МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ МОДОВОЙ ДИСПЕРСИИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ КВАРЦЕВОГО АНИЗОТРОПНОГО ОПТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Мусакаев М.Р., Султанов А.Х.
Уфимский государственный авиационный технический университет

Аннотация

Представлен сравнительный анализ математических моделей поляризационной модовой дисперсии высших порядков на основе матриц Джонса. Показано, что ограниченная экспоненциальная модель и модель на основе ряда Тейлора не дают хорошей аппроксимации поляризационной модовой дисперсии высших порядков из-за инфинитности модуля вектора дисперсии по отношению к частоте. Более точно соответствуют поляризационной модовой дисперсии реального волокна аналитическая модель, описывающая вектор дисперсии как вращение по замкнутой кривой в пространстве Стокса, и модель, рассматривающая отдельно элементы матрицы, зависящие и не зависящие от частоты. Кроме того, с помощью модели вращения по замкнутой кривой в пространстве Стокса может быть получено аналитическое выражение уширения импульса, которое часто выбирается в качестве параметра качества системы связи. Недостатком всех представленных моделей является то, что они лишь аппроксимируют физический процесс, а не описывают точно, что связано с непредсказуемостью и стохастичностью дисперсии поляризационных мод.

Ключевые слова: оптический волновод, анизотропия, поляризационная модовая дисперсия (ПМД), матрица Джонса, ряд Тейлора, пространство Стокса.

Введение

Кварцевые оптические волноводы в процессе производства приобретают некоторую некруглость сердцевины и оболочки, несимметричность расположения сердцевины по отношению к оболочке, при прокладке подвержены сжатию, скручиванию, изгибам, при эксплуатации – влиянию температуры, сторонних магнитных и электрических полей, изменению состава кварца из-за ионов OH^{-}-группы. Перечисленные факторы являются причинами естественной и наведённой анизотропии, вследствие которой в оптическом волноводе возникает эффект двойного лучепреломления. В результате можно выделить две плоскости с максимальными девиациями показателя преломления в большую и меньшую сторону, из-за чего с различными скоростями начинают распространяться две поляризационные моды на взаимно-перпендикулярных осях и, как следствие, возникает дифференциальная групповая задержка, которая приводит к уширению и искажению формы оптического импульса, межсимвольной интерференции. Этот эффект, известный как поляризационная модовая дисперсия (ПМД) [1], на сегодняшний день является ключевым ограничивающим фактором для высокоскоростных оптических систем передачи большой протяжённости и, в особенности, для систем с битовыми скоростями 40 Гб/с на канал и выше [2 – 4], поскольку ведёт к сильному возрастанию битовой ошибки. Помимо негативного воздействия на информационные сигналы, ПМД может серьезно снизить эффективность оптических систем, например, усиления на основе вынужденного комбинационного рассеяния [5].

ПМД первого порядка определяется как разность групповых скоростей между двумя ортогональными состояниями поляризации [6], на которых скорость распространения максимальна и минимальна. Эти ортогональные состояния называют главными состояниями поляризации (ГСП), а разницу во времени прибытия между осями называют дифференциальной групповой задержкой (ДГЗ). Так, короткий импульс, подвергнутый влиянию ПМД, будет показывать уширение во временной области, которое зависит от входного состояния поляризации. В зависимости от степени совпадения входной поляризации с ГСП изменяется значение ПМД и, следовательно, длительность импульса.

Процесс изменения ПМД является стохастическим. Вследствие изменения местного двулучепреломления ДГЗ и ГСП изменяются во времени. Также для высокоскоростных систем нельзя пренебрегать процессами изменения ГСП и ДГЗ по спектру сигнала. Эти изменения называют ПМД высших порядков.

Чтобы определить ухудшение передаваемого сигнала, вызванное ПМД, необходимо знать передаточную функцию волокна, которая содержит частотную зависимость ДГЗ и ГСП. Удобным математическим аппаратом для теоретического определения системных ухудшений из-за ПМД является т.н. анализ собственных значений матрицы Джонса (JME, Jones Matrix Eigenanalysis) [6, 7] кварцевого волновода. Однако определение статистической характеристики такой матрицы является практически нерешабельной задачей. Альтернативным методом определения ПМД является характеристика в пространстве Стокса по среднему значению вектора дисперсии, статистические данные которого для первого и второго порядков известны [8, 9]. Однако по среднему значению вектора дисперсии может быть оценено только уширение оптического импульса [10]. Следовательно, нахождение аналитических соотношений между матрицей Джонса и вектором дисперсии является актуальной задачей [11].

За последние годы были разработаны несколько математических моделей для разложения ПМД выше первого порядка в матричном пространстве Джонса [12 − 19]. Ошибка в первой модели [12], предполагавшей, что одно из ГСП сонаправлено с одним из собственных векторов матрицы Джонса на любой частоте, привела к переоценке эффекта ПМД второго порядка в два раза. В работах [13, 14] эта ошибка была исправлена. В работе [13] предлагается матрица, собственные состояния которой вращаются и изменяются в пространстве Стокса с постоянной угловой скоростью, пропорциональной уровню деполяризации ГСП. Решение, корректное для случая вращения входного вектора дисперсии в экваториальной плоскости при сохранении постоянного модуля, предлагается в работе [14].

Альтернативное описание ПМД высших порядков, основанное на экспоненциальном показательном росте матрицы Джонса, было предложено в работах [15, 16]. Этот подход предполагает, что матрица является результатом перемножения нескольких матриц, по одной на каждый порядок ПМД, которые определяются как последовательные производные по частоте. Однако статистика параметров в этой модели ещё не известна. Разложение матрицы в ряд Тейлора для ПМД любого порядка [17] позволяет оценить важность каждого порядка при исследовании влияния ПМД. В работе [18] было получено точное описание матрицы, полученной для вращения вектора дисперсии по окружности с постоянным модулем, равным ДГЗ волокна, и угловой скоростью, равной уровню деполяризации ГСП.

В работе [20] передаточная матрица была уточнена на основе модели с разделением частотно-зависимых и независимых элементов.

1. Вектор дисперсии

В пространстве Стокса вектор дисперсии на выходном конце двулучепреломляющего волокна описывается как

$$\vec{\Omega}(\omega) = \Delta\tau(\omega)\cdot\hat{t}(\omega), \tag{1}$$

где ω – девиация от угловой частоты несущей. Для заданной ω $\Delta\tau$ – дифференциальная групповая задержка и $\hat{t}$ указывает направление медленного ГСП. Предполагая отсутствие поляризационно-зависимых потерь и независимость потерь от поляризации, электрические поля на входе и выходе волокна связаны следующей матрицей передачи T(ω):

$$T(\omega) = e^{-(\alpha(\omega)L + j\bar{\beta}(\omega)L)}U(\omega), \tag{2}$$

где $\alpha(\omega), \bar{\beta}(\omega)$ и L – постоянная распространения, постоянная фазы и длина волновода, соответственно, а $U(\omega)$ представляется матрицей Джонса [6]:

$$U(\omega) = \begin{vmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ -u_2^*(\omega) & u_1^*(\omega) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

причём $|u_1(\omega)|^2 + |u_2(\omega)|^2 = 1$. Частотная зависимость матрицы (3) определяется через матричное дифференциальное уравнение [16, 17]:

$$\frac{\mathrm{d}U(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = A(\omega)U(\omega), \tag{4}$$

где $A(\omega)$ – матрица вида:

$$A(\omega) = -\frac{j}{2}\begin{vmatrix} \Omega_1(\omega) & \Omega_2(\omega) - \Omega_3(\omega) \\ \Omega_2(\omega) + \Omega_3(\omega) & -\Omega_1(\omega) \end{vmatrix} \tag{5}$$

и Ω_i, $i = 1, 2, 3$ являются компонентами выходного вектора дисперсии $\vec{\Omega}(\omega)$. Этот вектор зависит от частоты и может быть записан в виде ряда Тейлора в следующей форме:

$$\vec{\Omega}(\omega) = \vec{\Omega}_0 + \vec{\Omega}_0'\omega + \ldots + \vec{\Omega}_0^{(n-1)}\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{6}$$

где производные от $\vec{\Omega}$ оцениваются на центральной частоте канала (ω=0). Ряд порядка $n-1$ соответствует аппроксимации ПМД порядка n.

2. Математические модели ПМД высших порядков

2.1. Простое разложение в ряд Тейлора

При известном соотношении между U и Ω (4), (5) используем (6), ограничиваясь вторым порядком [17]:

$$\vec{\Omega}(\omega) = \Delta\tau_0\hat{t} + (\Delta\tau_0'\hat{t} + \Delta\tau_0 p\hat{p})\omega, \tag{7}$$

где $\Delta\tau_0$ – ДГЗ волокна на центральной частоте, $\Delta\tau_0'$ – первая производная ДГЗ по частоте ω и $\vec{p} = p\hat{p} = \left.\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=0}$, где p – угловая скорость, или величина деполяризации ГСП. Кроме того, модель рассматривает усечённый степенной ряд $A(\omega)$ в окрестности ω=0:

$$A(\omega) \simeq \sum_{k=0}^{m}\omega^k A_k, \tag{8}$$

где коэффициенты матрицы

$$A_k = \frac{1}{k!}\left.\frac{\mathrm{d}^k A(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k}\right|_{\omega=0}$$

зависят от параметров вектора дисперсии и его производных. Поэтому уравнение (8) соответствует аппроксимации $m+1$ порядка ПМД и уравнение (4) позволяет найти решение для ПМД $m+1$ порядка.

Из-за структуры $U(\omega)$ в (3) можно решить следующее дифференциальное уравнение вместо (4):

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = A(\omega)\hat{u}(\omega), \tag{9}$$

где $\hat{u}(\omega)$ представляет первую колонку $U(\omega)$:

$$\hat{u}(\omega)=\begin{vmatrix} u_1(\omega) \\ -u_2^*(\omega) \end{vmatrix} \qquad (10)$$

и при $\omega=0$ равно:

$$\hat{u}(0)=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Для ПМД второго порядка получим:

$$A(\omega)\simeq A_0+\omega A_1, \qquad (11)$$

где A_0 и A_1 в матричном виде выглядят следующим образом:

$$A_0=j\frac{\Delta\tau_0}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

$$A_1=\frac{j}{2}\begin{vmatrix} \Delta\tau_0' & \Delta\tau_0 q_\omega' \\ \Delta\tau_0 q_\omega' & -\Delta\tau_0' \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Решение (9) даёт выражение для элементов матрицы, зависящих только от вектора дисперсии и его производных, чьи статистические свойства полностью известны.

2.2. Модель с показательным ростом

Согласно этой модели [15, 16], возможно математическое описание матрицы для ПМД любого порядка в экспоненциальной форме:

$$U(\omega)=U_0e^{\omega N_1}e^{\omega^2 N_2/2}e^{\omega^3 N_3/6}..., \qquad (14)$$

где $U_0=U(0)$, а параметры $N_k, k=1,2,3...$ являются комплексными матрицами, которые можно найти как произведение последовательных производных по ω члена, отвечающего за порядок, в (14) при $\omega=0$ на матрицу U_0^{-1}. При этом в (14) параметры роста экспоненты описываются как:

$$N_1=U_0^{-1}\lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{d}U(\omega)}{\mathrm{d}\omega}, \qquad (15)$$

$$N_2=U_0^{-1}\lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{d}^2U(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}-(N_1)^2. \qquad (16)$$

Запись (14) как произведения k показательных функций означает описание ПМД до порядка k.

Из уравнения (14), используя (4) и (5), можно вычислить вектор дисперсии:

$$\vec{\Omega}(\omega)=\begin{vmatrix} -\Delta\tau_0-\Delta\tau_0'\omega \\ -\Delta\tau_0 p\omega\cos(\Delta\tau_0\omega) \\ \Delta\tau_0 p\omega\sin(\Delta\tau_0\omega) \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Модуль вектора дисперсии, полученного в (17), тогда выглядит так:

$$\left|\vec{\Omega}\right|=\sqrt{\left(\Delta\tau_0+\Delta\tau_0'\omega\right)^2+\left(\Delta\tau_0 p\omega\right)^2}. \qquad (18)$$

2.3. Модель движения вектора в пространстве Стокса

Поведение ПМД порядков выше второго согласно модели с показательным ростом [15, 16] и модели с простым разложением в ряд Тейлора [17] неизвестно и, следовательно, необходимо их численное решение. Поэтому для описания ПМД был предложен математический аппарат, согласно которому выходной вектор дисперсии имеет постоянную величину $\Delta\tau_0$ и движется по окружности в пространстве Стокса с угловой скоростью p; соответствующее решение (4) было получено [18, 19]:

$$\vec{\Omega}=\left(-\Delta\tau_0\cos(p\omega),-\Delta\tau_0\sin(p\omega),0\right). \qquad (19)$$

Вводя уравнение (19) в (3) и (4), получаем систему двух связанных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\omega}=j\dfrac{\Delta\tau_0}{2}\left[u_1\cos(p\omega)-u_2^*\sin(p\omega)\right], \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2^*}{\mathrm{d}\omega}=-j\dfrac{\Delta\tau_0}{2}\left[u_1\sin(p\omega)-u_2^*\cos(p\omega)\right]. \end{cases} \qquad (20)$$

Решения системы уравнений (20) получаем в следующем виде:

$$\begin{cases} u_1(\omega)=\dfrac{1}{a}\left[p\sin\left(\dfrac{p}{2}\omega\right)\sin\left(\dfrac{a}{2}\omega\right)+a\cos\left(\dfrac{p}{2}\omega\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\omega\right)+j\Delta\tau_0\cos\left(\dfrac{p}{2}\omega\right)\sin\left(\dfrac{a}{2}\omega\right)\right], \\ u_2(\omega)=-\dfrac{1}{a}\left[-p\cos\left(\dfrac{p}{2}\omega\right)\sin\left(\dfrac{a}{2}\omega\right)+a\sin\left(\dfrac{p}{2}\omega\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\omega\right)-j\Delta\tau_0\sin\left(\dfrac{p}{2}\omega\right)\sin\left(\dfrac{a}{2}\omega\right)\right], \end{cases} \qquad (21)$$

где $a=\sqrt{\Delta\tau_0^2+p^2}$. Это решение даёт хорошую аппроксимацию ПМД всех порядков через $\Delta\tau_0$ и p, статистика которых известна [9].

2.4. Модель со случайным собственным состоянием поляризации

Модель [13] является коррекцией одного из первых расширений модели ПМД первого порядка [12]. Ошибочное предположение о совпадении направления одного из ГСП с одним из собственных векторов матрицы на любой частоте, допущенной в [10], приводит к переоценке ПМД второго порядка в два раза.

Модель предполагает решение матрицы в следующем виде:

$$U(\omega)=R^{-1}(\omega)D(\omega)R(\omega), \qquad (22)$$

где матрицы $D(\omega)$ и $R(\omega)$ отвечают за дисперсионные и вращательные свойства анизотропного оптического волновода:

$$D(\omega)=\begin{vmatrix} e^{j\varphi(\omega)/2} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi(\omega)/2} \end{vmatrix}, \tag{23}$$

$$R(\omega)=\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{1}{4}p\omega\right) & -\sin\left(\frac{1}{4}p\omega\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{4}p\omega\right) & \cos\left(\frac{1}{4}p\omega\right) \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Диагональные элементы матрицы D составлены из собственных значений матрицы U, столбцы матрицы R являются собственными векторами матрицы U. Дифференциальная задержка $\varphi(\omega)$ записывается в виде ряда Тейлора:

$$\varphi(\omega)=\Delta\tau_0\omega+\frac{1}{2}\Delta\tau_0'\omega^2+\ldots . \tag{25}$$

Тогда вектор дисперсии, выведенный из (24):

$$\vec{\Omega}(\omega)=\begin{vmatrix} -\varphi_\omega'\cos\left(\frac{p}{2}\omega\right)+\left(\frac{p}{2}\right)\sin(\varphi)\sin\left(\frac{p}{2}\omega\right) \\ -\varphi_\omega'\sin\left(\frac{p}{2}\omega\right)-\left(\frac{p}{2}\right)\sin(\varphi)\cos\left(\frac{p}{2}\omega\right) \\ \frac{p}{2}\big(1-\cos(\varphi)\big) \end{vmatrix}, \tag{26}$$

где $\varphi_\omega'=\Delta\tau_0+\Delta\tau_0'\omega$. Модуль такого вектора дисперсии:

$$\left|\vec{\Omega}\right|=\sqrt{\left(\Delta\tau_0+\Delta\tau_0'\omega\right)^2+p^2\sin\left(\Delta\tau_0\omega+\Delta\tau_0'\frac{\omega^2}{2}\right)}. \tag{27}$$

2.5. Модель с разделением частотно-зависимых и независимых элементов матрицы

Предполагается [20], что в окрестностях любой частоты ω можно разложить матрицу передачи $U(\omega)$ в произведение трёх матриц:

$$U(\omega_0+\Delta\omega)=W(\omega_0)D(\Delta\omega)V^{-1}(\omega_0), \tag{28}$$

где V и W – частотно-независимые преобразования, определяемые входным и выходным ГСП на частоте ω_0, а D отвечает за все дисперсионные эффекты, в том числе фазовые задержки первого порядка и дисперсию высших порядков. Поскольку $D(0)$ является единичной матрицей, то (28) может быть преобразовано:

$$D(\Delta\omega)=W^{-1}(\omega_0)U(\omega_0+\Delta\omega)U^{-1}(\omega_0)V(\omega_0). \tag{29}$$

Диагональные элементы d_{11} и $d_{22}=d_{11}^*$ матрицы D описывают все фазовые задержки и дисперсию высших порядков, а элементы d_{12} и $d_{21}=-d_{12}^*$ описывают частотно-зависимое связывание поляризационных мод между ГСП.

Для вычисления элементов матрицы D находится матрица $W=\{\hat{e}_+,\hat{e}_-\}$:

$$\hat{e}_\pm=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{1\pm p_x}{2}}\exp\left[-\frac{j}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{p_z}{p_y}\right)\right] \\ \sqrt{\frac{1\mp p_x}{2}}\exp\left[-\frac{j}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{p_z}{p_y}\right)\right] \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где p_x, p_y, p_z – элементы собственного вектора матрицы $H_1(\omega)=U^{-1}(\omega)\frac{\mathrm{d}U(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$. Подставляя (30) в (29), находятся элементы матрицы D:

$$d_{11}=\mathrm{Re}\{h_{11}(\omega_0)\}-j\hat{p}h(\omega_0), \tag{31}$$

$$d_{12}=\frac{\left[jh_\perp(\omega_0)-\hat{p}\times h_\perp(\omega_0)\right]}{\sqrt{1-p_x^2}}, \tag{32}$$

где h_{ij} – элементы матрицы

$$H=U(\omega_0+\Delta\omega)U^{-1}(\omega_0),$$

h – вещественный вектор Стокса:

$$h=-\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\{h_{11}(\omega_0)\} \\ \mathrm{Im}\{h_{12}(\omega_0)\} \\ \mathrm{Re}\{h_{12}(\omega_0)\} \end{pmatrix} \tag{33}$$

и $h_\perp=h-(\hat{p}h)\hat{p}$ – составляющая h, перпендикулярная p.

Кроме того, уравнения (31), (32) и $H_1(\omega)=U^{-1}(\omega)\frac{\mathrm{d}U(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$ позволяют представить матрицу D в виде ряда:

$$D(\omega_0)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\omega_0^n/n!, \tag{34}$$

где коэффициенты D_n выражают вектор ПМД порядка n и, например, для ПМД первого порядка коэффициент $D_1=-j\Delta\tau\sigma_1$, где σ_1 – соответствующая компонента т.н. спинового вектора.

2.6. Сравнение моделей

Представление поляризационной модовой дисперсии первого порядка как разложения в ряд Тейлора показывает, что $\vec{\Omega}_0$ и $\vec{\Omega}_0'$ в (17), (19) и (26) эквивалентны результату в (7). Однако уже производные второго порядка обнаруживают различия и равны $\vec{\Omega}_0''=\left(\frac{3}{4}\Delta\tau_0p^2,-\frac{3}{2}p\Delta\tau_0',\frac{1}{2}\Delta\tau_0^2p\right)$, $\vec{\Omega}_0''=\left(0,0,2\Delta\tau_0^2p\right)$ и $\vec{\Omega}_0''=\left(\Delta\tau_0^2p,0,0\right)$, соответственно.

Результаты, полученные моделями с простым разложением в ряд Тейлора и показательным расширением модуля вектора дисперсии, показывают неограниченный рост $\left|\vec{\Omega}\right|$ при увеличении частоты ω. Математически никаких противоречий нет, однако нарушается физический смысл. С другой стороны, принимая во внимание результаты (27) модели со случайным собственным состоянием и предполагая, что $\Delta\tau_0'$ мало по сравнению с другими параметрами, что реалистично в ВОСП [8], наблюдается предел значения $\left|\vec{\Omega}\right|$ при растущем ω. Этот факт обеспечивает лучшую математическую аппроксимацию вектора дисперсии реальных волокон [18, 19].

Исследования поведения оптических систем с точки зрения пороговой чувствительности [19] показали, что результаты, полученные при использовании первой модели хуже, чем в реальном случае из-за переоценки эффекта ПМД второго порядка. Это было подтверждено после коррекции в модели со случайным собственным состоянием поляризации.

Что касается модели с экспоненциальным расширением до второго порядка, где статистика известна, то она не даёт хорошей аппроксимации ПМД всех порядков. Таким образом, модель движения вектора в пространстве Стокса и модель с разделением частотно-зависимых и независимых элементов матрицы дают лучшую аппроксимацию в случае реального волокна.

3. Уширение импульса из-за ПМД

Уширение импульса часто используется как параметр качества системы, в том числе при анализе методик компенсации ПМД [21]. Среднеквадратическое уширение импульса в волокне с произвольным двойным лучепреломлением может быть определено следующим образом:

$$\tau^2 = \left\langle t^2 \right\rangle - \left\langle t \right\rangle^2, \tag{35}$$

где величина $\left\langle t^2 \right\rangle$ определяется так:

$$\left\langle t^n \right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n P(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{d}t}, \tag{36}$$

а $P(t)$ – мощность сигнала. Используя общую формулу уширения импульса, выведенную в [9], при входном гауссовом импульсе для модели движения вектора в пространстве Стокса получим следующий результат:

$$\tau^2 = \tau_0^2 + \frac{\Delta\tau_0^2}{4}\left[1 - \frac{1}{a^4}\left(s_{01}\alpha + s_{03}\beta\right)^2\right], \tag{37}$$

где τ_0 есть длительность импульса на входе, $\vec{s}_0 = \left(s_{01}, s_{02}, s_{03}\right) = \left(\cos 2\theta \cos 2\gamma,\ \sin 2\theta \cos 2\gamma,\ \sin 2\gamma\right)$ отвечает за входное состояние поляризации, а α и β определяются как

$$\alpha = \Delta\tau_0^2 + p\exp\left(-\frac{a^2}{8\tau_0^2}\right), \tag{38}$$

$$\beta = p\Delta\tau_0^2\left(1 - \exp\left(-\frac{a^2}{8\tau_0^2}\right)\right). \tag{39}$$

Если $p = 0$, то (37) сводится к хорошо известному случаю ПМД только первого порядка:

$$\tau_{ПМД1}^2 = \tau_0^2 + \frac{\Delta\tau_0^2}{4}\sin^2\rho, \tag{40}$$

где ρ – угол в пространстве Стокса между состоянием поляризации на входе волокна и медленным ГСП.

Из (37) можно обнаружить, что введение полной мощности на одно из двух ГСП, вообще, не обеспечивает минимального уширения импульса. Фактически минимальное уширение импульса достигается в трёх случаях:

1. $\theta = 0,\ \gamma = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$;
2. $\theta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$;
3. $\theta = -\frac{\pi}{2},\ \gamma = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

С другой стороны, всякое входное состояние поляризации, которое аннулирует последний член в (37), при удовлетворении условия эллиптичности $\gamma = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cos(2\theta)\right)$ показывает общий максимум уширения импульса:

$$\tau^2 = \tau_0^2 + \frac{\Delta\tau_0^2}{4}. \tag{41}$$

Эта ситуация соответствует максимальному уширению импульса, наблюдаемому в худшем случае ПМД первого порядка, и имеет место при входном состоянии поляризации, совпадающем с $\pm\hat{p}$.

Заключение

Модель движения вектора в пространстве Стокса и модель со случайным собственным состоянием поляризации показывают меньшую расходимость, что связано с ограниченным поведением модулей их векторов дисперсии по частоте. Фактически модель со случайным собственным состоянием поляризации показывает неограниченное поведение из-за присутствия производной ДГЗ; однако ситуации, где это является критичным фактором, случаются статистически редко. С другой стороны, модель вектора дисперсии как простого разложения в ряд Тейлора и экспоненциальная модель не дают хороших результатов по аппроксимации ПМД высших порядков из-за неограниченного поведения по частоте модулей их векторов дисперсии. Для аналитического описания уширения импульса была использована модель движения вектора в пространстве Стокса, так как она требует только два параметра ПМД: дифференциальная групповая задержка волокна и величина деполяризации главного состояния поляризации, – статистика которых достоверно известна.

Поскольку точная модель ПМД более интересна в эксплуатации, чем в лабораторных условиях, то указанные модели, построенные без учёта физической основы явления, а именно двойного лучепреломления, не имеют практической значимости, а их применение в приборах некорректно.

Литература (References)

1. **Rashleigh, S.C.** Polarization mode dispersion in single-mode fibers / S.C. Rashleigh, R. Ulrich // Opt. Lett. – 1978. – V. 3. – P. 60-63.
2. **Matera, F.** Field demonstration of 40 Gb/s soliton transmission with alternate polarizations / F. Matera, M. Settembre, M. Tamburrini, F. Favre, D. Le Guen, T. Georges, M. Henry, G. Michaud, P. Franco, A. Shiffini, M. Romagnoli, M. Guglielmucci, S. Casceli // J. Lightwave Technol. – 1999. – V. 17. – P. 2225-2234.
3. **Kolltveit, E.** Single wavelength 40 Gb/s soliton field transmission experiment over 400 km of installed fiber / E. Kollweit, P.A. Andrekson, J. Brentel, B.E. Olsson, B. Bakhshi, J. Hansryd, P.O. Hedekvist, M. Karlsson, H. Sunnerud, J. Li. // Electron. Lett. – 1999. – V. 35. – P. 75-76.
4. **Sunnerud, H.** Polarization-mode dispersion in high-speed fiber-optic transmission systems / H. Sunnerud, M. Karlsson, C. Xie, P.A. Andrekson // J. Lightwave Technol. – 2002. – V. 20. – P. 2204-2219.
5. **Lin, Q.** Polarization mode dispersion-induced fluctuations during Raman amplifications in optical fibers / Q. Lin, Govind P. Agrawal // Opt. Lett. – 2002. – V. 27. – P. 2194-2196.
6. **Poole, C.D.** Phenomenological approach to polarization dispersion in long single-mode fibres / C.D. Poole, R.E. Wagner // Electron. Lett. – 1986. – V. 22. – P. 1029-1030.
7. **Gerrard, A.** Introduction to matrix methods in optics / A. Gerrard, J.M. Burch. – London: A. Wiley-Interscience pub., John Wiley & Sons, 1975. – 344 p.
8. **Foschini, G.J.** Statistical theory of polarization dispersion in single mode fibers / G.J. Foschini, C.D. Poole // J. Lightwave Technol. – 1991. – V. 9. – P. 1439-1456.
9. **Foschini, G.J.** The statistics of PMD-induced chromatic fiber dispersion / G.J. Foschini, R.M. Jopson, L.E. Nelson, H. Kogelnik // J. Lightwave Technol. – 1999. – V. 17. – P. 1560-1565.
10. **Karlsson, M.** Polarization mode dispersion-induced pulse broadening in optical fibers / M. Karlsson // Opt. Lett. – 1998. – V. 23. – P. 688-690.
11. **Ibragimov, E.** Statistical correlation between first and second-order PMD / E. Ibragimov, G. Shtengel, S. Suh // J. Lightwave Technol. – 2002. – V. 20. – P. 586-590.
12. **Bruyère, F.** Impact of first and second order PMD in optical digital transmission systems / F. Bruyère // Opt. Fiber Technol. – 1996. – V. 2. – P. 269-280.
13. **Kogelnik, H.** Jones matrix for second order polarization mode dispersion / H. Kogelnik, L.E. Nelson, J.P. Gordon, R.M. Jopson // Opt. Lett. – 2000. – V. 25. – P. 19-21.
14. **Penninckx, D.** Jones matrix of polarization mode dispersion / D. Penninckx, V. Morenas // Opt. Lett. – 1999. – V. 24. – P. 875-877.
15. **Eyal, A.** Representation of second order polarization mode dispersion / A. Eyal, W.K. Marshall, M. Tur, Y. Yariv // Electron. Lett. – 1999. – V. 35. – P. 1658-1659.
16. **Eyal, A.** Statistical determination of the length dependence of high-order polarization-mode dispersion / A. Eyal, Y. Li, W.K. Marshall, A. Yariv // Opt. Lett. – 2000. – V. 25. – P. 875-877.
17. **Forestieri, E.** Exact evaluation of the Jones matrix of a fiber in the presence of polarization mode dispersion of any order / E. Forestrieri, L. Vincetti // J. Lightwave Technol. – 2001. – V. 19. – P. 1898-1909.
18. **Orlandini, A.** A simple and useful model for Jones matrix to evaluate higher order polarization mode dispersion effects / A. Orlandini, L. Vincetti // IEEE Photon. Technol. Lett. – 2001. – V. 13. – P. 1176-1178.
19. **Orlandini, A.** Analytical evaluation of optical system impairments caused by high-order polarization mode dispersion effects / A. Orlandini, L. Vincetti // Microwave Optical Technol. Lett. – 2001. – V. 31. – P. 449-453.
20. **Heismann, F.** Accurate Jones matrix expansion for all orders of polarization mode dispersion / F. Heismann // Opt. Lett. – 2003. – V. 28. – P. 2013-2015.
21. **Ferreira, M.F.** Polarization mode dispersion in high-speed optical communication systems / M.F. Ferreira, S.V. Latas, M.H. Sousa, A.N. Pinto, J.F. Rocha, P.S. André, N.J. Muga, R.N. Nogueira, J.E. Machado // Fiber Integ. Opt. – 2005. – V. 24. – P. 261-28.

HIGHER-ORDER POLARIZATION MODE DISPERSION MATHEMATICAL MODELS FOR SILICA ANISOTROPIC OPTICAL WAVEGUIDE

M.R. Musakaev, A.Kh. Sultanov
Ufa State Aviation Technical University

Abstract

The comparative analysis of higher-order polarization mode dispersion Jones-matrices-based mathematical models is presented. It is shown that the limited exponential model and the Taylor-series-based model do not give a good approximation of higher-order polarization mode dispersion due to infinite of dispersion vector module versus frequency. Analytical model, circumscribing dispersion vector as closed-curve-rotating in Stokes space, and the model, considering independently frequency-dependent and independent matrix elements, correspond more precisely to real fiber polarization mode dispersion. In addition, an analytical expression of pulse broadening, often chosen as quality parameter for communication systems, can be obtained with the model of dispersion-vector-rotating in Stokes space. All mentioned models shortcoming is that they give a purely mathematical approximate description without reference to the physics of the process.

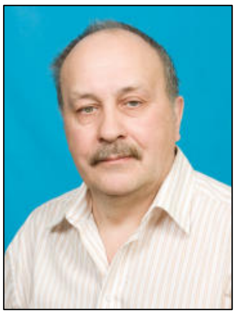
Key words: optical waveguide, anisotropy, polarization mode dispersion (PMD), Jones matrix, Taylor series, Stokes space.

Сведения об авторах

Мусакаев Марат Радикович, 1988 года рождения. В 2010 году окончил Уфимский государственный авиационный технический университет по специальности «Многоканальные телекоммуникационные системы». Аспирант кафедры «Телекоммуникационные системы». Область научных интересов: волоконная оптика, распространение предельно коротких импульсов, искажение импульсов в оптических волноводах.

E-mail: musakaevm@yandex.ru .

Marat Radikovich Musakaev (b. 1988) graduated from Ufa State Aviation Technical University, majoring in «Multichannel telecommunication systems». He is currently postgraduate student of the Chair for Telecommunication systems at USATU. His research interests are focused on fiber optics, extremely short pulse propagation, optical pulse distortions in fiber.



Султанов Альберт Ханович, 1950 года рождения. В 1973 году с отличием окончил Новосибирский электротехнический институт связи НЭИС (ныне – Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики СибГУТИ) по специальности «Многоканальная электросвязь». Доктор технических наук (1996 год), профессор, работает заведующим кафедрой «Телекоммуникационные системы» Уфимского государственного авиационного технического университета УГАТУ. Директор Института инфокоммуникационных технологий, созданного на базе кафедры ТС. Является членом международного научного общества *SPIE*, действительным членом Академии телекоммуникаций. Специалист в области телекоммуникаций, оптических телекоммуникационных систем, оптоэлектроники, аэрокосмических систем, микроспутниковой связи. В списке научных работ А.Х. Султанова около 240 статей, 8 монографий, 30 авторских свидетельств и патентов.

E-mail: tks@ugatu.ac.ru .

Albert Khanovich Sultanov (b. 1950) graduated with honours (1973) from the Novosibirsk Electrotechnical Institute of Telecommunications (at present Siberia State University of Telecommunications and Informatics), majoring in «Multichannel electrocommunication». He received his Doctor in Technical Sciences (1996) from Ufa state aviation technical university (USATU). He is the Head of Chair for Telecommuncation systems at USATU. He is also the director of the Institute of Infocommunication Technology based on the Chair for Telecommunication systems. He is a *SPIE* member, Academic of Telecommunication Academy. He is co-author of about 240 scientific papers, 8 monographs, and 30 inventions and patents. Current research interests include telecommunications, optical telecommunication systems, optoelectronics, aerospace systems, microsatellite communication.

Поступила в редакцию 21 февраля 2012 г.