=0)|^2 = |E_0|^2$.

При больших расстояниях $z \gg r$ (30) примет вид:

$$E_{n=1}(r, \varphi, z \gg r) = \frac{-2i}{kr} E_0 \sin\left(\frac{kr^2}{4z}\right) \exp(i\varphi + ikz). \quad (33)$$

4. Результаты моделирования

На рис. 3 показаны результаты моделирования поля (30) для длины волны $\lambda = 633$ нм: интенсивность и фаза в поперечной плоскости $z = 2\lambda$.

На рис. 4 показаны радиальные сечения интенсивности в плоскостях $z = 2\lambda$, $z = 4\lambda$ и $z = 6\lambda$.

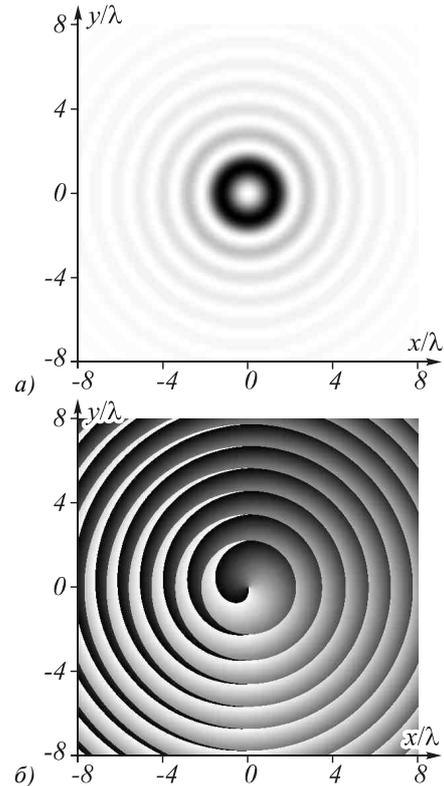


Рис. 3. Результаты моделирования пучка (30) для длины волны $\lambda = 633$ нм: интенсивность (а) и фаза (б) в поперечной плоскости $z = 2\lambda$

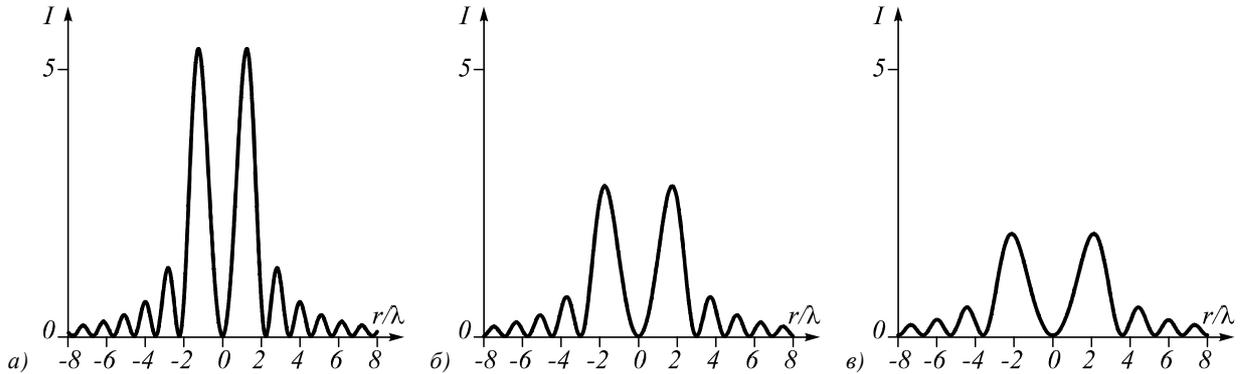


Рис. 4. Сечения интенсивности в плоскостях $z = 2\lambda$, $z = 4\lambda$, $z = 6\lambda$, полученные по формуле (21) при $n = 1$, $E_0 = 100$

Для сравнения было проведено моделирование конечно-разностным FDTD-методом (рис. 5). При моделировании использовались следующие параметры: размер расчётной области: $[-8\lambda, 8\lambda] \times [-8\lambda, 8\lambda] \times [0, 8\lambda]$. Шаг дискретизации по всем координатам – $\lambda/16$. Время моделирования – 20 периодов. Шаг дискретизации по времени – $\lambda/32$. На рис. 5а показана усреднённая по времени интенсивность в плоскости $z = 2\lambda$, а на рис. 5б, в – её радиальные сечения. Видно, что в центре интенсивность не спадает до нуля, что можно объяснить наличием продольной составляющей E_z (так как $n = 1$). Также видно, что интенсивности, показанные на рис. 4а и 5в, сходны по своей структуре, в то время как интенсивность на рис. 5б отличается и не спадает до нуля между светлыми кольцами. Это объясняется продольной со-

ставляющей и линейной поляризацией, учитываемой при моделировании FDTD-методом и не учитываемой в скалярной теории.

5. Фокусировка пучков Ханкеля-Бесселя

Сделаем в (21) замену переменной $z \rightarrow f - z$ (f – фокусное расстояние):

$$E_+(r, \varphi, z) = i^{3n+1} \frac{\pi}{2} \Gamma(n+1) E_0 \exp(in\varphi) \times \times H_n^{(1)} \left[\frac{k}{2} \left(f - z + \sqrt{r^2 + (z-f)^2} \right) \right] \times \times J_{\frac{n}{2}} \left[\frac{k}{2} \left(\sqrt{r^2 + (z-f)^2} - f + z \right) \right]. \quad (34)$$

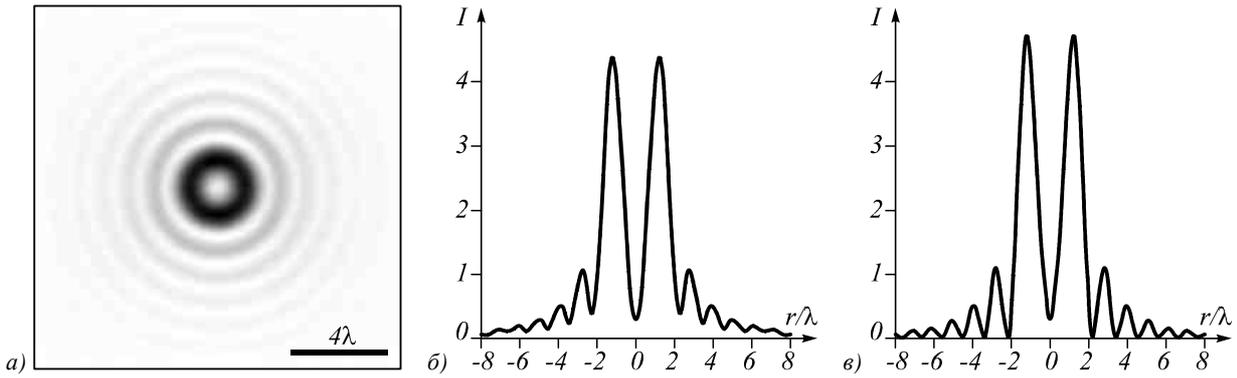


Рис. 5. Результаты моделирования распространения пучка Ханкеля-Бесселя с $n = 1$ конечно-разностным FDTD-методом (TE-поляризация, $E_x \neq 0$):

усреднённая по времени интенсивность в плоскости $z = 2\lambda$ (а), её горизонтальное (б) и вертикальное (в) сечения

При $n = 0$:

$$E_{n=0}(r, \varphi, z) = \frac{i\pi E_0}{2} \times H_0^{(1)} \left[\frac{k}{2} \left(f - z + \sqrt{r^2 + (z-f)^2} \right) \right] \times J_0 \left[\frac{k}{2} \left(\sqrt{r^2 + (z-f)^2} - f + z \right) \right]. \quad (35)$$

При $z > f$ и $r = 0$ аргумент функции Ханкеля обращается в нуль и интенсивность становится бесконечной. В начальной плоскости $z = 0$ такое поле имеет вид:

$$E_{n=0}(r, \varphi, z = 0) = \frac{i\pi E_0}{2} \times H_0^{(1)} \left[\frac{k}{2} \left(f + \sqrt{r^2 + f^2} \right) \right] J_0 \left[\frac{k}{2} \left(\sqrt{r^2 + f^2} - f \right) \right]. \quad (36)$$

При его задании в программе FullWAVE получается распространение поля, модуль амплитуды E_x которого показан на рис. 6а. На рис. 6б показана усредненная по времени интенсивность в плоскости Oxz . При моделировании использовалась длина волны $\lambda = 633$ нм, фокусное расстояние $f = 4\lambda = 2,53$ мкм. Размер расчётной области: $[-8\lambda, 8\lambda] \times [-8\lambda, 8\lambda] \times [0, 8\lambda]$. Шаг дискретизации по всем координатам $\lambda/16$. Время моделирования 20 периодов (т.е. $20\lambda/c$, где c – скорость света в вакууме). Шаг дискретизации по времени $\lambda/32$.

На рис. 6 видно, что происходит фокусировка в пятно. Это пятно имеет форму эллипса с минимальным диаметром по полуспаду интенсивности примерно $0,65\lambda$.

Кроме фокусного пятна, формируется светлое кольцо (боковой лепесток) с максимальной интенсивностью, составляющей 2,5% от максимальной интенсивности в фокусном пятне, что намного меньше, чем, например, в моде Бесселя нулевого порядка, для которой интенсивность первого кольца составляет 16% от интенсивности в центре дифракционной картины.

Фокусировки в продольную осевую линию $r = 0$ ($z > f$), как это может показаться из (35), не происхо-

дит. Это можно объяснить тем, что при $z > f$ для точек вблизи оси, т.е. $r \ll z - f$, можно записать:

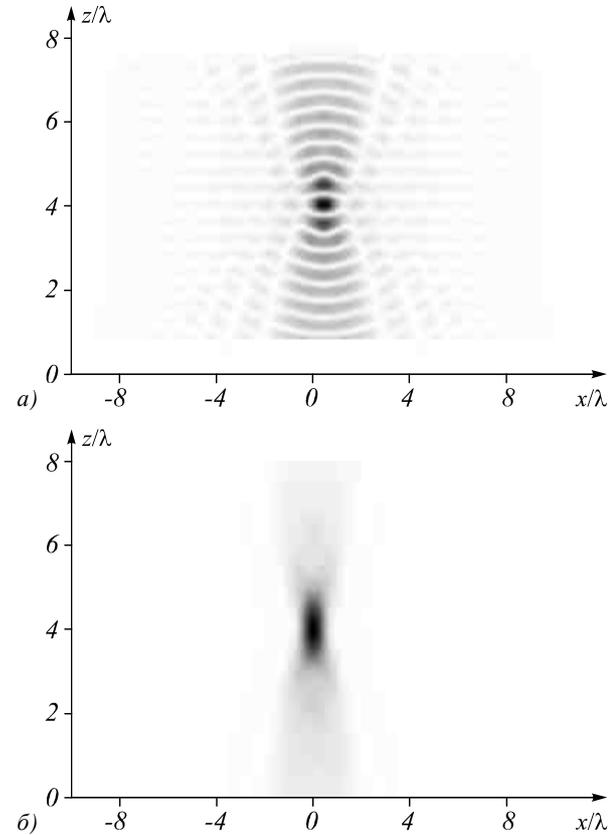


Рис. 6. Моделирование FDTD-методом фокусировки пучка Ханкеля-Бесселя ($n = 0, f = 4\lambda$): модуль амплитуды E_x в момент времени $t = 20\lambda/c$ (а) и интенсивность $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (б) в плоскости Oxz

$$E_{n=0}(r \ll z - f, \varphi, z) \approx \frac{i\pi E_0}{2} H_0^{(1)} \left[\frac{kr^2}{4(z-f)} \right] \times J_0 \left[\frac{k}{2} \left(\sqrt{r^2 + (z-f)^2} - f + z \right) \right] \sim -E_0 \ln \left[\frac{kr^2}{4(z-f)} \right] J_0 \left[\frac{k}{2} \left(\sqrt{r^2 + (z-f)^2} - f + z \right) \right]. \quad (37)$$

При $r=0$ логарифм принимает бесконечные значения для любых z , но при любых других r , близких к нулю, логарифм убывает с ростом z . Поэтому при моделировании получилось, что после фокусной точки $z=f$ интенсивность убывает вдоль оптической оси.

Аналогично было промоделировано распространение поля с вихрем $n=3$. Модуль амплитуды E_x в плоскости Oxz показан на рис. 7. Параметры моделирования те же. Здесь также не происходит продольного смещения фокуса, и самое узкое место пучка расположено в плоскости $z=f$. Интенсивность в поперечной плоскости и её сечения показаны на рис. 8.

Из рис. 2 может показаться, что можно добиться сколь угодно узкого провала интенсивности в центре дифракционной картины. Однако в этом случае потребовалось бы использование начального поля (36) бесконечной ширины.

На практике это невозможно, и поэтому FDTD-методом была получена картина, показанная на рис. 8.

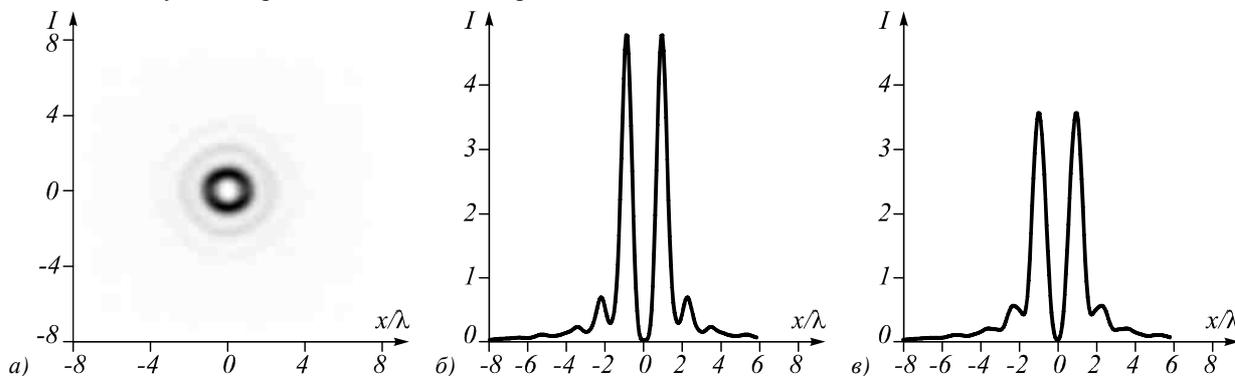


Рис. 8. Распределение интенсивности в плоскости $z=f$: двумерная картина (а) и её вертикальное (б) и горизонтальное (в) сечения

Заключение

В данной работе было получено точное решение скалярного уравнения Гельмгольца, описывающее световой пучок, распространяющийся в положительном направлении вдоль оптической оси. Комплексная амплитуда такого пучка пропорциональна произведению двух линейно независимых решений уравнения Куммера. Получены выражения для частного случая таких пучков – пучков Ханкеля-Бесселя. Исследована фокусировка пучков Ханкеля-Бесселя.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № 14.740.11.0016), грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-7414.2010.9) и молодого кандидата наук (МК-64571.2010.2).

Литература

1. **Born, M.** Principles of Optics 6 ed. / M. Born, E. Wolf – Pergamon, 1986.
2. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 1-1501.
3. **Gutierrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutierrez-Vega,

Толщина кольца по полуспаду интенсивности примерно равна длине волны.

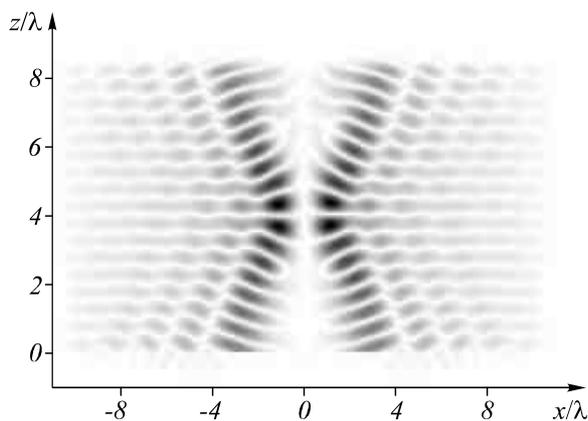


Рис. 7. Моделирование FDTD-методом фокусировки пучка Ханкеля-Бесселя ($n=3, f=4\lambda$): модуль амплитуды E_x в момент времени $t=20\lambda/c$

- M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25, N 20. – P. 1493-1495.
4. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29, N 1. – P. 44-46.
5. **Kotlyar, V.V.** Nonparaxial hypergeometric beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // J. Opt. A Pure Appl. Opt. – 2009. – Vol. 11, N 4. – P. 045711.
6. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовиц, И.А. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983.
8. **Miller, W.** Symmetry and separation of variables / W. Miller. – Addison-Wesley Pub.Com., Reading, MA, 1977.

References

1. **Born, M.** Principles of Optics 6 ed. / M. Born, E. Wolf – Pergamon, 1986.
2. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 1-1501.
3. **Gutierrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25. – N 20. – P. 1493-1495.
4. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – N 1. – P. 44-46.

5. **Kotlyar, V.V.** Nonparaxial hypergeometric beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* – 2009. – Vol. 11, N 4. – P. 045711.
6. *Handbook of Mathematical Functions* / edited by M. Abramowitz, I.A. Stegun – National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.– 1044p.
7. **Prudnikov, A.P.** *Integrals and Series. Special Functions* / A.P. Prudnikov, Y.A. Brichkov, O.I. Marichev. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1983. – (In Russian).
8. **Miller, W.** *Symmetry and separation of variables* / W. Miller. – Addison-Wesley Pub.Com., Reading, MA, 1977.

HANKEL-BESSEL LASER BEAMS

A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar

Image Processing Systems Institute of the RAS,

S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

We obtained exact solution of the scalar Helmholtz equation. This solution describes light beam propagating in the positive direction of the optical axis. Complex amplitude of such beam is proportional to multiplication of two linearly independent solutions of the Kummer's differential equation. Expressions for partial cases – Hankel-Bessel beams have been obtained. Focusing of Hankel-Bessel beams has been studied.

Key words: Helmholtz equation, nonparaxial diffraction, parabolic coordinates, Kummer's equation, confluent hypergeometric function (Kummer's function), optical vortex, Bessel function, Hankel function.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** – см. стр. 295 этого номера.



Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук (2005 год), работает научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), является докторантом кафедры технической кибернетики СГАУ. Ковалёв А.А.– специалист в области дифракционной оптики и нанофотоники. В списке научных работ 50 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства.

E-mail: alanko@smr.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths degree (2002). He is a researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is a specialist in such areas as diffractive optics and nanophotonics. He is co-author of 50 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.

Поступила в редакцию 16 июня 2011 г.