

## МИНИМИЗАЦИЯ РАЗМЕРА СВЕТОВОГО ИЛ И ТЕНЕВОГО ФОКАЛЬНОГО ПЯТНА С КОНТРОЛИРУЕМЫМ РОСТОМ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ В ФОКУСИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ С ВЫСОКОЙ ЧИСЛОВОЙ АПЕРТУРОЙ

Хонина С.Н., Волоотовский С.Г.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

### Аннотация

В работе рассмотрена минимизация размера фокального пятна (светового или теневого) при различных типах поляризации за счёт дополнительной аподизации выходного зрачка фокусирующей системы оптическим элементом с вихревой фазовой зависимостью от угла и полиномиальной амплитудной зависимостью от радиуса. Коэффициенты в радиальном полиноме оптимизировались с учётом выполнения определённых условий, в частности, сохранения энергетической эффективности и обеспечения заданного уровня боковых лепестков. Поиск коэффициентов выполнялся на основе минимизации функционала с использованием метода Брента.

**Ключевые слова:** размер фокального пятна, фокусирующая система с высокой числовой апертурой, преодоление дифракционного предела с контролируемым ростом боковых лепестков.

### Введение

В последнее время появилось много работ, посвящённых уменьшению поперечного размера фокального пятна высокоапертурной фокусирующей системы [1 - 5]. Наименьший поперечный размер фокального пятна был получен при радиальной поляризации, когда вклад продольной компоненты в суммарную интенсивность на оси является максимальным.

Существуют различные способы ещё уменьшить вклад поперечных компонент в общую интенсивность на оптической оси, в том числе введение кольцевой апертуры, пропускающей излучение только в периферийной части линзы [1, 2] и более энергетически эффективное дополнение фазовыми оптическими элементами [3 - 5].

Однако в данной работе мы рассматриваем не просто управление вкладом различных компонент электрического поля в фокальную область [5], а минимизацию размера фокального пятна (светового или теневого) за счёт оптимального подбора пропускающей функции зрачка.

В работе [6] для уменьшения размера фокального пятна, формируемого высокоапертурной фокусирующей системой, предлагалось использовать радиально-поляризованные моды Лаггера-Гаусса высшего радиального порядка, не имеющие вихревой фазовой составляющей.

Вихревая фазовая функция пропускания как фактор, позволяющий уменьшить размер светового пятна в отдельных компонентах острогофокусированного электрического поля при различных поляризациях, рассматривалась в работе [4], а возможность уменьшения фокального пятна в общем распределении интенсивности за счёт дополнительных вариаций по радиусу была показана в [5]. Использование в качестве пропускающих функций полиномов Цернике, в том числе имеющих вихревую фазовую зависимость, было рассмотрено в [7]. Это позволило одновременно вносить вихревую фазовую зависи-

мость и амплитудные изменения по радиусу. При этом было показано, что можно уменьшать размеры не только светового пятна, но и теневой области.

В области оптического захвата и манипулирования [8], STED-микроскопии [9] и теневой микроскопии [10] также существует задача фокусировки в теневое пятно или световое кольцо с компактно локализованной нулевой интенсивностью в центре. Формирование такого фокального распределения осуществляется внесением в фокусируемый пучок вихревой фазовой сингулярности.

В данной работе исследуется минимизация светового или теневого фокального пятна при различных типах поляризации за счёт дополнительной аподизации фокусирующей системы оптическим элементом с вихревой фазовой зависимостью от угла и полиномиальной амплитудной зависимостью от радиуса. Порядок и направление вихревой фазовой составляющей выбирался в зависимости от типа поляризации падающего на фокусирующую систему пучка [11], а коэффициенты в радиальном полиноме невысокой степени оптимизировались с учётом выполнения определённых условий, в частности, сохранения энергетической эффективности и обеспечения заданного уровня боковых лепестков. Поиск коэффициентов выполнялся на основе минимизации функционала с использованием метода Брента [12].

### 1. Скалярный дифракционный предел

Результат фокусировки ограниченной плоской волны с длиной волны  $\lambda$  и волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$  линзой радиусом  $R$  с фокусным расстоянием  $f$  в скалярном случае соответствует выражению:

$$E_0(\rho, \varphi) = \frac{k}{if} \exp(ikf) \int_0^R J_0\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr = \exp(ikf) \frac{R}{i\rho} J_1\left(\frac{k\rho R}{f}\right), \quad (1)$$

где  $(\rho, \varphi)$  – полярные координаты в фокальной плоскости,  $J_n(x)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка.

Радиус фокального пятна можно определить по первому нулю функции Бесселя первого порядка:

$$\rho_l = \frac{3,83f}{kR} \approx \frac{0,61\lambda}{NA}, \quad (2)$$

где  $NA$  – числовая апертура линзы.

Хорошо известный способ уменьшения размера фокального пятна – использовать не полную апертуру, а лишь узкое периферийное кольцо шириной  $\delta$ . В этом случае получается спектр, связанный с функцией Бесселя нулевого порядка (для малого  $\delta$  можно взять подынтегральное выражение в средней точке):

$$\begin{aligned} E_0(\rho, \varphi) &= \\ &= \frac{k}{if} \exp(ikf) \int_{R-\delta}^R J_0\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr \approx \\ &\approx \exp(ikf) \frac{kR\delta}{if} J_0\left(\frac{k\rho R}{f}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где радиус фокального пятна можно определить по первому нулю функции Бесселя нулевого порядка:

$$\rho_{l\delta} = \frac{2,4f}{kR} \approx \frac{0,38\lambda}{NA}. \quad (4)$$

Как видно из сравнения формул (1) и (3), уменьшение поперечного размера фокального пятна достигается за счёт падения интенсивности в фокусе ( $\rho=0$ ). При  $\delta \sim \lambda$  падение будет пропорционально квадрату фокусного расстояния.

Таким образом, скалярный дифракционный предел ( $NA=1$ ) для фокального светового пятна при использовании безабберационной полноапертурной фокусирующей системы по радиусу равен  $\rho_l \approx 0,61\lambda$  (по полуспаду интенсивности  $FWHM_l \approx 0,51\lambda$ ), а при использовании узкой кольцевой апертуры –  $\rho_{l\delta} \approx 0,38\lambda$  ( $FWHM_{l\delta} \approx 0,36\lambda$ ).

Также актуальной является задача фокусировки в теновое пятно или световое кольцо с компактно локализованной нулевой интенсивностью в центре. Формирование такого фокального распределения осуществляется внесением в фокусируемый пучок вихревой фазовой сингулярности.

Результат фокусировки ограниченной плоской волны с внесённой вихревой фазовой сингулярностью первого порядка в скалярном случае соответствует выражению:

$$\begin{aligned} E_1(\rho, \varphi) &= \\ &= \frac{k}{if} \exp(ikf) \exp(i\varphi) \int_0^R J_1\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Интеграл в (5) обычно записывается через суперпозицию функций Бесселя и Струве [13]:

$$\begin{aligned} \int_0^R J_1(\alpha r) r dr &= \\ &= \frac{\pi R}{2\alpha} [J_1(\alpha R) H_0(\alpha R) - J_0(\alpha R) H_1(\alpha R)], \end{aligned} \quad (6)$$

которая неудобна для анализа. Поэтому рассмотрим интеграл в (5) через гипергеометрическую функцию:

$$\int_0^R J_1(\alpha r) r dr = \frac{\alpha R^3}{6} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}, 2; -\frac{\alpha^2 R^2}{4}\right), \quad (7)$$

$$\text{где } {}_1F_2(x; y_1, y_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n}{(y_1)_n \cdot (y_2)_n} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1).$$

Таким образом, выражение в (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_1(\rho, \varphi) &= \exp(ikf) \exp(i\varphi) \frac{k^2 R^3 \rho}{6if^2} \times \\ &\times {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}, 2; -\frac{(k\rho R)^2}{4f^2}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Если оставить в правой части (8) только первые два члена и приравнять производную нулю, то получим оценку для радиуса фокального кольца:

$$\hat{\rho}_d = \frac{2\sqrt{10}f}{3Rk} \approx \frac{0,336\lambda}{NA}.$$

При точном расчёте гипергеометрической функции (например, в Matlab) или вычислении интеграла в (8) методом прямоугольников получается большее значение (рис. 1):

$$\rho_d = \frac{0,39\lambda}{NA}. \quad (9)$$

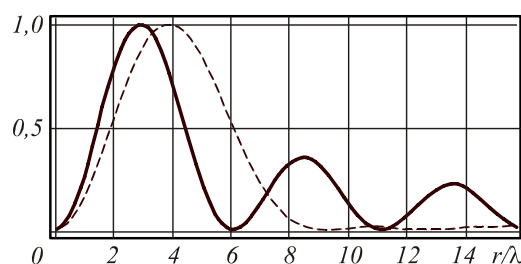


Рис. 1. Результаты расчёта нормированной интенсивности для выражения (8) (пунктирная линия) и выражения (11) (сплошная линия) при  $NA = 0,1$

Уменьшить размер светового кольца можно также наложением узкой кольцевой диафрагмы, пропускающей только периферийные лучи:

$$\begin{aligned} E_1(\rho, \varphi) &= \frac{k}{if} \exp(ikf) \exp(i\varphi) \int_{R-\delta}^R J_1\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr \approx \\ &\approx \exp(ikf) \exp(i\varphi) \frac{kR\delta}{if} J_1\left(\frac{k\rho R}{f}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае радиус светового кольца определяется по максимальному значению функции Бесселя первого порядка:

$$\rho_{d\delta} = \frac{1,84f}{kR} \approx \frac{0,293\lambda}{NA}. \quad (11)$$

Уменьшение размера также достигается за счёт потери энергии в центральном кольце, а следовательно, за счёт уменьшения интенсивности светового барьера. Однако компактность световой воронки может быть более важной характеристикой, чем её глубина.

Из приведённых выше выкладок следует, что скалярный дифракционный предел ( $NA = 1$ ) для светового кольца при использовании безаберрационной полноапертурной фокусирующей системы по радиусу равен  $\rho_d \approx 0,39\lambda$  (этой же величине равен внутренний диаметр кольца по полуспаду интенсивности), а при использовании узкой кольцевой апертуры  $\rho_{d\delta} \approx 0,29\lambda$ .

Таким образом, дифракционный предел для светового кольца меньше, чем для светового пятна.

Достичь скалярного предела при использовании фокусирующих систем с высокой числовой апертурой проблематично из-за вклада в фокальную область различных компонент электрического поля [4, 5]. Для решения этой проблемы используют поляризации специальных типов, позволяющие максимизировать вклад одной из компонент. Например, при использовании радиальной поляризации можно достичь скалярного предела для светового пятна использованием узкой кольцевой апертуры [1, 2] или введением более энергетически выгодных полноапертурных пропускающих функций [3-7, 11, 14, 15]. Для полноапертурной аподизации наиболее простыми в реализации являются дополнение фокусирующей системы фазовыми оптическими элементами [3-5, 14, 15] и фокусировка мод лазерного излучения высоких порядков [6, 7]. В последнем случае распределение на выходном зрачке системы представимо в полиномиальном виде. Далее рассматривается возможность минимизации поперечного фокального размера с помощью полиномов невысокого порядка при выполнении определённых условий, в том числе сохранения энергетической эффективности или обеспечения заданного уровня боковых лепестков.

**2. Модель фокусирующей системы с высокой числовой апертурой в приближении Дебая**

Для фокусирующей оптической системы с высокой числовой апертурой векторное электрическое поле в однородной диэлектрической среде вблизи фокуса можно описать в приближении Дебая [16], которое верно, если фокусное расстояние оптической системы значительно превышает длину волны:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_0^{\Theta} \int_0^{2\pi} B(\theta, \phi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \phi) \times \exp[ik(\rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi) + z \cos \theta)] \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \tag{12}$$

где  $(\rho, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты фокальной области,  $(\theta, \phi)$  – сферические угловые координаты выходного зрачка фокусирующей системы,  $\Theta$  – максимальное значение азимутального угла, связанное с числовой апертурой системы,  $B(\theta, \phi)$  – функция пропускания,  $T(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$  – функция аподизации зрачка для апланатических систем,  $\mathbf{P}(\theta, \phi)$  – матрица поляризации,  $f$  – фокусное расстояние.

Рассмотрим острую фокусировку лазерных пучков с различной поляризацией при использовании в качестве функции пропускания  $B(\theta, \phi)$  суперпозиции следующего вида:

$$B_m(\theta, \phi) = \exp(im\phi) \sum_{s=0}^S c_s \sin^s \theta, \tag{13}$$

где  $c_s$  – коэффициенты полинома при фиксированном значении вихревого порядка  $m$ .

Такой вид освещающего пучка для распространённых типов поляризации позволяет значительно упростить выражение (12).

Тогда векторное электрическое поле в фокальной области вычисляется с использованием одномерного интеграла [4]:

$$\mathbf{E}_m(\rho, \varphi, z) = -ikf \int_0^{\Theta} \mathbf{Q}_m(\rho, \varphi, \theta) q(\theta) \, d\theta, \tag{14}$$

где  $q(\theta) = \exp(ikz \cos \theta) \sqrt{\cos \theta} \sum_{s=0}^S c_s \sin^{s+1} \theta$ ,

а вид  $\mathbf{Q}_m(\rho, \varphi, \theta)$  зависит от поляризации входного поля.

**3. Оптимизация пропускающей функции фокусирующей системы**

После выбора определённого типа поляризации и номера вихревой фазовой зависимости  $m$  оптимизация коэффициентов в суперпозиции (13) выполнялась на основе минимизации функционала, связывающего интенсивность выходного распределения (14) и целевую функцию  $T(\rho, \varphi)$  в области фокусировки:

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \mathbf{E}_m(\rho, \varphi, z=0) \right|^2; T(\rho, \varphi) \right\} \xrightarrow{c_s} \min. \tag{15}$$

Целевая функция представляет собой суперпозицию функций, выражающих условия, которым должно удовлетворять распределение интенсивности в фокальной плоскости. В частности, это условия концентрации интенсивности в определённой области или штрафа за превышение значений нормированной интенсивности заданного порога на некотором интервале.

Если рассмотреть функционал (15) для фиксированного значения полярного угла  $\varphi$ , то участвующие в нём функции будут зависеть только от радиуса и можно наглядно показать наложение условий на полученное в (14) распределение интенсивности (рис. 2). Для достижения определённого компромисса между уменьшением размера фокального пятна и подавлением боковых лепестков нужно наложить условие концентрации энергии в фокальной плоскости в круге радиусом  $\rho_e$  и обеспечения в кольце с радиусами  $[\rho_e, \rho_\Delta]$  заданного уровня  $\mu$  боковых лепестков. В области радиусом более  $\rho_\Delta$  распределение интенсивности не контролируется.

Минимизация функционала (14) при фиксированном значении полярного угла  $\varphi$  выполнялась методом Брента [12]. Программный модуль, реали-

зующий данный метод, был взят на открытом ресурсе ALGLIB [17].

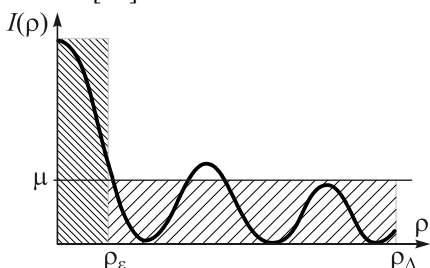


Рис. 2. Иллюстрация целевой функции в фокальной области при фиксированном значении полярного угла φ

$$E_m(\rho, \varphi, z) = -i^{m+1} k f \exp(im\varphi) \int_0^\Theta \begin{bmatrix} \frac{i}{2} [e^{i\vartheta} J_{m+1}(k\rho \sin \theta) - e^{-i\vartheta} J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] \cos \theta \\ \frac{1}{2} [e^{i\vartheta} J_{m+1}(k\rho \sin \theta) + e^{-i\vartheta} J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] \cos \theta \\ -J_m(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix} q(\theta) d\theta. \quad (16)$$

Как видно из (16), при  $m=0$  вклад продольной компоненты в суммарную интенсивность на оптической оси является максимальным, однако на размер формируемого фокального пятна влияют также поперечные компоненты, которые вносят свой вклад вблизи оптической оси (табл. 1, строка 1).

При использовании узкой кольцевой диафрагмы [1,2] с радиусом, близким к радиусу фокусирующей линзы, и относительной шириной  $\delta$  (нормированной на радиус апертуры) вклад поперечных компонент минимизируется и интенсивность в фокальной области будет определяться только продольной компонентой [7]:

$$|E_0^z(\rho, \varphi, z=0)|^2 \sim \delta^{3/2} J_0^2(k\rho), \quad (17)$$

откуда следует, что радиус центрального светового пятна будет  $\rho_\delta \approx 0,38\lambda$ , что соответствует скалярному пределу (4). Интенсивность в нём будет очень мала, т.к. относительная ширина кольцевой апертуры  $\delta \ll 1$  (табл. 1, строка 2).

Если ввести фазовый скачок на  $\pi$  радиан по среднему радиусу узкой кольцевой апертуры (это соответствует введению суперпозиции двух деструктивно интерферирующих пучков):

$$\tau(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \Theta - \delta, \\ 1, & \Theta - \delta < \theta < \Theta - \delta/2, \\ \exp(i\pi), & \theta \geq \Theta - \delta/2, \end{cases} \quad (18)$$

то получим следующее распределение в фокальной плоскости для продольной (основной) компоненты ( $NA=1$ ):

$$\begin{aligned} E_0^z(\rho, \varphi, z=0) &= \\ &= ikf \int_0^\Theta \tau(\theta) J_m(k\rho \sin \theta) \sin^2 \theta \sqrt{\cos \theta} d\theta = \\ &= ikf \int_0^{\arcsin \Theta} \tau(x) x^2 (1-x^2)^{-1/4} J_0(k\rho x) dx \approx \end{aligned}$$

#### 4. Радиальная поляризация

##### 4.1. Минимизация светового пятна

Известно [1 - 4, 6], что при радиальной поляризации обеспечивается наименьший поперечный размер фокального пятна, связанный с максимизацией вклада продольной компоненты в суммарную интенсивность на оптической оси.

При радиальной поляризации излучения поле (14) в зависимости от содержащейся в лазерном пучке вихревой составляющей  $\exp(im\varphi)$  принимает вид (для декартовых компонент):

$$\begin{aligned} &\approx 2^{1/4} \delta^{3/4} \left[ 3^{-1/4} J_0 \left( k\rho \left( 1 - \frac{3\delta}{4} \right) \right) - \right. \\ &\left. - J_0 \left( k\rho \left( 1 - \frac{\delta}{4} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$


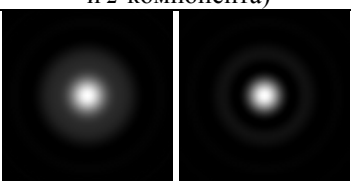
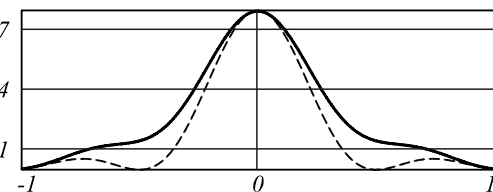

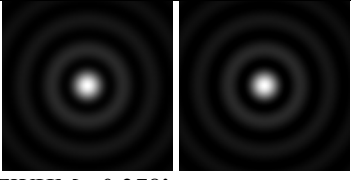
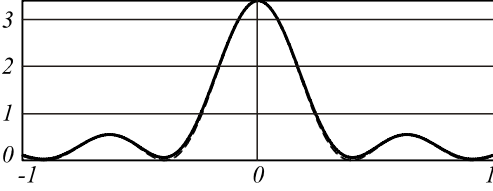
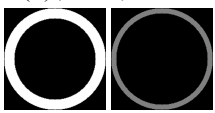
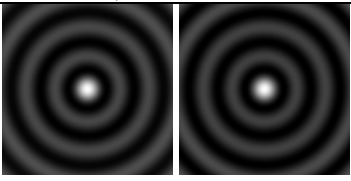
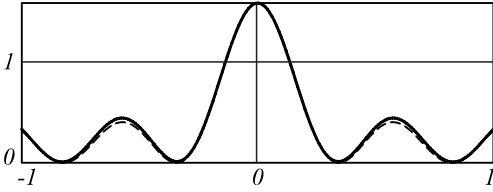
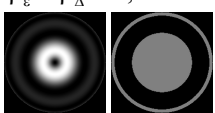
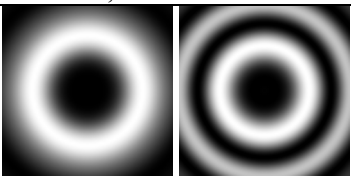
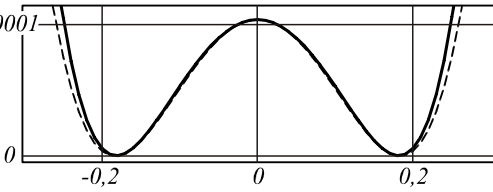
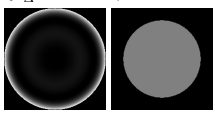
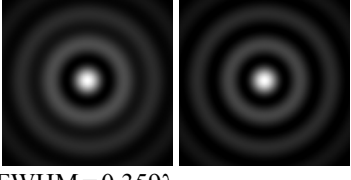
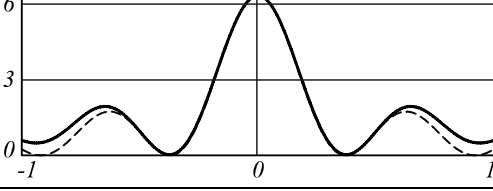
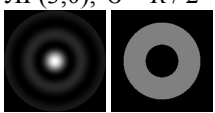
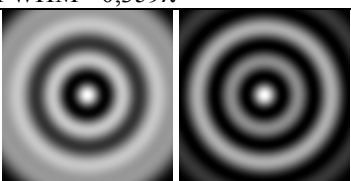
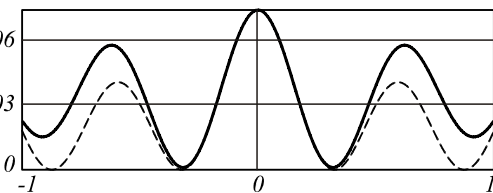
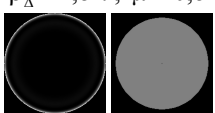
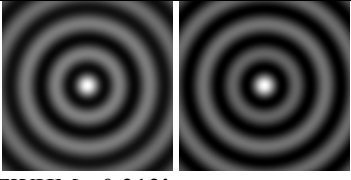
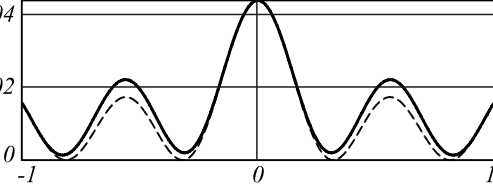
Из выражения (19) видно, что в центре фокальной области будет ненулевое значение. Оценить радиус (до нулевого значения) этого слабого светового пятна можно, используя аппроксимацию функции Бесселя:

$$\rho_{\delta ph} \approx \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{0,288 + 0,72\delta}{0,288 + 1,488\delta}}. \quad (20)$$

При уменьшении ширины кольцевой диафрагмы получим предельное значение, меньшее скалярного предела (4):  $\rho_{\delta ph} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \lambda/\pi \approx 0,318\lambda$ . Заметим, что формула (20) предсказывает ещё меньший размер при увеличении ширины диафрагмы, но в этом случае перестаёт работать приближение, при котором получено данное выражение. В табл. 1 (строка 3) приведены результаты использования кольцевой диафрагмы шириной  $\delta = 0,2$  с внесением кольцевого фазового скачка на  $\pi$  радиан вдоль среднего радиуса диафрагмы. Видно, что размер светового пятна уменьшается до  $FWHM = 0,329\lambda$  при некотором росте боковых лепестков, уровень интенсивности которых, однако, составляет менее 30% от главного пика. Такие боковые лепестки могут быть эффективно отфильтрованы [18, 19]. Заметим также, что влияние боковых лепестков, если их интенсивность ниже определённого уровня, может нивелироваться при нелинейном взаимодействии света с носителями записи [20].

В случае использования полноапертурной функции пропускания, имеющей степенную зависимость от радиальной координаты, продольная компонента будет иметь следующий вид:

Таблица 1. Результаты численного моделирования для пучка с радиальной поляризацией без вихревых составляющих ( $m = 0$ )

Функция пропускания (амплитуда и фаза)	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$ (общая и z-компонента)	Сечение поперечной интенсивности: общая (сплошная линия) и z-компонента (пунктирная линия)
$B(\theta, \phi) = \text{const}$ 	 FWHM = 0,544 $\lambda$ , FWHM <sub>z</sub> = 0,45 $\lambda$	
$\delta = 0,05$ 	 FWHM = 0,378 $\lambda$	
$\tau(\theta)$ , $\delta = 0,2$ 	 FWHM = 0,329 $\lambda$	
$\rho_\varepsilon = \rho_\Delta = 0,05\lambda$ 	 FWHM = 0,203 $\lambda$	
$\rho_\varepsilon = 0,05\lambda$ , $\rho_\Delta = 2\lambda$ , $\mu = 0,3$ 	 FWHM = 0,359 $\lambda$	
ЛГ(3,0), $\sigma = R/2$ 	 FWHM = 0,317 $\lambda$	
$\rho_\varepsilon = 0,05\lambda$ , $\rho_\Delta = 1,5\lambda$ , $\mu = 0,5$ 	 FWHM = 0,313 $\lambda$	

$$E_0^z(\rho, \varphi, z=0) = ikf \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{s+2} J_0(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \quad (21)$$

Тогда интенсивность вблизи оптической оси приближённо описывается выражением [7]:

$$I_0^z(\rho, \varphi, z=0) \approx \left\{ \frac{kf \Gamma(3/4) \Gamma((s+3)/2)}{2 \Gamma((s+3)/2 + 3/4)} \right\}^2 \times \left[ 1 - \frac{(s+3)}{(s+3) + 3/2} \left( \frac{k\rho}{2} \right)^2 \right]^2, \quad (22)$$

откуда следует, что радиус центрального светового пятна определяется степенью  $s$ :

$$\rho_s = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 + \frac{3}{2(s+3)}}. \tag{23}$$

С ростом степени  $s$  радиус центрального светового пятна будет стремиться к значению  $\rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \lambda / \pi \approx 0,32\lambda$ .

Таким образом, использование полноапертурной степенной функции позволит уменьшить размер светового пятна сильнее, чем введение узкой кольцевой диафрагмы ( $\rho_s \approx 0,38\lambda$ ), достигнув практически такого же размера пятна, как и при введении кольцевого фазового скачка ( $\rho_{opt} \approx 0,38\lambda$ ).

Однако такой эффект достигается бесконечным увеличением степени  $s$ , что фактически приводит к концентрации энергии освещающего пучка по периферийной части линзы. Таким образом, происходит аппроксимация степенной функцией узкой кольцевой диафрагмы.

Рассмотрим другой подход к уменьшению центрального пятна – за счёт деструктивной интерференции. В этом случае в суперпозиции (13) нужно выбрать коэффициенты специальным образом [3].

Для  $m=0$  выражение (16) при использовании суперпозиции (13) принимает в фокальной плоскости следующий вид:

$$E_0(\rho, \varphi, z=0) = \begin{bmatrix} [\Gamma(1/4)/16] k\rho \cos\varphi \sum_{s=0}^S c_s \Phi_s^x(k\rho) \\ kf \left[ [\Gamma(1/4)/16] k\rho \sin\varphi \sum_{s=0}^S c_s \Phi_s^y(k\rho) \right. \\ \left. i[\Gamma(3/4)/2] \sum_{s=0}^S c_s \Phi_s^z(k\rho) \right] \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_s^x(t) = \Phi_s^y(t) &= \frac{\Gamma((s+3)/2)}{\Gamma((2s+11)/4)} \times \\ &\times {}_1F_2\left(\frac{s+3}{2}; \frac{2s+11}{4}, 2; -\frac{t^2}{4}\right), \\ \Phi_s^z(t) &= \frac{\Gamma((s+3)/2)}{\Gamma((2s+9)/4)} \times \\ &\times {}_1F_2\left(\frac{s+3}{2}; \frac{2s+9}{4}, 1; -\frac{t^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Если расписать несколько первых членов по  $s$  в (24), например, для поперечных компонент:

$$\begin{aligned} E_0^{x,y}(\rho, \varphi, z=0) &= k^2 \rho f \frac{\Gamma(1/4)}{16} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \times \\ &\times \left\{ \frac{c_0 \Gamma(3/2)}{\Gamma(11/4)} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{c_1 \Gamma(2)}{\Gamma(13/4)} {}_1F_2\left(2; \frac{13}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. + \frac{c_2 \Gamma(5/2)}{\Gamma(15/4)} {}_1F_2\left(\frac{5}{2}; \frac{15}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{c_3 \Gamma(3)}{\Gamma(17/4)} {}_1F_2\left(3; \frac{17}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

то становится ясно, что имеется схожая зависимость для слагаемых одинаковой чётности. В этом случае для полиномов Цернике выражения будут более простыми [7].

В присутствии только нулевой и второй степени радиального полинома вблизи оптической оси можно записать:

$$\begin{aligned} E_0^{x,y}(\rho \rightarrow 0, \varphi, z=0) &\approx k^2 f \rho \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \frac{c_0 \Gamma(1/4)}{16} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(11/4)} \times \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{6c_2}{11c_0}\right) - \frac{3}{22} \left(1 + \frac{2c_2}{3c_0}\right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{66} \left(1 + \frac{14c_2}{19c_0}\right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2}\right)^2 \right\}, \\ E_z^0(\rho \rightarrow 0, \varphi, z=0) &\approx ikf \frac{c_0 \Gamma(3/4)}{2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(9/4)} \times \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{2c_2}{3c_0}\right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{15 \cdot 2c_2}{13 \cdot 3c_0}\right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{5}{13 \cdot 24} \left(1 + \frac{21 \cdot 2c_2}{17 \cdot 3c_0}\right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2}\right)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Из выражений (25) видно, что в фокусе ( $\rho = 0$ ) при  $c_2 = -3c_0/2$  вклад продольной компоненты обнуляется. Вклад же поперечных компонент обнуляется при  $c_2 = -11c_0/6$ . Таким образом, полином Цернике (2, 0), у которого  $c_2 = -2c_0$ , будет почти оптимальным для максимизации вклада продольной компоненты [7].

Аналитические выкладки для большого числа слагаемых становятся трудоёмкими, поэтому проще воспользоваться численной процедурой оптимизации коэффициентов при удовлетворении определённых условий.

В частности, размеры фокального пятна можно сколь угодно уменьшить за счёт многократного роста боковых лепестков и ухода практически всей энергии из фокуса [21, 22] (табл. 1, строка 4). Для достижения компромисса между уменьшением размера фокального пятна и удержанием энергии в центре наложим условие концентрации энергии в фокальной плоскости в круге радиусом  $\rho_\epsilon$  и обеспечения в кольце с радиусами  $[\rho_\epsilon, \rho_\Delta]$  заданного уровня  $\mu$  боковых лепестков (рис. 2).

Минимизация соответствующего функционала (15) за счёт подбора коэффициентов в (13) выполнялась методом Брента [12]. За пределами радиуса  $\rho_\Delta$  уровень интенсивности не контролируется и может существенно превышать значение в центре. Увели-

чение области контроля, как правило, вместе с уменьшением потери энергии приводит к укрупнению размера фокального пятна.

В строке 5 табл. 1 показаны результаты использования полноапертурной пропускающей функции в виде полинома третьего порядка с коэффициентами, подобранными так, чтобы концентрировать энергию в круге радиусом  $\rho_e \rho_c = 0,05\lambda = 0,05$  и удерживать уровень боковых лепестков в кольце с радиусами  $[0,05\lambda, 2\lambda]$  не выше  $\mu = 0,3$  от значения в фокальном пятне. В этом случае размер полученного фокального пятна меньше, чем при использовании узкой кольцевой апертуры, а интенсивность в фокусе в 2 раза выше.

В работе [6] было предложено для уменьшения размеров фокального пятна использовать пропускающие функции, пропорциональные модам Лагерра-Гаусса (ЛГ). Результаты фокусировки для ЛГ-мод зависят от радиуса перетяжки и радиального номера моды. Причём увеличение номера моды не обязательно приводит к уменьшению размера фокального пятна. В частности, для  $\sigma=R/2$  были получены следующие результаты: FWHM=0,437 $\lambda$  (для радиального номера ЛГ моды  $n=1$ ), FWHM=0,875 $\lambda$  ( $n=2$ ), FWHM=0,317 $\lambda$  ( $n=3$  – табл. 1, строка 6), FWHM=0,384 $\lambda$  ( $n=4$ ), FWHM=0,475 $\lambda$  ( $n=5$ ).

В этом случае также происходит значительный рост боковых лепестков, который в общей интенсивности приближается к уровню  $\mu=0,86$  от максимума (табл. 1, строка 6).

Результат для ЛГ-мод можно улучшить по уровню боковых лепестков до  $\mu=0,5$  при сохранении того же размера фокального пятна (FWHM=0,313 $\lambda$ ) применением оптимизационного алгоритма к суперпозиции (13) – табл. 1, строка 7.

4.2. Минимизация радиуса светового кольца

При наличии вихревых составляющих первого порядка ( $|m|=1$ ) при радиальной поляризации поперечные компоненты уже будут иметь ненулевые значения на оптической оси, а продольная компонента, наоборот, примет кольцевое распределение [7]. При этом вклад продольной компоненты в общую интенсивность сравним с вкладом поперечных компонент. Это особенно важно учитывать при взаимодействии излучения со средами, избирательно чувствительными к различным компонентам электрического вектора [23].

Для продольной компоненты будет формироваться распределение вида:

$$E_z(\rho, \varphi, z=0) = -kf \exp(i\varphi) \times \int_0^{\pi/2} \sum_{s=0}^s c_s \cdot (\sin \theta)^{s+2} J_1(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \tag{26}$$

Для чётных степеней синуса ( $s = 2l$ ) воспользуемся формулой [24]:

$$\int_0^1 x^{2l+2} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{1}{2} (2)_l \Gamma(3/4) \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{l+3/4} \times \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{(2)_k} \binom{l}{k} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^k J_{k+l+7/4}(k\rho), \tag{27}$$

а для нечётных ( $s = 2l+1$ ) нужно применить более общую формулу [24]:

$$\int_0^1 x^{s+1} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{k\rho}{4} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma((s+3)/2)}{\Gamma(s/2+9/4)} \times {}_1F_2\left(\frac{s+3}{2}; \frac{s}{2} + \frac{9}{4}, 2; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right). \tag{28}$$

При отсутствии каких-либо пропускающих функций (что соответствует  $l=0$ ):

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{1}{2} \Gamma(3/4) \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{3/4} J_{7/4}(k\rho). \tag{29}$$

Используя аппроксимацию бесселевой функции при малых значениях аргумента:

$$J_\nu(x \rightarrow 0) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[1 - \frac{x^2}{4(\nu+1)}\right], \tag{30}$$

можно оценить правую часть выражения (29) вблизи оптической оси как  $\frac{4k\rho}{21} \left[1 - \frac{(k\rho)^2}{11}\right]$ . Радиус тёмного

пятна можно приближённо определить, приравняв производную по  $\rho$  нулю:

$$\rho_{0d} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{11}{3}} \approx 0,305\lambda. \tag{31}$$

Для нечётных степеней  $s$  также можно приближённо оценить правую часть выражения (28). Для области вблизи оптической оси можно записать:

$${}_1F_2\left(\frac{s+3}{2}; \frac{2s+9}{4}, 2; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right) \approx 1 - \frac{s+3}{2s+9} \cdot \frac{(k\rho)^2}{4}$$

и определить радиус тёмного пятна:

$$\rho_s \approx \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2s+9}{3s+9}}. \tag{32}$$

Как видно из (32), с ростом  $s$  радиус тёмного пятна будет уменьшаться до предельного значения

$\rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda}{\pi} \approx 0,26\lambda$ . Однако при использовании суперпозиции (13) можно достичь лучшего результата при небольших значениях степени полинома  $s$  за счёт взаимной интерференции.

При наложении узкой кольцевой диафрагмы выражение (26) примет простой вид, не зависящий от радиальных полиномов:

$$\sum_{s=0}^S c_s \int_{1-\delta}^1 x^{s+2} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx \approx \frac{4\delta^{3/4}}{3 \cdot (2)^{1/4}} J_1(k\rho). \tag{33}$$

В этом случае радиус тёмного пятна будет  $\rho_{\delta d} \approx 0,29\lambda$ .

Таким образом, пятно будет меньше, чем при использовании обычной полноапертурной фокусирующей системы, но больше, чем можно достичь введением радиальных полиномов.

В табл. 2 приведены результаты численного моделирования для пучка с радиальной поляризацией, содержащего вихревую фазу первого порядка. Параметр FWHM в данном случае соответствует размеру теневой области по полуспаду от максимума интенсивности на внутренних склонах светового барьера.

Таблица 2. Результаты численного моделирования для пучка с радиальной поляризацией, содержащего вихревую фазу первого порядка ( $m = 1$ )

Функция пропускания, $B(\theta, \phi)$	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$ (общая и z-компонента)	Сечение поперечной интенсивности: общая (сплошная линия) и z-компонента (пунктирная линия)
$\exp(i\phi)$ 	 FWHM <sub>z</sub> = 0,352λ	
$\exp(i\phi), \delta = 0,05$ 	 FWHM <sub>z</sub> = 0,3λ	
$\rho_\epsilon = 0,1\lambda,$ $\rho_\Delta = 2\lambda, \mu = 0,3$ 	 FWHM <sub>z</sub> = 0,308λ	
$\rho_\epsilon = 0,2\lambda,$ $\rho_\Delta = 1,2\lambda, \mu = 0,9$ 	 FWHM <sub>z</sub> = 0,28λ, FWHM <sub>z</sub> = 0,28λ	

Как видно из приведённых результатов, наличие поперечных компонент мешает получить «чистый» результат в общей интенсивности (табл. 2, строка 1).

При использовании узкой кольцевой диафрагмы достигается минимальное световое кольцо, при этом в общей интенсивности вклад поперечных компонент минимален (табл. 2, строка 2). Однако наблюдается существенная потеря энергии.

При использовании полиномов можно достичь компромисса между уменьшением размера светового кольца и потерей энергии в центральной части: в строке 3 табл. 2 приведён результат для светового кольца, близкого к минимальному, но с интенсивностью в 2,5 раза выше.

Как правило, уменьшение фокального пятна достигается за счёт концентрации энергии в периферийной части линзы (аппроксимация узкой кольцевой щели) или деструктивной интерференции пучков, формируемых различными зонами линзы (аналогично диафрагме с фазовым скачком, выражение (18)). В первом случае для формирования всё более узкой щели необходимо увеличение степени полинома. Во втором случае можно разбить зрачок линзы на радиальные зоны и в каждой рассматривать полиномы невысокой степени. В строке 4 табл. 2 приведены результаты оптимизации функции зрачка, имеющей три зоны – центральную (экранирующую) небольшого радиуса и две содержащие поли-



номы третьей степени. В этом случае уменьшение размеров фокального кольца достигается более эффективно, но по-прежнему за счёт роста боковых лепестков, которые удерживались на уровне не выше  $\mu = 0,9$  в радиусе  $\rho_\Delta = 1,2\lambda$ . Заметим, что для теневого фокального пятна наличие боковых лепестков не столь важно, как для светового пятна, т.к.

$$E_m(\rho, \varphi, z) = -i^{m+1}kf \exp(im\varphi) \int_0^\varphi \left[ \frac{1}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(k\rho \sin \theta) + e^{-i\varphi} J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] - \frac{i}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(k\rho \sin \theta) - e^{-i\varphi} J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] \right] q(\theta) d\theta, \quad (33)$$

откуда видно, что z-компонента при любом значении m равна нулю.

На оптической оси (при  $\rho = 0$ ) электрическое поле при острой фокусировке будет содержать ненулевые компоненты только для одного порядка сингулярности  $|m|=1$ . Для всех остальных значений  $|m| \neq 1$  в осевых точках будет формироваться абсолютный ноль интенсивности, т.к. все компоненты равны нулю. Поэтому данную поляризацию удобнее всего использовать для формирования теневого пятна (табл. 3, строка 1).

При  $m = 0$  с учётом (13) выражение (33) сводится к компактному виду:

$$E_0(\rho, \varphi, z = 0) = kf \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \int_0^{\pi/2} \sum_{s=0}^s c_s \cdot (\sin \theta)^{s+1} J_1(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \quad (34)$$

Интегралы в (34) можно взять с использованием гипергеометрических функций, анализ которых [7] показывает, что радиус формируемого светового кольца зависит от степени s, но имеет предельное значение  $\rho_{\min} \approx 0,26\lambda$  (оценка снизу).

При наложении узкой кольцевой диафрагмы интеграл в выражении (34) примет простой вид, не зависящий от полиномов:

$$\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2} J_1(k\rho \sin \theta) \sin \theta (\cos \theta)^{1/2} d\theta \sim \delta^{3/4} J_1(k\rho), \quad (35)$$

т.е. радиус светового кольца определяется первым максимумом функции Бесселя первого порядка  $\rho_\delta \approx 0,293\lambda$ , что соответствует скалярному пределу (9) (табл. 3, строка 2). Интенсивность фокального кольца будет падать с уменьшением ширины кольцевой диафрагмы  $\delta$ .

Также внесение дополнительного кольцевого фазового скачка на  $\pi$  радиан вдоль среднего радиуса диафрагмы позволяет уменьшить размер светового кольца до  $FWHM = 0,329\lambda$  за счёт дальнейшего уменьшения интенсивности в этом кольце (табл. 3, строка 3).

При использовании суперпозиции (13) можно попытаться достичь компромисса между уменьше-

функциональной зоной является область внутри светового барьера.

### 5. Азимутальная поляризация

При азимутальной поляризации поле в фокальной плоскости ( $z = 0$ ) будет выглядеть следующим образом:

нием размера светового кольца и потерей энергии в центральной части. Для этого, в частности, можно удерживать невысокую интенсивность боковых лепестков относительно значения на центральном световом кольце в достаточно широкой области (табл. 3, строка 4).

Если позволить боковым лепесткам подниматься до уровня интенсивности на центральном кольце (табл. 3, строка 5), то можно преодолеть дифракционный предел при уровне интенсивности на центральном кольце в 2 раза выше, чем при использовании узкой кольцевой апертуры.

Ещё сильнее уменьшить центральное световое кольцо можно только за счёт значительной потери энергии (табл. 3, строка 6).

### 6. Круговая поляризация

Этот тип поляризации привлекателен простотой получения из линейной поляризации, характерной для большинства источников лазерного излучения. Здесь не требуются сложные или дорогостоящие устройства, как в предыдущих двух случаях радиальной и азимутальной поляризации.



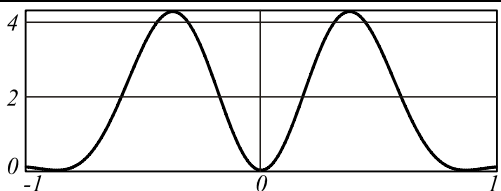

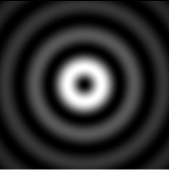
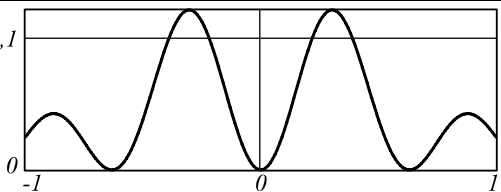


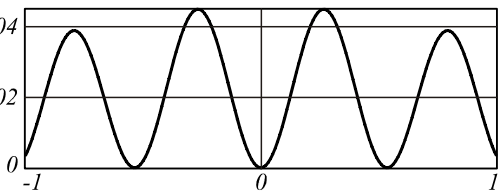

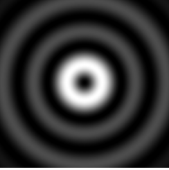
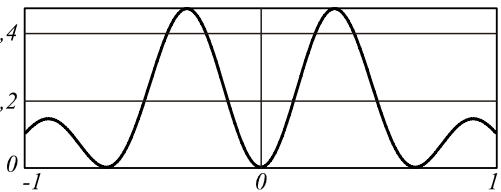
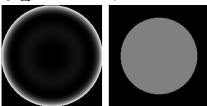

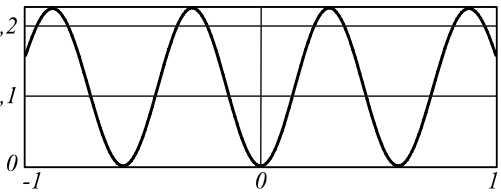
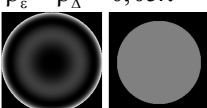
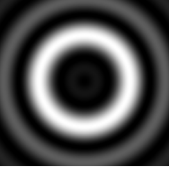
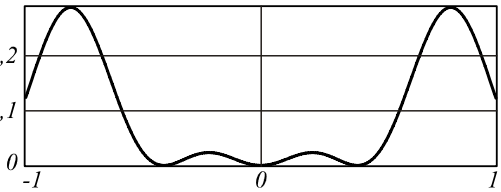
В случае круговой поляризации имеется зависимость соответствия знака поляризации и знака вихревого порядка. При значениях вихревого порядка  $|m| \leq 2$  с противоположным поляризации знаком будут в наличии компоненты с ненулевыми значениями на оптической оси ( $\rho = 0$ ). Этот факт будет негативно сказываться на попытках получить кольцевое распределение в общей интенсивности.

Рассмотрим для определённости случай круговой «+»-поляризации. Тогда при  $m = 0$  и  $m = -2$  в поперечных компонентах будет ненулевое значение на оптической оси, а в продольной компоненте будет иметь место световое кольцо. Причём при  $m = -2$  энергия поперечных компонент на оси меньше, чем при  $m = 0$ . При  $m = -1$  будет обратная ситуация, но для высокоапертурных фокусирующих систем, как правило, вклад продольной компоненты большой. Поэтому при необходимости формировать теневое пятно удобнее использовать вариант с  $m = -2$ . Тогда поле в фокальной области будет иметь следующий вид:

$$E(\rho, \varphi, z=0) = \frac{-kf}{2} \int_0^{\pi/2} \sum_{s=0}^S c_s \cdot (\sin \theta)^{s+1} \left[ \begin{array}{l} e^{-i2\varphi} J_{-2}(t) + \frac{1}{2} [e^{-i2\varphi} J_{-2}(t) - J_0(t)] (\cos \theta - 1) \\ i \left\{ e^{-i2\varphi} J_{-2}(t) + \frac{1}{2} [e^{-i2\varphi} J_{-2}(t) + J_0(t)] (\cos \theta - 1) \right\} \\ -ie^{-i\varphi} J_{-1}(t) \sin \theta \end{array} \right] (\cos \theta)^{1/2} d\theta, \quad (36)$$

где  $t = k\rho \sin \theta$ .

Таблица 3. Результаты численного моделирования для пучка с азимутальной поляризацией без вихревых составляющих ( $m = 0$ )

Функция пропускания (амплитуда и фаза)	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$	Сечение поперечной интенсивности
$B(\theta, \varphi) = \text{const}$ 	 FWHM = 0,37λ	
ring(θ), $\delta = 0,05R$ 	 FWHM = 0,298λ	
ring(θ)τ(θ), $\delta = 0,2R$ 	 FWHM = 0,264λ	
$\rho_\epsilon = 0,05\lambda$ , $\rho_\Delta = 2\lambda$ , $\mu = 0,3$ 	 FWHM = 0,31λ	
$\rho_\epsilon = 0,05\lambda$ , $\rho_\Delta = 2\lambda$ , $\mu = 1$ 	 FWHM = 0,284λ	
$\rho_\epsilon = \rho_\Delta = 0,05\lambda$ 	 FWHM = 0,22λ	

При использовании узкой кольцевой диафрагмы для продольной компоненты результат будет таким же, как в (32). Однако вклад поперечных компонент, имеющих ненулевое значение в фокусе, становится тоже большим. В результате кольцевая структура в общей интенсивности становится более размытой,

чем для полноапертурного случая – сравните первую и вторую строку в табл. 4. Применение оптимизирующей процедуры лишь немного улучшает ситуацию по сравнению с отсутствием какой-либо дополнительной аподизации выходного зрачка фокусирующей системы (третья строка в табл. 4).

Таким образом, получить в общей интенсивности выраженное световое кольцо не удаётся. Поэтому рассмотрим случай круговой «+»-поляризации в присутствии оптического вихря первого порядка с тем же знаком:

$$E(\rho, \varphi, z = 0) = \frac{ikf}{2} \int_0^{\pi/2} \sum_{s=0}^S c_s \cdot (\sin \theta)^{s+1} \left[ \begin{array}{l} e^{i\varphi} J_1(t) + \frac{1}{2} [e^{i\varphi} J_1(t) - e^{i3\varphi} J_3(t)] (\cos \theta - 1) \\ i \left\{ e^{i\varphi} J_1(t) + \frac{1}{2} [e^{i\varphi} J_1(t) + e^{i3\varphi} J_3(t)] (\cos \theta - 1) \right\} (\cos \theta)^{1/2} d\theta, \\ -ie^{i2\varphi} J_2(t) \sin \theta \end{array} \right] \quad (37)$$

где  $t = k\rho \sin \theta$ .

Таблица 4. Результаты численного моделирования для круговой «+»-поляризации в присутствии оптического вихря второго порядка ( $m = -2$ )

Функция пропускания, $B(\theta, \varphi)$	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$ (общая и z-компонента)	Сечение поперечной интенсивности: общая (сплошная линия) и z-компонента (пунктирная линия)
$\exp(-i2\varphi)$ 	 FWHM = 0,38λ; FWHM <sub>z</sub> = 0,352λ	
$ring(\theta) \exp(-i2\varphi)$ , $\delta = 0,05R$ 	 FWHM <sub>z</sub> = 0,3λ	
$\rho_\epsilon = 0,3\lambda$ , $\rho_\Delta = 2\lambda$ , $\mu = 0,3$ 	 FWHM = 0,34λ; FWHM <sub>z</sub> = 0,34λ	

Из выражения (37) видно, что для поперечных компонент будет формироваться в общем случае световое кольцо меньшего радиуса, чем для продольной (табл. 5). Поэтому использование узкой кольцевой диафрагмы в этом случае неэффективно, т.к. это приведёт к выделению именно продольной компоненты (вторая строка табл. 5).

Использование суперпозиции (13) с коэффициентами, рассчитанными для минимизации светового кольца, позволяет уменьшить размер светового кольца в общей интенсивности (третья строка табл. 5), но результаты – не лучше полученных с азимутальной поляризацией.

Таким образом, для более распространённых и простых в реализации типов поляризации (круговой или линейной) получить оптимальные результаты можно только для отдельных компонент электрического поля – продольной или поперечных. В общей интенсивности эффект оптимизации ухудшается за счёт совместного вклада различных компонент. В этом случае нивелировать вклад нежелательной ком-

поненты возможно при использовании материалов, избирательно чувствительных к различным компонентам электрического поля [23].

### Заключение

В работе рассмотрены возможности минимизации светового и теневого фокального пятна при различных типах поляризации с контролируемым ростом боковых лепестков за счёт оптимальной аподизации фокусирующей системы. Рассматриваемая аподизация предусматривает внесение вихревой фазовой зависимости от угла и полиномиальной амплитудной зависимости от радиуса. При этом оптимизация коэффициентов в полиномиальной зависимости выполнялась методом Брента с целью сохранения энергетической эффективности и обеспечения заданного уровня боковых лепестков.

Исследования показали эффективность радиальной поляризации для формирования светового пятна минимального размера и азимутальной – для светового кольца.

Таблица 5. Результаты численного моделирования для круговой «+»-поляризации в присутствии оптического вихря первого порядка ( $m = 1$ )

Функция пропускания, $B(\theta, \phi)$	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$ (общая и $z$ -компонента)	Сечение поперечной интенсивности: общая (сплошная линия) и $z$ -компонента (пунктирная линия)
$\exp(i\phi)$ 	 FWHM = 0,436 $\lambda$ ; FWHM $_z$ = 0,74 $\lambda$	
$\text{ring}(\theta)\exp(i\phi)$ , $\delta = 0,05R$ 	 FWHM = 0,457 $\lambda$ ; FWHM $_z$ = 0,59 $\lambda$	
$\rho_e = 0,2\lambda$ , $\rho_\Delta = \lambda$ , $\mu = 0,3$ 	 FWHM = 0,38 $\lambda$ ; FWHM $_z$ = 0,66 $\lambda$	

В этом случае предел, предсказываемый скалярной теорией, достигается просто введением узкой кольцевой диафрагмы, блокирующей центральную часть фокусирующей системы. Для повышения эффективности можно использовать более широкую кольцевую диафрагму с радиальным фазовым скачком. Такой оптический элемент позволяет также получить фокальное пятно меньшего размера, чем предсказывает скалярная теория дифракции.

Существенно уменьшить световое или теневое фокальное пятно можно только за счёт ухода энергии в боковые лепестки. В этом случае для контроля роста интенсивности боковых лепестков в некоторой области рядом с фокальным пятном можно использовать амплитудное радиально-полиномиальное распределение (которое оптимизируется, например, методом Брента).

Достижение компромисса между уменьшением размера фокального пятна и удержанием энергии в центре зависит от размеров контролируемой фокальной области. За пределами контролируемой области уровень интенсивности может существенно превышать значение в центре. Однако увеличение области контроля, как правило, вместе с уменьшением потери энергии приводит к укрупнению размера фокального пятна. Таким образом, полученные результаты полностью согласуются с теорией Торалдо Ди Франция [21].

Для более распространённых и простых в реализации типов поляризации, в частности, круговой или линейной, получить аналогичные результаты можно только для отдельных компонент электрического поля – продольной или поперечных. В общей интен-

сивности эффект оптимизации ухудшается за счёт совместного вклада различных компонент. В этом случае нивелировать вклад нежелательной компоненты возможно при взаимодействии излучения со средами избирательно чувствительными к различным компонентам электрического поля.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9, а также государственных контрактов 07.514.11.4060, 07.514.11.4055 и 07.514.11.4105.

#### Литература

1. **Quabis, S.** Focusing light to a tighter spot / S. Quabis // Opt. Commun. – 2000. – V. 179. – P. 1-7.
2. **Dorn, R.** Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – P. 233901.
3. **Helseth, L.E.** Smallest focal hole / L.E. Helseth // Opt. Commun. – 2006. – V. 257. – P. 1-8.
4. **Хонина, С.Н.** Анализ возможности субволновой локализации света и углубления фокуса высокоапертурной фокусирующей системы при использовании вихревой фазовой функции пропускания / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – № 11. – С. 6-25.
5. **Хонина, С.Н.** Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 58-68.
6. **Kozawa, Y.** Sharper focal spot formed by higher-order radially polarized laser beams / Y. Kozawa and S. Sato // J. Opt. Soc. Am. A. – 2007. – V. 24. – P. 1793-1798.

7. **Хонина, С.Н.** Анализ влияния волновых aberrаций на уменьшение размеров фокального пятна в высоко-апертурных фокусирующих системах / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Е.А. Пелевина // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 203-219.
  8. **Artl, J.** Generation of a beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity: the optical bottle beam / J. Artl and M.J. Padgett // Opt. Lett. – 2000. – V. 25. – P. 191-193.
  9. **Hell, S.W.** Breaking the diffraction resolution limit by stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy / S.W. Hell and J. Wichmann // Opt. Lett. – 1994. – V. 19. – P. 780-782.
  10. **Biss, D.P.** Dark field imaging with cylindrical-vector beams / D.P. Biss, K.S. Youngworth and T.G. Brown // Appl. Opt. – 2006. – V. 45. – P. 470-479.
  11. **Khonina, S.N.** Influence of vortex transmission phase function on intensity distribution in the focal area of high-aperture focusing system / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy and S.G. Volotovskiy // Optical Memory and Neural Networks (Allerton Press). – 2011. – V. 20(1). – P. 23-42.
  12. **Brent, R.P.** Algorithms for Minimization Without derivatives / R.P. Brent. – Prentice-Hall, 1973. – 195 p.
  13. Handbook of Mathematical Functions / ed. by. M. Abramovitz, I.A. Stegun. – National Bureau of Standards, Applied Math. Series, 1965.
  14. **Zhan, Q.** Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Qiwen Zhan // Advances in Optics and Photonics. – 2009. – V. 1. – P. 1-57.
  15. **Khonina, S.N.** Optimization of focusing of linearly polarized light / S.N. Khonina and I. Golub // Opt. Lett. – 2011. – V. 36. – P. 352-354.
  16. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards and E. Wolf // Proc. R. Soc. London Ser. A. – 1959. – V. 253. – P. 358-379.
  17. <http://alglib.sources.ru/>
  18. **Sales, T.R.M.** Diffractive superresolution elements / T.R.M. Sales and G.M. Morris // J. Opt. Soc. Am. A. – 1997. – Vol. 14. – P. 1637.
  19. **Bewersdorf, J.** 4pi-confocal microscopy is coming of age / Joerg Bewersdorf, Alexander Egner, Stefan W. Hell // G.I.T. Imaging & Microscopy. – 2004. – Vol. 4. – P. 24-25.
  20. **Helseth, L.E.** Breaking the diffraction limit in nonlinear materials / L.E. Helseth // Opt. Commun. – 2005. – Vol. 256. – P. 435.
  21. **Toraldo di Francia, G.** Supergain antennas and optical resolving power / G. Toraldo di Francia // Nuovo Cimento, Suppl. – 1952. – Vol. 9. – P. 426.
  22. **Huang, F.M.** Super-resolution without evanescent waves / F.M. Huang and N.I. Zheludev // Nano Lett. – 2009. – Vol. 9. – P. 1249-1254.
  23. **Grosjean, T.** Photopolymers as vectorial sensors of the electric field / T. Grosjean and D. Courjon // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 6. – P. 2203-2210.
  24. **Prudnikov, A.P.** Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1990.
- Reference**
1. **Quabis, S.** Focusing light to a tighter spot / S. Quabis // Opt. Commun. – 2000. – V. 179. – P. 1-7.
  2. **Dorn, R.** Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – P. 233901.
  3. **Helseth, L.E.** Smallest focal hole / L.E. Helseth // Opt. Commun. – 2006. – V. 257. – P. 1-8.
  4. **Khonina, S.N.** Possibility Analysis of Subwavelength Light Localization and Focus Extending for High-Aperture Focusing System Using Vortical Phase Transmission Function / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Electromagnetic Waves and Electronic Systems. – 2010. – N 11. – P. 6-25. – (In Russian).
  5. **Khonina, S.N.** Control of contribution of components of vector electric field in focus of a high-aperture lens by means of binary phase structures / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Computer Optics. – 2010. – V. 34, N 1. – P. 58-68. – (In Russian).
  6. **Kozawa, Y.** Sharper focal spot formed by higher-order radially polarized laser beams / Y. Kozawa and S. Sato // J. Opt. Soc. Am. A. – 2007. – V. 24. – P. 1793-1798.
  7. **Khonina, S.N.** Analysis of wave aberration influence on reducing focal spot size in a high-aperture focusing system / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, E.A. Pevlevina // Computer Optics. – 2011. – V. 35, N 2. – P. 203-219. – (In Russian).
  8. **Artl, J.** Generation of a beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity: the optical bottle beam / J. Artl and M.J. Padgett // Opt. Lett. – 2000. – V. 25. – P. 191-193.
  9. **Hell, S.W.** Breaking the diffraction resolution limit by stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy / S. W. Hell and J. Wichmann // Opt. Lett. – 1994. – V. 19. – P. 780-782.
  10. **Biss, D.P.** Dark field imaging with cylindrical-vector beams / D.P. Biss, K.S. Youngworth and T.G. Brown // Appl. Opt. – 2006. – V. 45. – P. 470-479.
  11. **Khonina, S.N.** Influence of vortex transmission phase function on intensity distribution in the focal area of high-aperture focusing system / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy and S.G. Volotovskiy // Optical Memory and Neural Networks (Allerton Press). – 2011. – V. 20(1). – P. 23-42.
  12. **Brent, R.P.** Algorithms for Minimization Without derivatives / R.P. Brent. – Prentice-Hall, 1973. – 195 p.
  13. Handbook of Mathematical Functions / ed. by. M. Abramovitz, I.A. Stegun. – National Bureau of Standards, Applied Math. Series, 1965.
  14. **Zhan, Q.** Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Qiwen Zhan // Advances in Optics and Photonics. – 2009. – V. 1. – P. 1-57.
  15. **Khonina, S.N.** Optimization of focusing of linearly polarized light / S.N. Khonina and I. Golub // Opt. Lett. – 2011. – V. 36. – P. 352-354.
  16. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards and E. Wolf // Proc. R. Soc. London Ser. A. – 1959. – V. 253. – P. 358-379.
  17. <http://alglib.sources.ru/>
  18. **Sales, T.R.M.** Diffractive superresolution elements / T.R.M. Sales and G.M. Morris // J. Opt. Soc. Am. A. – 1997. – Vol. 14. – P. 1637.
  19. **Bewersdorf, J.** 4pi-confocal microscopy is coming of age / Joerg Bewersdorf, Alexander Egner, Stefan W. Hell // G.I.T. Imaging & Microscopy. – 2004. – Vol. 4. – P. 24-25.
  20. **Helseth, L.E.** Breaking the diffraction limit in nonlinear materials / L.E. Helseth // Opt. Commun. – 2005. – Vol. 256. – P. 435.
  21. **Toraldo di Francia, G.** Supergain antennas and optical resolving power / G. Toraldo di Francia // Nuovo Cimento, Suppl. – 1952. – Vol. 9. – P. 426.
  22. **Huang, F.M.** Super-resolution without evanescent waves / F.M. Huang and N.I. Zheludev // Nano Lett. – 2009. – Vol. 9. – P. 1249-1254.

23. **Grosjean, T.** Photopolymers as vectorial sensors of the electric field / T. Grosjean and D. Courjon // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 6. – P. 2203-2210.

24. **Prudnikov, A.P.** Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1990.

## MINIMIZATION OF LIGHT OR DARK FOCAL SPOT SIZE WITH CONTROLLABLE GROWTH OF SIDE LOBES IN FOCUSING SYSTEMS WITH THE HIGH NUMERICAL APERTURE

S.N. Khonina<sup>1,2</sup>, S.G. Volotovskiy<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institution of Russian Academy of Sciences, Image Processing Systems Institute RAS,

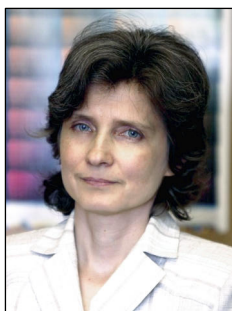
<sup>2</sup>S.P. Korolyov Samara State Aerospace University

### Abstract

Minimization of focal spot size (light or dark) is considered at various types of polarization due to additional apodization of a pupil of focusing system by optical element with a phase function which depends as polynomial on radius and vortical on angle. Coefficients in a radial polynomial were optimized in view of satisfaction of the certain conditions, in particular, preservation of power efficiency and maintenance of the certain level of side lobes. Searching of coefficients was carried out on by minimization of a functional with use of the Brent's method.

**Key words:** focal spot size, focusing system with the high numerical aperture, diffraction limit overcoming with controllable growth of side lobes.

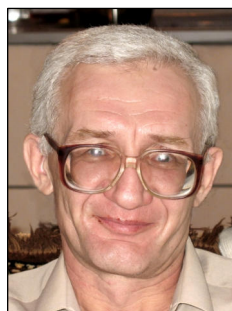
### Сведения об авторах



**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва; ведущий научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolev. Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.



**Волотовский Сергей Геннадьевич**, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Учреждении Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики.

E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Sergey Gennadjevich Volotovskiy** (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolev (KuAI) on a specialty "Applied mathematics", works as the leading programmer in the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements.

Поступила в редакцию 2 ноября 2011 г.