# АВТОМОДУЛЯЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА КУБИК-КВИНТИК

*Алименков И.В.*
*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)*

**_Аннотация_**

Для решения нелинейного уравнения Шрёдингера с *нелинейностью типа кубик–квинтик* применён прямой метод и получен явный вид решения в элементарных функциях в виде локализованного импульса, движущегося с постоянной скоростью без дисперсионного уширения. Данное решение содержит, как частный случай, известное решение с кубической нелинейностью.

*Ключевые слова:* нелинейное уравнение Шрёдингера, нелинейность третьей и пятой степени, солитонные решения для нелинейности типа кубик-квинтик.

## *Введение*

Практически все волны модулированы, т.е. амплитуда, фаза, частота и даже форма огибающей могут медленно меняться. Модуляция может быть связана с воздействием внешних сил или полей, а может возникать в результате развития разного рода неустойчивостей. Поскольку только модулированные волны могут переносить информацию, теория распространения таких волн имеет важное прикладное значение. Основным уравнением теории модулированных волн является так называемое нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), которое было выведено в различных областях физики: НУШ описывает распространение нелинейных ленгмюровских волн, волн на глубокой воде; волн в линиях передачи, акустических волн в жидкостях с пузырьками и, прежде всего, распространение оптического излучения в нелинейных средах. Последний класс приложений стал особенно актуальным с развитием лазерных технологий, поскольку интенсивность лазерного излучения обычно настолько велика, что возникает необходимость учитывать нелинейную часть восприимчивости среды.

В обширной монографической литературе, посвящённой НУШ, особняком стоят две книги: [1], являющаяся наиболее полным и глубоким математическим исследованием солитонной теории НУШ, и [2], представляющая собой энциклопедический обзор физических приложений НУШ в нелинейной оптике и смежных областях (число журнальных публикаций по данной тематике растёт подобно снежному кому).

НУШ описывает в общем случае эволюцию комплексной огибающей несущей периодической волны в слабонелинейной системе. Стандартное безразмерное НУШ с кубической нелинейностью имеет вид $i\partial\psi/\partial t+\partial^2\psi/\partial x^2+\eta|\psi|^2\psi=0$. В этом уравнении быстрые пространственно-временные осцилляции уже отделены. Нелинейный кубический член $|\psi|^2\psi$ в различных физических моделях, описываемых этим уравнением, возникает обычно из степенного разложения некоторой функции отклика системы на периодическое возмущение несущей волны. Эта функция отклика зависит от интенсивности $I=|\psi|^2$ и обладает очевидными свойствами: в нуле она обращается в ноль и на бесконечности асимптотически стремится к постоянному значению.

Её разложение в степенной ряд имеет вид

$$n_{NL}(I)=n_2I+n_4I^2+....=n_2|\psi|^2+n_4|\psi|^4+.... .$$

Стандартный безразмерный вид НУШ, приведённый выше, записан при учёте наинизшего члена разложения $n_{NL}\approx n_2I=n_2|\psi|^2$.

При этом коэффициент нелинейности $\eta$ пропорционален $n_2$.

## *Основной формализм*

При больших амплитудных значениях комплексного поля $\psi$ уже нельзя ограничиваться первым членом разложения и учёт следующей поправки приводит к уравнению:

$$i\partial\psi/\partial t+\partial^2\psi/\partial x^2+\eta_1|\psi|^2\psi+\eta_2|\psi|^4\psi=0. \qquad (1)$$

Если система обладает слабовыраженным керровским откликом, то предпоследним слагаемым в (1) можно пренебречь и получим НУШ с нелинейностью пятой степени. Способ решения такого уравнения подробно изложен в [3].

В данной работе предполагается, что $\eta_1$ отлично от нуля и поправки степени шестой и выше в разложении функции отклика пренебрежимо малы. Экспериментальные исследования в нелинейной оптике [2] подтверждают такую зависимость нелинейного показателя преломления от интенсивности оптического поля в полупроводниковых волноводах, стёклах, допированных полупроводниками, и органических полимерах.

От обобщённого НУШ (1) перейдём к уравнению для интенсивности поля $I$. Подстановка полевой функции $\psi$ вида

$$\psi=\sqrt{I}\exp\{iqx\}, \qquad (2)$$

где $q$ – свободный параметр, играющий роль поправки к центральному волновому числу внешнего монохроматического возмущения, в (1) приводит после отделения мнимой и вещественной частей к двум уравнениям:

$$\frac{\partial I}{\partial t}+2q\frac{\partial I}{\partial x}=0\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2=2\left(q^2 I-\eta_1 I^2-\eta_2 I^3\right). \qquad (4)$$

Таким образом, получена система двух уравнений на одну неизвестную функцию. Метод решения подобных систем приведён в [3]. Не повторяя содержание указанной работы, приведём окончательный результат, полученный данным методом

$$I=\frac{A^2}{1+\sqrt{\frac{4\eta_2 A^2}{3\eta_1}+1}\quad ch\,2s}\,, \qquad (5)$$

где $s=\sqrt{\eta_1}A\left(x-x_0-\sqrt{\eta_1}At\right)/2$, $A$ и $x_0$ – свободные параметры, причём $q=\sqrt{\eta_1}A/2$.

В том, что найденная функция является решением системы уравнений (3), (4), легко убедиться прямой подстановкой (5) в указанную систему.

### *Заключение*

Таким образом, получено точное решение в элементарных функциях НУШ с нелинейностью третьей плюс пятой степеней.

Как легко видеть, если в полученном результате положить $\eta_2=0$, то он примет вид известного решения НУШ с нелинейностью третьей степени.

Данная статья является органичным продолжением статьи [3], что подчёркивается общностью заголовков обеих работ.

### *Литература*


1. **Тахтаджян, Л.А.** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. - М.: Наука, 1986. – 528 с.
2. **Кившарь, Ю.С.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. - М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
3. **Алименков, И.В.** Автомодуляция одномерных волн на основе нелинейного уравнения Шрёдингера с некерровской нелинейностью // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 3. – С. 240-242.


### *References*


1. **Takhtajan, L.A.** Hamilton approach in theory of solitons / L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1986. – 528 p. – (In Russian).
2. **Kivshar, Y.S.** Optical solitons. From Fibers to Photonic Grystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2005. – 648 p. – (In Russian).
3. **Alimenkov, I.V.** Automodulation of one-dimensional waves based on nonlinear Shredinger equation with non kerr nonlianerity / I.V. Alimenkov // Computer Optics. – 2009. – Vol. 33, N 3. – P. 240-242. – (In Russian).


## AUTOMODULATION OF ONE-DIMENSIONAL WAVES BASED ON NONLINEAR SCHREDINGGER EQUATION WITH NONLIANERITY CUBIC-QUINTIC TYPE


*I. V. Alimenkov*
*S.P. Korolyov Samara State Aerospace University*


### *Abstract*


It is shown that nonlinear Schrёdinger equation with nonlinearity cubic-quintic type has a localized solution moving with constant velocity without dispersion. This solution is found by straight method and it contains the well-known solution of cubic nonlinear Schrёdinger equation.



Key words: nonlinear Schrёdinger equation, nonlinearity $3^{th}$ and $5^{th}$ order, soliton solutions for cubic-quintic nonlinearity.


### *Сведения об авторе*


**Алименков Иван Васильевич,** 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: i-alimenkov@mail.ru .

***Ivan Vasilyievich Alimenkov,*** 1949 year of birth. In 1977 has graduated with honours Kuibyshev state university on a speciality “Physics”. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of sub-department “Applied Mathematics” SSAU. Research interests – nonlinear Physics.


*Поступила в редакцию 25 сентября 2011 г.*