

## РАСЧЁТ КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ ПРОПУСКАНИЯ РЕФРАКЦИОННЫХ АКСИКОНОВ

Устинов А.В., Хонина С.Н.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

## Аннотация

В работе на основе геометро-оптического анализа рассмотрен ход лучей для рефракционных аксиконов в двух конфигурациях: при падении лазерного излучения на плоскую часть аксикона и на остриё. Выполненные расчёты позволяют получить комплексное распределение функции пропускания аксикона, которое далее используется в векторном интеграле Рэлея - Зоммерфельда при моделировании распространения прошедшего аксикон излучения в ближней зоне дифракции.

**Ключевые слова:** рефракционный аксикон, полное внутреннее отражение, векторный интеграл Рэлея - Зоммерфельда, ближняя зона дифракции.

## Введение

Более полувека прошло с момента присвоения коническому элементу, формирующему протяжённое вдоль оптической оси изображение, названия «аксикон» [1]. Хотя аксиконы использовались и исследовались задолго до своего официального названия [2], именно во второй половине прошлого века этот оптический элемент вызвал бурную дискуссию и повышенный интерес, связанный с бездифракционными свойствами формируемых им пучков [3].

Возможность изготовления микроаксиконов, в том числе их дифракционных аналогов [4], расширила спектр применения аксиконов и позволила занять им важное место в микро- и нанооптике [5-9]. Данная область использования аксиконов требует для их анализа строгой электромагнитной теории [10-13], что приводит к существенным затратам вычислительных ресурсов при моделировании.

При увеличении размеров оптического элемента до нескольких десятков длин волн использование разностных методов расчёта, таких как FDTD, становится затруднительным в силу их огромной ресурсозатратности. В работе [13] было показано, что метод разложения по плоским волнам в модификации Мансурипура с учётом коэффициентов пропускания Френеля позволяет получать результаты, достаточно близкие к результатам моделирования с помощью FDTD при значительно меньших вычислительных затратах.

Однако в работе [14] на примере дифракции плоской волны на круглой апертуре было показано, что в области, очень близкой к оптическому элементу, ресурсозатратность алгоритма разложения по плоским волнам возрастает обратно пропорционально расстоянию до апертуры, т.к. требуется учитывать затухающие волны и соответственно увеличивать радиус участвующих в интегрировании спектральных частот.

В результате на расстоянии этот алгоритм становится менее эффективным, чем разработанный в [15] алгоритм быстрого расчёта дифракционного интеграла Рэлея - Зоммерфельда. Универсальный по отношению к типу падающей волны и форме апертуры относительно быстрый [16] прямой векторный

расчёт дифракции полезен как тестовый инструмент в различных задачах.

В данной работе на основе геометро-оптического анализа рассмотрен ход лучей для рефракционных аксиконов в двух конфигурациях: при падении лазерного излучения на плоскую часть аксикона и на остриё. Выполненные расчёты позволяют получить комплексное распределение функции пропускания на выходе аксикона, которое далее используется в векторном интеграле Рэлея - Зоммерфельда при моделировании распространения в ближней зоне дифракции.

### 1. Расчёт хода лучей при падении излучения на плоскую сторону рефракционного аксикона

Будем рассчитывать комплексное распределение функции пропускания на выходе аксикона в следующем виде:

$$\tau(r) = \exp(-ikpr), \quad (1)$$

где параметр  $p = \sin\beta$  связан с углом, под которым лучи выходят из аксикона, и соответствует числовой апертуре оптического элемента (рис. 1).

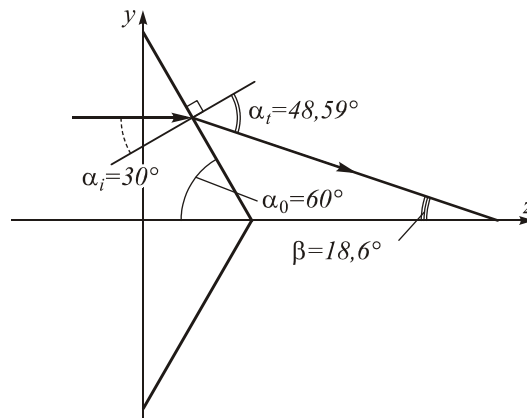


Рис. 1. Ход лучей при отсутствии внутреннего отражения

Рассмотрим рефракционный аксикон, имеющий относительный показатель преломления  $n$  к среде «справа» (полагаем  $n > 1$ ), и угол при вершине  $2\alpha_0$ .

На плоской стороне преломления не происходит, а на наклонной в соответствии с законом преломления

имеем:  $\sin \alpha_i = n \sin \alpha_0$ , причём  $\alpha_i = 90^\circ - \alpha_0$ . Таким образом, угол преломления вычисляется по формуле:

$$\alpha_i = \arcsin(n \cos \alpha_0). \tag{2}$$

Отсутствию внутреннего отражения соответствует условие, что синус угла преломления не превосходит единицы, то есть угол при вершине удовлетворяет неравенству

$$\alpha_0 \geq \alpha_{ir} = \arccos(1/n). \tag{3}$$

В частности, если  $n = 1,5$ , то  $\alpha_{ir} \approx 48,19^\circ$ .

Пример полного хода лучей при выполнении условия (3) изображён на рис. 1 для  $n=1,5$  и  $\alpha_0 \geq 60^\circ$ .

Угол между выходящим лучом и горизонталью равен

$$\beta = \alpha_i - (90^\circ - \alpha_0) = \arcsin(n \cos \alpha_0) + \alpha_0 - 90^\circ. \tag{4}$$

Величина этого угла используется в комплексной функции пропускания аксикона (1).

Очевидно, выходящий из такого аксикона луч не может идти под более крутым углом к оптической оси, чем  $\alpha_{ir}$ , соответствующее наступлению полного внутреннего отражения (3). В частности, для  $n=1,5$  предельное значение  $\beta = 48,19^\circ$ , следовательно, числовая апертура такого аксикона не превысит  $p=0,75$ . Увеличить предельное значение числовой апертуры можно за счёт увеличения показателя преломления материала, из которого изготавливается аксикон.

Если условие (3) не выполняется, то происходит полное внутреннее отражение и в рамках геометрооптической теории лучи из аксикона справа не выходят.

Однако формально можно записать выражение для параметра аксикона в виде комплексного числа:

$$p = \cos \alpha_0 \left( n \sin \alpha_0 - i \sqrt{n^2 \cos^2 \alpha_0 - 1} \right). \tag{5}$$

Наличие в выражении (5) мнимой части соответствует появлению экспоненциально затухающей амплитудной составляющей в (1). Такое распределение может быть использовано как выходное из аксикона для дальнейшего распространения любыми операторами распространения в свободном пространстве.

Геометрический ход лучей внутри аксикона при внутреннем отражении также является интересным.

Если имеет место внутреннее отражение от поверхности аксикона один раз (рассмотрим отражение от *верхней* наклонной стороны), то угол падения на противоположную сторону поверхности равен (рис. 2-6):

$$\alpha_i = 3\alpha_0 - 90^\circ. \tag{6}$$

Знак минус означает, что луч падает слева от нормали, а знак плюс – справа. Предположим, что  $n > 2/\sqrt{3} \approx 1,155$ , за счёт чего условие (3) может не выполняться для углов  $\alpha_0 > 30^\circ$ . В этом случае зна-

чения угла падения (6) возможны как отрицательные, так и положительные.

При *отрицательном* угле падения  $\alpha_i$  горизонтальная проекция падающего луча направлена вправо и после преломления увеличивается, что показано на рис. 2 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 20^\circ$ ).

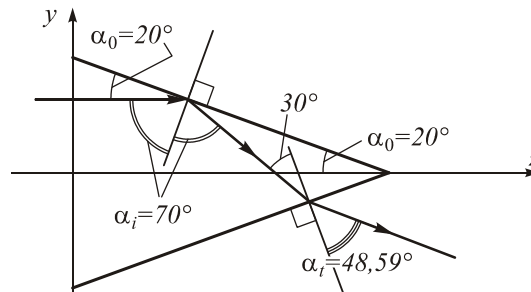


Рис. 2. Ход лучей при наличии внутреннего отражения,  $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 < 30^\circ$

При *нулевом* угле падения  $\alpha_i$  преломления не происходит; горизонтальная проекция падающего луча направлена вправо и не изменяется, что показано на рис. 3 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 30^\circ$ ).

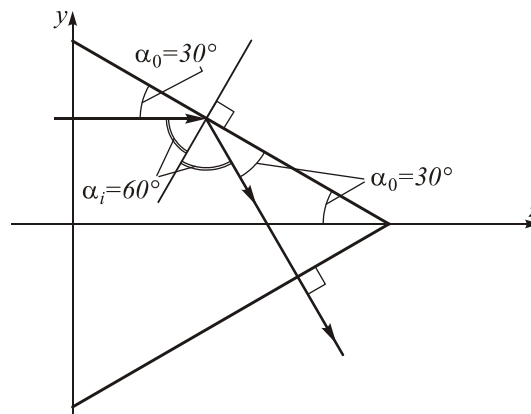


Рис. 3. Ход лучей при наличии внутреннего отражения,  $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 30^\circ$

При *положительном* угле падения  $\alpha_i$  горизонтальная проекция падающего луча направлена вправо (если  $\alpha_0 < 45^\circ$ ) и после преломления уменьшается, но при  $\alpha_0 < \alpha_{ver}$  остаётся направленной вправо, что показано на рис. 4 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 35^\circ$ ).

Существует угол  $\alpha_0 = \alpha_{ver}$ , при котором преломлённый луч идёт вертикально ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = \alpha_{ver}$ , рис. 5). Если посмотреть со стороны острия (на самом деле желательно срезать остриё и получившуюся плоскую поверхность сделать чёрной), то получится красивая картина, похожая на затмение Солнца при размере Луны меньшем, чем есть на самом деле.

При  $\alpha_0 > \alpha_{ver}$  горизонтальная проекция преломлённого луча уже направлена влево ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 > \alpha_{ver}$ , рис. 6).

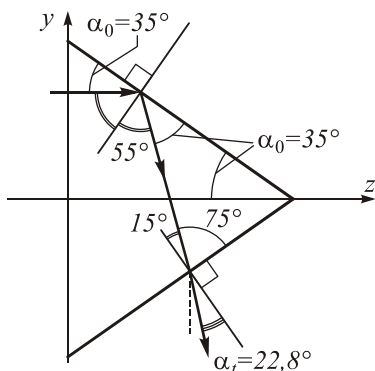


Рис. 4. Ход лучей при наличии внутреннего отражения,  $n = 1,5; \alpha_{ver} > \alpha_0 > 30^\circ$

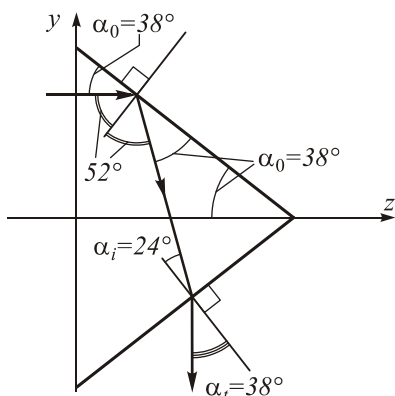


Рис. 5. Ход лучей при наличии внутреннего отражения,  $n = 1,5; \alpha_0 = \alpha_{ver}$

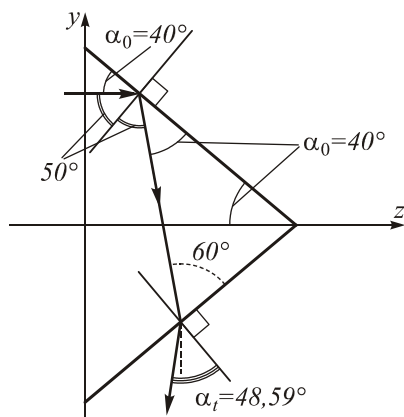


Рис. 6. Ход лучей при наличии внутреннего отражения,  $n = 1,5; \alpha_0 > \alpha_{ver}$

Определить угол  $\alpha_{ver}$  можно на основе выражения (6) из равенства:

$$\sin \alpha_i = n \sin \alpha_i = n \sin(3\alpha_0 - 90^\circ). \tag{7}$$

Из рис. 5 видно, что преломлённый луч идёт вертикально, если  $\alpha_i = \alpha_0$ . После взятия синуса от обеих частей получим уравнение:

$$\sin \alpha_{ver} = n \sin(3\alpha_{ver} - 90^\circ). \tag{8}$$

Используя формулы приведения и косинуса кратных дуг, преобразуем его к виду:

$$\sin \alpha_{ver} + n(4 \cos^3 \alpha_{ver} - 3 \cos \alpha_{ver}) = 0. \tag{9}$$

После этого для приведения к однородному уравнению члены первой степени умножаем на  $\sin^2 \alpha_{ver} + \cos^2 \alpha_{ver}$ , после чего обе части делим на  $\cos^3 \alpha_{ver}$ . Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение:

$$\text{tg}^3 \alpha_{ver} - 3n \text{tg}^2 \alpha_{ver} + \text{tg} \alpha_{ver} + n = 0, \tag{10}$$

или после обозначения  $x = \text{tg} \alpha_{ver}$  будет алгебраическое уравнение третьей степени

$$x^3 - 3nx^2 + x + n = 0. \tag{11}$$

Требуется найти его корень, удовлетворяющий неравенству

$$30^\circ < \alpha_{ver} < \arccos(1/n) \text{ или}$$

$$1/\sqrt{3} < x < \sqrt{n^2 - 1},$$

при этом параметр  $n > 2/\sqrt{3}$ .

Преобразовав уравнение к каноническому виду, можно доказать, что все три корня действительны. Используя теорему Виета, получим, что есть один отрицательный корень и два положительных. Сравнивая знак левой части при  $x = 1/\sqrt{3}$  и  $x = \sqrt{n^2 - 1}$ , получим, что на данном отрезке есть единственный корень, если выполняется неравенство (иначе оба положительных корня будут больше  $\sqrt{n^2 - 1}$ ):

$$n \geq \frac{\sqrt{23 + \sqrt{17}}}{4} \approx 1,302. \tag{12}$$

Если неравенство (12) не выполнено, то вертикальное прохождение луча невозможно и ход лучей будет как на рис. 4 или рис. 6. При  $n = 1,5$   $\alpha_{ver} \approx 38^\circ$ .

Рассмотрим также возможность повторного полного внутреннего отражения от противоположной (нижней) стороны. Это может произойти, если синус угла преломления, вычисленный по формуле (7), будет больше единицы, что после преобразований соответствует выражению:

$$\alpha_0 > 30^\circ + \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{n}. \tag{13}$$

При  $n = 1,5$  получим  $\alpha_0 > 43,94^\circ$ . Это значение меньше  $48,19^\circ$  (граница отражения от верхней стороны), поэтому повторное отражение от противоположной стороны возможно. На рис. 7 показаны различные варианты хода лучей при  $n = 1,5; \alpha_0 = 44^\circ, 45^\circ, 47^\circ$ .

Факт, что при угле  $45^\circ$  луч идёт строго назад, как в зеркале, очевиден из симметрии, но это можно доказать и геометрически – угол  $\gamma$  в треугольнике на рис. 7б равен  $4\alpha_0 - 90^\circ$ . Горизонтальному распространению соответствует  $\gamma = 90^\circ$ , то есть  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

Сравнивая неравенства (13) и (3), можно сделать вывод, что угол, при котором происходит отражение от обеих сторон, можно подобрать, если выполняется неравенство:

$$30^\circ + \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{n} < \arccos \frac{1}{n}, \quad (14)$$

которое после преобразований примет вид  $n > \sqrt{2}$ . (15)

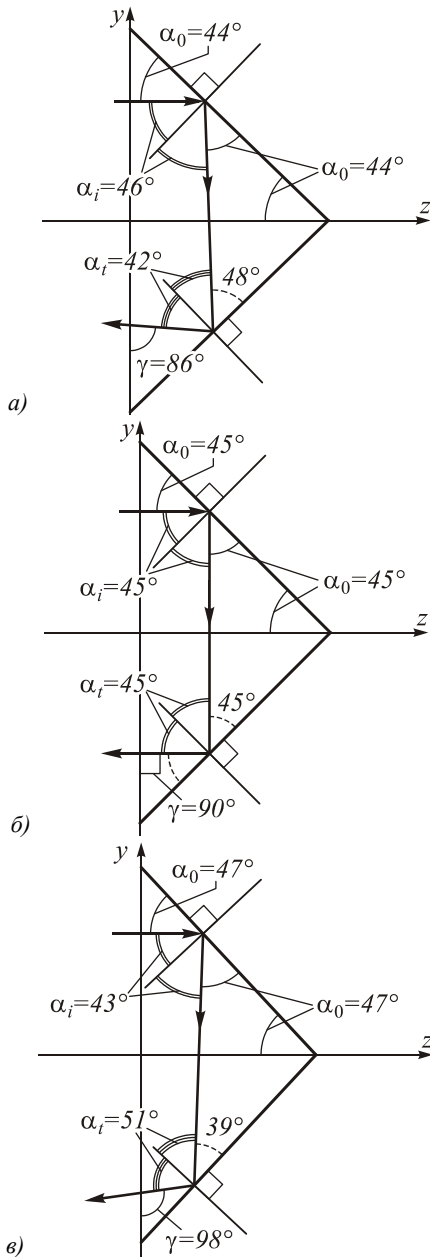


Рис. 7. Ход лучей при наличии внутреннего отражения от обеих сторон,

$n = 1,5$ ;  $\alpha_0 < 45^\circ$  (а),  $\alpha_0 = 45^\circ$  (б),  $\alpha_0 > 45^\circ$  (в)

В конфигурациях аксиконов, представленных на рис. 2–7, предполагается, что  $\alpha_0 < 60^\circ$ . Это, учитывая неравенство (3), означает, что только при  $n < 2$  рассмотренные конфигурации исчерпывают все возможности внутреннего отражения. Если же  $n < 2$ , то внутреннее отражение возможно и при угле больше 60 градусов, в таком случае будут другие конфигурации.

Выясним также, возможно ли отражение от третьей (левой) стороны, для чего рассмотрим рис. 7а.

Угол  $\alpha_0$  – больше 30 (см. (13)), но меньше 45 градусов, а угол падения на левую сторону равен  $90^\circ - \gamma$ , соответственно синус угла преломления равен

$$n \sin(90^\circ - \gamma) = n \cos \gamma = n \cos(4\alpha_0 - 90^\circ).$$

Таким образом, надо решить неравенство:

$$n \cos(4\alpha_0 - 90^\circ) > 1. \quad (16)$$

Выражение под знаком косинуса лежит между 30 и 90 градусов, поэтому можно брать арккосинус от обеих частей. После преобразований получим неравенство

$$\alpha_0 < 22,5^\circ + \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{n}. \quad (17)$$

В то же время должны выполняться неравенства (13) и (15) (отражение от нижней стороны), поэтому отражение от левой стороны может быть, если удовлетворяется двойное неравенство:

$$30^\circ + \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{n} < \alpha_0 < 22,5^\circ + \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{n}. \quad (18)$$

После преобразований получим, что неравенство может быть истинным, если

$$\arcsin \frac{1}{n} < \frac{180^\circ}{7} \text{ или } n > 2,305. \quad (19)$$

Неравенство (15) выполнено. Примером может служить конфигурация, аналогичная рис. 7а, с параметрами аксикона  $n = 3$  (при этом  $36,49^\circ < \alpha_0 < 40,13^\circ$ ) и  $\alpha_0 = 37^\circ$ .

Рассмотрим также случай, аналогичный рис. 7в.

Угол  $\alpha_0$  – больше 45 градусов, но меньше 60 градусов (см. рассуждения о рассмотренных конфигурациях для  $n < 2$ ), а угол падения на левую сторону равен  $\gamma - 90^\circ$ , соответственно синус угла преломления равен  $n \sin(\gamma - 90^\circ) = n \sin(4\alpha_0 - 180^\circ)$ . Таким образом, надо решить неравенство

$$n \sin(4\alpha_0 - 180^\circ) > 1. \quad (20)$$

Выражение под знаком синуса лежит между 0 и 60 градусами, поэтому можно брать арксинус от обеих частей. После преобразований получим неравенство

$$\alpha_0 > 45^\circ + \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{n}. \quad (21)$$

В то же время должны выполняться неравенства (3) и (15) (наличие первого и второго отражений), поэтому отражение от левой стороны может быть, если удовлетворяется двойное неравенство:

$$45^\circ + \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{n} < \alpha_0 < \arccos \frac{1}{n}. \quad (22)$$

После преобразований получим, что неравенство может быть истинным, если

$$\arcsin \frac{1}{n} < 36^\circ \text{ или } n > 1,701. \quad (23)$$

Неравенство (15) выполнено. Примером может служить конфигурация аналогичная рис. 7в, с параметрами аксикона  $n = 1,8$ , (при этом  $53,44^\circ < \alpha_0 < 56,25^\circ$ ) и  $\alpha_0 = 55^\circ$ .

Если  $n < 2/\sqrt{3}$ , то условие (3) не выполняется только для углов  $\alpha_0 < 30^\circ$ . В этом случае значение угла падения (6) возможно только отрицательное. Соответственно ход лучей возможен только как на рис. 2.

**2. Расчёт хода лучей при падении излучения на остриё рефракционного аксикона**

Как было показано в предыдущем разделе, при расположении аксикона остриём вправо можно не достичь предельной для свободного пространства числовой апертуры, поэтому рассмотрим другую конфигурацию расположения аксикона по отношению к освещающему пучку, а именно: остриём влево (рис. 8).

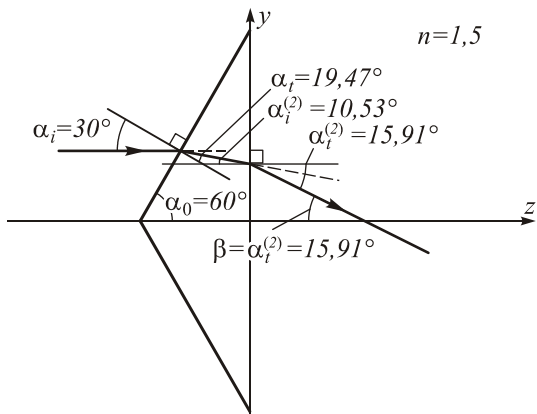


Рис. 8. Ход лучей при отсутствии внутреннего отражения

Пусть  $n_1, n_2$  – относительные показатели преломления вещества аксикона к среде слева и справа ( $n_1 > 1, n_2 > 1$ ) и  $\alpha_0$  – половина угла при вершине аксикона. На левой стороне в соответствии с законом преломления имеем:  $\sin \alpha_i^{(1)} = \sin \alpha_i^{(1)} / n_1$ , причём  $\alpha_i^{(1)} = 90^\circ - \alpha_0$ . Таким образом, угол преломления на левой стороне вычисляется по формуле:

$$\alpha_i^{(1)} = \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n_1}\right). \tag{24}$$

Очевидно, что выражение под знаком арксинуса всегда меньше единицы.

На правой стороне имеем:  $\sin \alpha_i^{(2)} = n_2 \sin \alpha_i^{(2)}$ , причём  $\alpha_i^{(2)} = (90^\circ - \alpha_0) - \alpha_i^{(1)} = 90^\circ - (\alpha_0 + \alpha_i^{(1)})$ . Выражение в скобках не может быть больше 90 градусов – можно доказать, что оно монотонно возрастает от  $\arcsin(1/n_1)$  при  $\alpha_0 = 0^\circ$  до 90 градусов при  $\alpha_0 = 90^\circ$ . Таким образом, угол преломления на правой стороне вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(2)} &= \arcsin\left(n_2 \sin \alpha_i^{(2)}\right) = \\ &= \arcsin\left\{n_2 \cos\left[\alpha_0 + \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n_1}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Пример хода лучей изображён на рис. 8 ( $n_1 = n_2 = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 60^\circ$ ).

Угол между выходящим лучом и горизонталью равен

$$\beta = \alpha_i^{(2)}. \tag{26}$$

При определённых условиях эта величина может быть больше единицы (будет рассмотрено ниже). В этом случае, так же как и для аксикона первого типа, можно формально использовать выражение (25) для расчёта комплексной функции пропускания на выходе аксикона. В отличие от аксикона первого типа синус будет действительным числом больше единицы, поэтому произойдёт только изменение фазы падающего пучка.

Выясним, когда величина  $n_2 \sin \alpha_i^{(2)}$  из формулы (25) будет больше единицы.

Решим уравнение

$$n_2 \cos\left(\alpha_0 + \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n_1}\right)\right) = 1. \tag{27}$$

Левая часть (27) монотонно убывает при увеличении  $\alpha_0$  от 0 до 90 градусов, причём при  $\alpha_0 = 90^\circ$  она равна нулю. Поэтому корень уравнения, если он есть, может быть только один.

Произведём ряд преобразований:

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha_0 + \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n_1}\right)\right) &= 1/n_2, \\ \cos \alpha_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{n_1^2}} - \sin \alpha_0 \frac{\cos \alpha_0}{n_1} &= \frac{1}{n_2}, \\ \cos \alpha_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{n_1^2}} &= \frac{1}{n_2} + \sin \alpha_0 \frac{\cos \alpha_0}{n_1}, \\ \cos^2 \alpha_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{n_1^2}\right) &= \\ &= \frac{1}{n_2^2} + \sin^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \alpha_0}{n_1^2} + 2 \sin \alpha_0 \frac{\cos \alpha_0}{n_1 n_2}, \\ \cos^2 \alpha_0 - \frac{\cos^4 \alpha_0}{n_1^2} &= \\ &= \frac{1}{n_2^2} + \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0}{n_1^2} + \frac{2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{n_1 n_2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Последнее уравнение приведём к однородному умножением слагаемых второй степени на  $\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0$ , а нулевой степени - на  $(\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0)^2$ . После чего делим на  $\cos^4 \alpha_0$  и делаем замену  $\text{tg } \alpha_0 = x$ , в результате получим алгебраическое уравнение 4 степени

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_2^2} x^4 + \frac{2}{n_1 n_2} x^3 + \left(\frac{2}{n_2^2} + \frac{1}{n_1^2} - 1\right) x^2 + \\ + \frac{2}{n_1 n_2} x + \left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_1^2} - 1\right) = 0. \end{aligned} \tag{29}$$



Можно показать, что уравнение независимо от значений  $n_1, n_2$  имеет корни  $\pm i$ . После деления левой части уравнения (29) на  $x^2 + 1$  получим квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{2n_2}{n_1}x + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} - n_2^2\right) = 0, \tag{30}$$

которое имеет корни

$$x_{1,2} = -\frac{n_2}{n_1} \pm \sqrt{n_2^2 - 1}. \tag{31}$$

Так как изначально было принято, что  $n_2 > 1$ , то оба корня действительные, но положительным один из них будет только при условии

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} < 1. \tag{32}$$

Окончательно получаем, что внутреннее отражение отсутствует в следующем случае:

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} > 1, \quad \alpha_0 - \text{любое}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} < 1, \quad \alpha_0 > \arctg(\sqrt{n_2^2 - 1} - n_2/n_1).$$

Собственно, можно обойтись лишь второй строкой, так как при отрицательном корне ограничение на угол исчезает.

Для примера внутреннего отражения рассмотрим случай, когда  $n_1 = n_2 = n$ , при этом должны выполняться условия  $n > \sqrt{2}$ ,  $\alpha_0 < \arctg(\sqrt{n^2 - 1} - 1)$ . Ход лучей для этого случая изображён на рис. 9:  $n = 2$ ;  $\alpha_0 = 30^\circ (< 36,21^\circ)$  (а) и  $n = 1,9$ ;  $\alpha_0 = 25^\circ (< 31,61^\circ)$  (б).

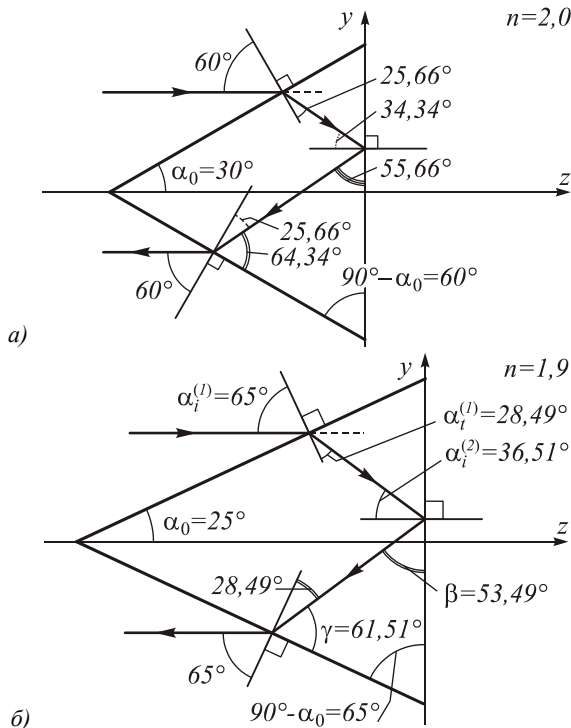


Рис. 9. Ход лучей при наличии внутреннего отражения

Видно, что луч идёт строго назад. Можно доказать, что так будет всегда, причём условие  $n_1 = n_2$  не требуется.

### 3. Использование комплексной функции пропускания на выходе аксикона в векторном интеграле Рэля - Зоммерфельда

Интегральная теорема Рэля - Зоммерфельда первого типа в векторной форме записывается следующим образом [17, 18]:

$$E_x(u, v, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma} E_{0x}(x, y) \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy,$$

$$E_y(u, v, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma} E_{0y}(x, y) \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy, \tag{34}$$

$$E_z(u, v, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} [E_{0x}(x, y)(u-x) + E_{0y}(x, y)(v-y)] \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy,$$

где  $E_{0x}(x, y)$  и  $E_{0y}(x, y)$  – комплексные амплитуды  $x$ - и  $y$ -компонент входного электрического поля,  $z$ -компонента предполагается нулевой за счёт выбора системы координат.

В предыдущих выкладках было получено, что при относительном показателе преломления аксикона для  $n = 1,5$  полное внутреннее отражение возникает при  $\alpha < 48,19^\circ$ . Рассмотрим микроаксикон радиусом  $R$  и высотой  $h$ , освещаемый с плоской стороны ограниченной плоской волной с длиной  $\lambda$ .

При  $R=10\lambda$  и  $h=5\lambda$   $\alpha_0 = 63,43^\circ$  и по формуле (4) на выходе из аксикона лучи будут идти под углом  $\beta = \arcsin(1,5 \cos 63,43^\circ) - 26,57^\circ \approx 15,56^\circ$  к оптической оси, что соответствует  $p \approx 0,268$  в формуле (1). В данном случае параметр  $p$  определяет числовую апертуру аксикона.

Увеличение высоты аксикона  $h$  при неизменном радиусе  $R$  ведёт к увеличению числовой апертуры вплоть до момента внутреннего отражения лучей от поверхности аксикона, которое при  $n = 1,5$  наступит для  $h \approx 0,894R$ .

Наибольшая достижимая числовая апертура при использовании рефракционного аксикона в такой конфигурации:

$$p(\alpha_0 = \alpha_{tir}) = \sin \alpha_{tir} = \sin [\arccos(1/n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \tag{35}$$

Далее, например, при  $h = R$  и  $\alpha_0 = 45^\circ$  в рамках геометрической оптики свет не будет проходить через аксикон, отражаясь от границы двух сред. Однако волновая теория предсказывает проникновение части излучения в виде затухающих волн за границу оптического элемента. В этом случае комплексное распределение сразу за аксиконом можно определить по формуле (5). В частности, для

$$h = R \quad p \approx 0,75 - 0,25i$$

$$\tau(r) = \exp(-0,25kr) \exp(-i0,75kr),$$

т.е. на выходе аксикона появляются не только фазовые изменения, но и наложение экспоненциально затухающей амплитуды (табл. 1, строка 3).

Таблица 1. Результаты моделирования при освещении плоской стороны аксикона радиально-поляризованным пучком

	Комплексное распределение на выходе из аксикона (интенсивность и фаза), $R = 10\lambda$	График осевого распределения интенсивности	Поперечное распределение интенсивности в плоскости максимальной интенсивности, $4\lambda \times 4\lambda$ (негатив)
$h = 0,8R,$ $\alpha_0 = 51,34^\circ,$ $p \approx 0,513$			 $z = 10,6\lambda; \text{FWHM} = 1,59\lambda$
$h = 0,894R,$ $\alpha_0 = 48,19^\circ,$ $p = 0,75$			 $z = 5,5\lambda; \text{FWHM} = 0,65\lambda$
$h = R,$ $\alpha_0 = 45^\circ,$ $p \approx 0,75 - 0,25i$			 $z = \lambda; \text{FWHM} = 0,71\lambda$
$h = 1,28R,$ $\alpha_0 = 38^\circ,$ $p \approx 0,73 - 0,5i$			 $z = 0,5\lambda; \text{FWHM} = 0,79\lambda$

При дальнейшем уменьшении угла при вершине экспоненциальный коэффициент в амплитудной составляющей будет расти (табл. 1, строка 4) до конечной величины:

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} [\text{Im}(p)] = -\sqrt{n^2 - 1}, \tag{36}$$

где  $\text{Im}(\cdot)$  соответствует мнимой части комплексного числа.

Фазовый набег при этом должен нивелироваться.

Т.о. для  $n=1,5$  предельная амплитудная функция будет  $\exp(-1,12kr)$ . Диаметр по полуспаду интенсивности для такой функции  $\text{FWHM} \approx 0,1\lambda$ .

Результаты численного моделирования с использованием формул (34) и (1), (4), (5) для радиально-поляризованного гауссова пучка приведены в табл. 1.

Освещающий пучок формировался как произведение фундаментальной гауссовой моды на радиальную координату:

$$E_{0x}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) \sqrt{x^2 + y^2} \cos\left(\arctg \frac{y}{x}\right),$$

$$E_{0y}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\arctg \frac{y}{x}\right), \tag{37}$$

где  $\sigma = R/2$ .

По результатам, приведённым в табл. 1, видно, что наилучший результат соответствует ситуации достижения угла полного внутреннего отражения. В этом случае формируется минимально возможное световое пятно ( $\text{FWHM} = 0,65\lambda$ ) с максимальной интенсивностью.

При дальнейшем сужении (вытягивании) аксикона световое пятно уширяется, а интенсивность значительно падает.

При расположении аксикона вершиной к освещающему пучку полное внутренне отражение наступает при более острых углах, чем для первой конфигурации. Например, при  $n=1,5$  для второй конфигурации  $\alpha_{\text{tir}} = 6,75^\circ$  вместо  $\alpha_{\text{tir}} = 48,19^\circ$ , соответствующего первой конфигурации.

После наступления внутреннего отражения комплексное распределение на выходе из аксикона не будет приобретать амплитудную составляющую, зато параметр аксикона

$$p(\alpha_0) = n \cos\left[\alpha_0 + \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n}\right)\right] \tag{38}$$

станет больше единицы, что соответствует возникновению затухающих волн при дальнейшем распространении в свободном пространстве.

При дальнейшем уменьшении угла при вершине числовая апертура аксикона будет расти до конечной величины

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} p = n \cos \left[ \arcsin(1/n) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n. \quad (39)$$

В частности, для  $n = 1,5$ :

$$p(0) \approx 1,118.$$

В табл. 2 приведены результаты моделирования для радиально-поляризованного гауссова пучка (37), падающего на острие аксикона.

Таблица 2. Результаты моделирования при освещении острия аксикона радиально-поляризованным пучком

	Комплексное распределение на выходе из аксикона (интенсивность и фаза), $R = 10\lambda$	График осевого распределения интенсивности	Поперечное распределение интенсивности в плоскости максимальной интенсивности, $4\lambda \times 4\lambda$ (негатив)
$h = R$ , $\alpha_0 = 45^\circ$ , $p \approx 0,44$			 $z = 13\lambda$ ; FWHM = $1,93\lambda$
$h \approx 1,73R$ , $\alpha_0 = 30^\circ$ , $p \approx 0,63$			 $z = 7,8\lambda$ ; FWHM = $1,01\lambda$
$h \approx 8,45R$ , $\alpha_0 = 6,75^\circ$ , $p \approx 1$			 $z = 1,3\lambda$ ; FWHM = $0,373\lambda$
$h \approx 11,43R$ , $\alpha_0 = 5^\circ$ , $p \approx 1,03$			 $z = \lambda$ ; FWHM = $0,366\lambda$
$h = 57,29R$ , $\alpha_0 = 1^\circ$ , $p \approx 1,1$			 $z = 0,55\lambda$ ; FWHM = $0,362\lambda$

Как видно из сравнения результатов табл. 1 и 2, один и тот же рефракционный аксикон в первой конфигурации будет соответствовать оптическому элементу с более высокой числовой апертурой, которая, однако, может не достичь предельного для свободного пространства значения.

Существенно превысить числовую апертуру свободного пространства даже во второй конфигурации можно только за счёт значительного увеличения показателя преломления рефракционного аксикона и его удлинения.

Для этих целей гораздо удобнее использовать дифракционный аналог рефракционного аксикона, в том числе бинарный вариант. В этом случае вместо увеличения высоты оптического элемента потребуется высокое разрешение при изготовлении.

В табл. 3 приведены результаты моделирования для многоуровневого дифракционного аксикона

(в приближении тонкого оптического элемента, вносящего лишь фазовые изменения) с числовой апертурой  $p = 1,2$  и  $p = 1,5$ . В упомянутом приближении действие дифракционного аксикона при  $p < 1,2$  полностью аналогично второй конфигурации.

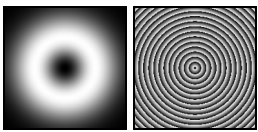

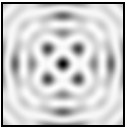
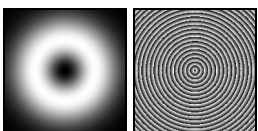
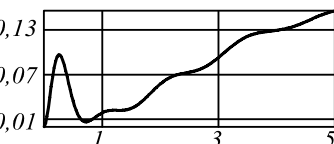
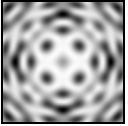
Из табл. 2 и 3 видно, что увеличение числовой апертуры выше  $p = 1,1$  не приводит к уменьшению размера центрального светового пятна. Наоборот, вместе с уменьшением интенсивности и ростом боковых лепестков происходит уширение размера пятна.

В рассмотренных случаях результаты моделирования показывают наилучшие характеристики по концентрации интенсивности в центральном фокальном пятне в ситуациях, близких к наступлению полного внутреннего отражения.

Наименьший размер светового пятна (значение FWHM, равное  $0,362\lambda$ ) получается при числовой апертуре  $p \approx 1,1$ .



Таблица 3. Результаты моделирования при освещении дифракционного аксикона радиально-поляризованным пучком

	Комплексное распределение на выходе из аксикона (интенсивность и фаза), $R = 10\lambda$	График осевого распределения интенсивности	Поперечное распределение интенсивности в плоскости максимальной интенсивности, $4\lambda \times 4\lambda$ (негатив)
$p = 1,2$			 $z = 0,38\lambda$ ; FWHM = 0,371 $\lambda$
$p = 1,5$			 $z = 0,26\lambda$ ; FWHM = 0,4 $\lambda$

### Заключение

Геометро-оптический анализ хода лучей для рефракционного аксикона, освещённого с плоской стороны, показал, что выходящий из такого аксикона луч не может идти под более крутым углом к оптической оси, чем  $\alpha_{\text{irr}} = \arccos(1/n)$ , соответствующее наступлению полного внутреннего отражения. Увеличить предельное значение числовой апертуры можно за счёт увеличения показателя преломления материала, из которого изготавливается аксикон.

При полном внутреннем отражении в рамках геометро-оптической теории лучи из аксикона не выходят. Однако волновая теория предсказывает наличие затухающих волн вблизи оптического элемента, поэтому предложено описывать комплексную функцию на выходе такого аксикона в виде амплитудной и фазовой составляющей (5). Данное распределение может быть использовано как выходное из аксикона для дальнейшего распространения любыми операторами распространения в свободном пространстве.

При расположении аксикона вершиной к освещающему пучку полное внутреннее отражение наступает при более острых углах, чем для первой конфигурации. Кроме того, после наступления внутреннего отражения комплексное распределение на выходе из аксикона не будет приобретать амплитудную составляющую (38), но параметр аксикона может превысить единицу, что соответствует возникновению затухающих волн при дальнейшем распространении в свободном пространстве.

Существенно превысить числовую апертуру свободного пространства даже во второй конфигурации можно только за счёт значительного увеличения показателя преломления рефракционного аксикона и его удлинения, поэтому удобнее (при обеспечении достаточного разрешения) использовать дифракционный аналог рефракционного аксикона.

Однако слишком сильно увеличивать числовую апертуру не имеет смысла, т.к. наименьший размер светового пятна (FWHM = 0,362 $\lambda$ ) получается при числовой апертуре  $p \approx 1,1$ . При дальнейшем увеличении  $p$  вместе с уменьшением интенсивности и ростом боковых лепестков происходит уширение размера центрального светового пятна.

Наилучшие характеристики по концентрации интенсивности в центральном фокальном пятне имеют место в ситуациях, близких к наступлению полного внутреннего отражения.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9.

### Литература

1. McLeod, J.H. The axicon: a new type of optical element / J.H. McLeod // J. Opt. Soc. Am. – 1954. – V. 44. – P. 592-597.
2. Jaroszewicz, Z. Axicon – the most important optical element / Z. Jaroszewicz, A. Burvall, A.T. Friberg. – Optics & Photonics News, April 2005.
3. Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, Jr. and J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 1499-1501.
4. Turunen, J. Holographic generation of diffraction-free beams / J. Turunen, A. Vasara and A.T. Friberg // Appl. Opt. – 1988. – V. 27. – P. 3959-3962.
5. Kaenders, W.G. Refractive components for magnetic atom optics / W.G. Kaenders, F. Lison, I. Muller, A. Richter, R. Wynands and D. Meschede // Phys. Rev. A. – 1996. – V. 6, N 6. – P. 5067-5075.
6. Arlt, J. Atom guiding along Laguerre-Gaussian and Bessel light beams / J. Arlt, T. Hitomi, K. Dholakia // Appl. Phys. – 2000. – V. 71. – P. 549-554.
7. Arlt, J. Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams / J. Arlt [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – V. 63. – P. 063602.

8. **Garces-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam / V. Garces-Chavez [et al.] // *Nature*. – 2002. – V. 419. – P. 145-147.
  9. **Cizmar, T.** An optical nanotrap array movable over a millimetre range / T. Cizmar, M. Siler, P. Zemanek // *Appl. Phys. B*. – 2006. – Vol. 84. – P. 197-203.
  10. **Vahimaa, P.** Electromagnetic analysis of nonparaxial Bessel beams generated by diffractive axicons / Pasi Vahimaa, Ville Kettunen, Markku Kuittinen, Jari Turunen and Ari T. Friberg // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 1997. – Vol. 14, N 8. – P. 1817-1824.
  11. **Zhang, Y.** Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon / Y. Zhang, L. Wang, C. Zheng // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2005. – Vol. 22, N 11. – P. 2542-2546.
  12. **Котляр, В.В.** Моделирование острой фокусировки радиально-поляризованной лазерной моды с помощью конического и бинарного микроаксиконов / В.В. Котляр, С.С. Стафеев // *Компьютерная оптика*. – 2009. – Т. 33, № 1. – С. 52-60.
  13. **Хонина, С.Н.** Расчёт дифракции линейно-поляризованного ограниченного пучка с постоянной интенсивностью на высокоапертурных бинарных микроаксиконов в ближней зоне / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, С.Г. Волотовский, А.А. Ковалёв // *Компьютерная оптика*. – 2010. – Т. 34, № 4. – С. 443-460.
  14. **Хонина, С.Н.** Распространение радиально-ограниченных вихревых пучков в ближней зоне: I. Алгоритмы расчёта / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, А.А. Ковалёв, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика*. – 2010. – Т. 34, № 3. – С. 317-332.
  15. **Устинов, А.В.** Быстрый способ вычисления интеграла Рэлея - Зоммерфельда первого типа / А.В. Устинов // *Компьютерная оптика*. – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 412-419.
  16. **Хонина, С.Н.** Алгоритмы быстрого расчёта дифракции радиально-вихревых лазерных полей на микроапертуре / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, С.Г. Волотовский, М.А. Ананьин // *Известия Самарского научного центра РАН*. – 2010. – № 12(3). – С. 15-25.
  17. **Luneburg, R.K.** *Mathematical Theory of Optics* / R.K. Luneburg. – University of California Press, Berkeley, California, 1966.
  18. **Ciattoni, A.** Vectorial analytical description of propagation of a highly nonparaxial beam / A. Ciattoni, B. Crosignani and P. D. Porto // *Opt. Commun.* – 2002. – Vol. 202. – P. 17-20.
- References**
1. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element / J.H. McLeod // *J. Opt. Soc. Am.* – 1954. – V. 44. – P. 592-597.
  2. **Jaroszewicz, Z.** Axicon – the most important optical element / Z. Jaroszewicz, A. Burvall, A.T. Friberg. – *Optics & Photonics News*, April 2005.
  3. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, Jr. and J.H. Eberly // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – V. 58. – P. 1499-1501.
  4. **Turunen, J.** Holographic generation of diffraction-free beams / J. Turunen, A. Vasara and A.T. Friberg // *Appl. Opt.* – 1988. – V. 27. – P. 3959-3962.
  5. **Kaenders, W.G.** Refractive components for magnetic atom optics / W.G. Kaenders, F. Lison, I. Muller, A. Richter, R. Wynands and D. Meschede // *Phys. Rev. A*. – 1996. – V. 6, N 6. – P. 5067-5075.
  6. **Arlt, J.** Atom guiding along Laguerre-Gaussian and Bessel light beams / J. Arlt, T. Hitomi, K. Dholakia // *Appl. Phys.* – 2000. – V. 71. – P. 549-554.
  7. **Arlt, J.** Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams / J. Arlt [et al.] // *Phys. Rev.* – 2001. – V. 63. – P. 063602.
  8. **Garces-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam / V. Garces-Chavez [et al.] // *Nature*. – 2002. – V. 419. – P. 145-147.
  9. **Cizmar, T.** An optical nanotrap array movable over a millimetre range / T. Cizmar, M. Siler, P. Zemanek // *Appl. Phys. B*. – 2006. – Vol. 84. – P. 197-203.
  10. **Vahimaa, P.** Electromagnetic analysis of nonparaxial Bessel beams generated by diffractive axicons / Pasi Vahimaa, Ville Kettunen, Markku Kuittinen, Jari Turunen and Ari T. Friberg // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 1997. – Vol. 14, N 8. – P. 1817-1824.
  11. **Zhang, Y.** Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon / Y. Zhang, L. Wang, C. Zheng // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2005. – Vol. 22, N 11. – P. 2542-2546.
  12. **Kotlyar, V.V.** Modeling sharp focus radially-polarized laser mode with conical and binary microaxicons / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeyev // *Computer Optics*. – 2009. – V. 33, N 1. – P. 52-60. – (in Russian).
  13. **Khonina, S.N.** Calculation of diffraction of the linearly-polarized limited beam with uniform intensity on high-aperture binary micro-axicons in a near zone / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy, A.A. Kovalev // *Computer Optics*. – 2010. – Vol. 34, N 4. – P. 433-460. – (in Russian).
  14. **Khonina, S.N.** Propagation of the radially-limited vortical beam in a near zone. Part I. Calculation algorithms / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.A. Kovalev, S.G. Volotovskiy // *Computer Optics*. – 2010. – Vol. 34, N 3. – P. 317-332. – (in Russian).
  15. **Ustinov, A.V.** The fast way for calculation of first class Rayleigh-Sommerfeld integral / A.V. Ustinov // *Computer Optics*. – 2009. – V. 33, N 4. – P. 412-419. – (in Russian).
  16. **Khonina, S.N.** Fast calculation algorithms for diffraction of radially-vortical laser fields on the microaperture / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy, M.A. Ananin // *Izvest. SNC RAS* – 2010. – V. 12(3). – P. 15-25. – (in Russian).
  17. **Luneburg, R.K.** *Mathematical Theory of Optics* / R.K. Luneburg. – University of California Press, Berkeley, California, 1966.
  18. **Ciattoni, A.** Vectorial analytical description of propagation of a highly nonparaxial beam / A. Ciattoni, B. Crosignani and P. D. Porto // *Opt. Commun.* – 2002. – Vol. 202. – P. 17-20.

## CALCULATION OF COMPLEX TRANSMISSION FUNCTION OF REFRACTIVE AXICONS

*A.V. Ustinov, S.N. Khonina**Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences,  
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)***Abstract**

In work on the basis of the geometric-optical analyzing the rays tracing for refractive axicons in two configurations is considered: at falling laser radiation on a flat side of an axicon and on a tip. The executed calculations allow to receive for an axicon complex transmission function which further is used in vectorial Rayleigh–Sommerfeld diffraction integral for modelling propagation light after axicon in the near zone of diffraction.

**Key words:** refractive axicon, total inner reflection, vectorial Rayleigh–Sommerfeld integral, near zone of diffraction.

**Сведения об авторах**

**Устинов Андрей Владимирович**, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Учреждении Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН; является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности, гидродинамических процессов и биомедицинских.

E-mail: [andr@smr.ru](mailto:andr@smr.ru).

**Andrey Vladimirovich Ustinov**, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied mathematics”, works as the leading programmer in the Image Processing Systems Institute of the RAS; postgraduate student of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Research interests: diffractive optics, software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images.



**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва; ведущий научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.

*Поступила в редакцию 17 октября 2011 г.*