АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА РЭЛЕЯ–ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ И ГИРОТРОПНОЙ СРЕД

Хонина С.Н., Харитонов С.И.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

В работе интегральные представления решений системы уравнений Максвелла для анизотропных и гиротропных сред с разделимостью продольных и поперечных компонент записаны в завершённой аналитической форме. В частных случаях полученные интегральные выражения сведены к аналогу интеграла Рэлея–Зоммерфельда.

Ключевые слова: анизотропная и гиротропная среды, дифракция, уравнения Максвелла, разложение по плоским волнам, аналог интеграла Рэлея–Зоммерфельда, эффект Фарадея.

Введение

Всё больший интерес с практической точки зрения вызывают оптические устройства, позволяющие преобразовывать свойства электромагнитного излучения. Среди наиболее просто реализуемых – поляризационные и модовые преобразования.

Распространение лазерных мод высокого порядка в среде с сильной анизотропией приводит к сложным поляризационно-модовым преобразованиям [1–4]. Причём для анализа таких явлений часто используется параксиальная модель распространения [5, 6].

Заметим, что взаимодействие поляризации и пространственного распределения электромагнитного поля происходит также в изотропной среде в непараксиальном режиме, в частности, при острой фокусировке [7–9].

Непараксиальный режим в анизотропной среде позволяет обнаружить более тонкие эффекты [10–13]. Как правило, в этом случае используется разложение по плоским волнам [14–16], которое в общем случае при численной реализации требует четверного интегрирования по пространственным и спектральным переменным. Для уменьшения времени расчёта двойной интеграл по спектральным переменным можно асимптотически вычислить методом стационарной фазы [17]. Причём такая асимптотика позволяет получать достаточно точные результаты уже на расстоянии нескольких длин волн [18].

В данной работе рассмотрен непараксиальный интегральный метод расчёта распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах. Интегральное выражение для сред с разделимостью продольных и поперечных компонент записано в завершённой аналитической форме. В частных случаях данное интегральное преобразование сведено к аналогу интеграла Рэлея–Зоммерфельда.

1. Монохроматическое поле в анизотропной среде

Уравнения Максвелла для области, свободной от источников, записываются в виде (в системе СГС)

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \\ \nabla\times\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \\ \nabla\mathbf{B} = 0, \\ \nabla\mathbf{D} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В однородной анизотропной среде, описываемой тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости

$$\ddot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \tag{2а}$$

$$\ddot{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \tag{2б}$$

имеется следующая зависимость:

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} = \ddot{\mu}\mathbf{H}, \\ &\mathbf{D} = \ddot{\varepsilon}\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для монохроматического поля

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}(x,y,z)\exp(-i\omega t), \\ &\mathbf{H}(x,y,z,t) = \mathbf{H}(x,y,z)\exp(-i\omega t). \end{aligned} \tag{4}$$

уравнения Максвелла (1)–(3) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = ik_0\ddot{\mu}\mathbf{H}, \\ \nabla\times\mathbf{H} = -ik_0\ddot{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \nabla\left(\ddot{\mu}\mathbf{H}\right) = 0, \\ \nabla\left(\ddot{\varepsilon}\mathbf{E}\right) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda_0$, λ_0 – длина волны в вакууме.

Из первых двух уравнений системы (5) получаем 6 уравнений для 6 компонент:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial x}+ik_0\left(\mu_{yx}H_x+\mu_{yy}H_y+\mu_{yz}H_z\right),\\
&\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial y}-ik_0\left(\mu_{xx}H_x+\mu_{xy}H_y+\mu_{xz}H_z\right),\\
&H_z=-\frac{i}{k_0\mu_{zz}}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu_{zz}}\left(\mu_{zx}H_x+\mu_{zy}H_y\right),\\
&\frac{\partial H_x}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial x}-ik_0\left(\varepsilon_{yx}E_x+\varepsilon_{yy}E_y+\varepsilon_{yz}E_z\right),\\
&\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial y}+ik_0\left(\varepsilon_{xx}E_x+\varepsilon_{xy}E_y+\varepsilon_{xz}E_z\right),\\
&E_z=\frac{i}{k_0\varepsilon_{zz}}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\left(\varepsilon_{zx}E_x+\varepsilon_{zy}E_y\right).
\end{aligned}\tag{6}$$

Систему (6) можно свести к 4 уравнениям для 4 поперечных компонент. При использовании разложения по плоским волнам

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int f\left(\alpha,\beta\right)\times\\
&\times\exp\left[ik_0\left(\alpha x+\beta y+\gamma\left(\alpha,\beta\right)z\right)\right]\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta
\end{aligned}\tag{7}$$

эта система в пространственно-частотном представлении будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
\left(\gamma+\frac{\alpha\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\beta\mu_{yz}}{\mu_{zz}}\right) & \left(\frac{\alpha\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}-\frac{\alpha\mu_{yz}}{\mu_{zz}}\right) & \left(-\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}}-\mu_{yx}+\frac{\mu_{yz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}}\right) & \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon_{zz}}-\mu_{yy}+\frac{\mu_{yz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}}\right)\\
\left(\frac{\beta\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}-\frac{\beta\mu_{xz}}{\mu_{zz}}\right) & \left(\gamma+\frac{\beta\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\alpha\mu_{xz}}{\mu_{zz}}\right) & \left(-\frac{\beta^2}{\varepsilon_{zz}}+\mu_{xx}-\frac{\mu_{xz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}}\right) & \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}}+\mu_{xy}-\frac{\mu_{xz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}}\right)\\
\left(\frac{\alpha\beta}{\mu_{zz}}+\varepsilon_{yx}-\frac{\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}\right) & \left(-\frac{\alpha^2}{\mu_{zz}}+\varepsilon_{yy}-\frac{\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}\right) & \left(\gamma+\frac{\alpha\mu_{zx}}{\mu_{zz}}+\frac{\beta\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}}\right) & \left(\frac{\alpha\mu_{zy}}{\mu_{zz}}-\frac{\alpha\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}}\right)\\
\left(\frac{\beta^2}{\mu_{zz}}-\varepsilon_{xx}+\frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}\right) & \left(-\frac{\alpha\beta}{\mu_{zz}}-\varepsilon_{xy}+\frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}\right) & \left(\frac{\beta\mu_{zx}}{\mu_{zz}}-\frac{\beta\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}}\right) & \left(\gamma+\frac{\beta\mu_{zy}}{\mu_{zz}}+\frac{\alpha\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}}\right)
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} e_x\left(\alpha,\beta\right)\\ e_y\left(\alpha,\beta\right)\\ h_x\left(\alpha,\beta\right)\\ h_y\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}=0,\tag{8}$$

где $e_{x,y}(\alpha,\beta)$, $h_{x,y}(\alpha,\beta)$ – коэффициенты разложения (7) поперечных компонент электрического и магнитного поля.

Далее систему (8) можно решить численно, определяя собственные значения $\gamma_j\left(\alpha,\beta\right)$, $j=\overline{1,4}$ из равенства нулю определителя матрицы. Линейная комбинация 4 поперечных собственных векторов обеспечивает общее решение задачи распространения в среде, заданной тензорами (2). Продольные компоненты выражаются через поперечные из (5).

2. Интегральный оператор распространения электромагнитных волн в анизотропной и гиротропной среде с разделимостью компонент

Рассмотрим среду, описываемую следующими тензорами:

$$\ddot{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix},\tag{9а}$$

$$\ddot{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_{xx} & \mu_{xy} & 0\\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{zz}\end{pmatrix}.\tag{9б}$$

Заметим, что в общем случае значения в (9) могут быть комплексными и $\varepsilon_{xy}\neq\varepsilon_{yx}$, $\mu_{xy}\neq\mu_{yx}$, что позволяет описывать различные типы сред, в том числе гиротропную среду [19].

В этом случае система (8) разбивается на 2 подсистемы [20]:

$$\begin{aligned}
&\gamma\mathbf{e}_\perp=\mathbf{A}\mathbf{h}_\perp,\\
&\gamma\mathbf{h}_\perp=\mathbf{B}\mathbf{e}_\perp,
\end{aligned}\tag{10}$$

где $\mathbf{e}_\perp=\begin{pmatrix}e_x(\alpha,\beta)\\ e_y(\alpha,\beta)\end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_\perp=\begin{pmatrix}h_x(\alpha,\beta)\\ h_y(\alpha,\beta)\end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}}+\mu_{yx} & -\frac{\alpha^2}{\varepsilon_{zz}}+\mu_{yy}\\ \frac{\beta^2}{\varepsilon_{zz}}-\mu_{xx} & -\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}}-\mu_{xy}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-\frac{\alpha\beta}{\mu_{zz}}-\varepsilon_{yx} & \frac{\alpha^2}{\mu_{zz}}-\varepsilon_{yy}\\ -\frac{\beta^2}{\mu_{zz}}+\varepsilon_{xx} & \frac{\alpha\beta}{\mu_{zz}}+\varepsilon_{xy}\end{pmatrix}.$$

Подставляя в (10) первое уравнение во второе, получим уравнение относительно только поперечных компонент электрического поля

$$\gamma^2\mathbf{e}_\perp=\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{e}_\perp,\tag{11}$$

из которого, обозначая $\mathbf{M}=\mathbf{AB}$, следует уравнение на собственные значения:

$$\begin{vmatrix}M_{11}-\gamma^2 & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}-\gamma^2\end{vmatrix}=0.\tag{12}$$

Решением уравнения (12) являются следующие выражения:

$$\gamma_{1,2}^2=\frac{\left(M_{11}+M_{22}\right)\pm\sqrt{\left(M_{11}-M_{22}\right)^2+4M_{12}M_{21}}}{2},\tag{13}$$

где

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[-\left(\alpha\beta+\varepsilon_{zz}\mu_{yx}\right)\left(\alpha\beta+\mu_{zz}\varepsilon_{yx}\right)+\left(\alpha^2-\varepsilon_{zz}\mu_{yy}\right)\left(\beta^2-\mu_{zz}\varepsilon_{xx}\right)\right],\\
M_{12} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[\left(\alpha\beta+\varepsilon_{zz}\mu_{yx}\right)\left(\alpha^2-\mu_{zz}\varepsilon_{yy}\right)-\left(\alpha\beta+\mu_{zz}\varepsilon_{xy}\right)\left(\alpha^2-\varepsilon_{zz}\mu_{yy}\right)\right],\\
M_{21} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[-\left(\alpha\beta+\mu_{zz}\varepsilon_{yx}\right)\left(\beta^2-\varepsilon_{zz}\mu_{xx}\right)+\left(\alpha\beta+\varepsilon_{zz}\mu_{xy}\right)\left(\beta^2-\mu_{zz}\varepsilon_{xx}\right)\right],\\
M_{22} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[\left(\alpha^2-\mu_{zz}\varepsilon_{yy}\right)\left(\beta^2-\varepsilon_{zz}\mu_{xx}\right)-\left(\alpha\beta+\varepsilon_{zz}\mu_{xy}\right)\left(\alpha\beta+\mu_{zz}\varepsilon_{xy}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Будем далее рассматривать только положительные значения собственных значений (13), которые соответствуют распространению волн в положительном направлении оптической оси (вправо).

Из уравнения (11) получается связь поперечных электрических компонент для каждого собственного значения, в частности:

$$
e_{jy}\left(\alpha,\beta\right)=-\frac{\left(M_{11}-\gamma_j^2\left(\alpha,\beta\right)\right)}{M_{12}}e_{jx}\left(\alpha,\beta\right). \tag{15}
$$

При этом один из векторов в паре выбирается произвольно, например, можно положить [20]:

$$
\begin{aligned}
e_{jx}\left(\alpha,\beta\right) &= M_{12},\\
e_{jy}\left(\alpha,\beta\right) &= \gamma_j^2\left(\alpha,\beta\right)-M_{11}.
\end{aligned}
\tag{16а}
$$

Также можно использовать другое соотношение:

$$
\begin{aligned}
e_{jx}\left(\alpha,\beta\right) &= M_{21},\\
e_{jy}\left(\alpha,\beta\right) &= \gamma_j^2\left(\alpha,\beta\right)-M_{22}
\end{aligned}
\tag{16б}
$$

или суперпозиции полученных векторов.

Из второго уравнения (10) получаем выражение для поперечных магнитных компонент, а из уравнений (5) – для продольных компоненты электромагнитной волны ($j=1,2$):

$$
\begin{aligned}
h_{jx}\left(\alpha,\beta\right) &= \frac{-\left(\alpha\beta+\mu_{zz}\varepsilon_{yx}\right)e_{jx}\left(\alpha,\beta\right)+\left(\alpha^2-\mu_{zz}\varepsilon_{yy}\right)e_{jy}\left(\alpha,\beta\right)}{\mu_{zz}\gamma_j\left(\alpha,\beta\right)},\\
h_{jy}\left(\alpha,\beta\right) &= \frac{-\left(\beta^2-\mu_{zz}\varepsilon_{xx}\right)e_{jx}\left(\alpha,\beta\right)+\left(\alpha\beta+\mu_{zz}\varepsilon_{xy}\right)e_{jy}\left(\alpha,\beta\right)}{\mu_{zz}\gamma_j\left(\alpha,\beta\right)},\\
e_{jz}\left(\alpha,\beta\right) &= -\frac{\left(\alpha\varepsilon_{xx}+\beta\varepsilon_{yx}\right)e_{jx}\left(\alpha,\beta\right)+\left(\alpha\varepsilon_{xy}+\beta\varepsilon_{yy}\right)e_{jy}\left(\alpha,\beta\right)}{\varepsilon_{zz}\gamma_j\left(\alpha,\beta\right)},\\
h_{jz}\left(\alpha,\beta\right) &= -\frac{\beta e_{jx}\left(\alpha,\beta\right)-\alpha e_{jy}\left(\alpha,\beta\right)}{\mu_{zz}}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Две волны в (15)-(17) соответствуют обыкновенной (*j*=1) и необыкновенной (*j*=2) волнам.

Следуя работе [20], рассмотрим общее решение, используя линейную комбинацию поперечных компонент электрического поля:

$$
\begin{pmatrix} P_x\left(\alpha,\beta\right)\\ P_y\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}=
= c_1\left(\alpha,\beta\right)\begin{pmatrix} e_{1x}\left(\alpha,\beta\right)\\ e_{1y}\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}+c_2\left(\alpha,\beta\right)\begin{pmatrix} e_{2x}\left(\alpha,\beta\right)\\ e_{2y}\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}, \tag{18}
$$

где функции $c_1\left(\alpha,\beta\right)$, $c_2\left(\alpha,\beta\right)$ подлежат определению.

Получить значение этих функций можно из заданного распределения поперечных компонент электрического вектора в плоскости z=0:

$$
\begin{pmatrix} E_x(x,y,0)\\ E_y(x,y,0)\end{pmatrix}=\iint\left[c_1\left(\alpha,\beta\right)\begin{pmatrix} e_{1x}\left(\alpha,\beta\right)\\ e_{1y}\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}+
+c_2\left(\alpha,\beta\right)\begin{pmatrix} e_{2x}\left(\alpha,\beta\right)\\ e_{2y}\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}\right]\exp\left\{ik\left[\alpha x+\beta y\right]\right\}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{19}
$$

Из (18) и (19) получаем:

$$
\begin{pmatrix} c_1\left(\alpha,\beta\right)\\ c_2\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}=
=\begin{pmatrix} e_{1x}\left(\alpha,\beta\right) & e_{2x}\left(\alpha,\beta\right)\\ e_{1y}\left(\alpha,\beta\right) & e_{2y}\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} P_x\left(\alpha,\beta\right)\\ P_y\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}, \tag{20}
$$

где

$$
\begin{pmatrix} P_x\left(\alpha,\beta\right)\\ P_y\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}=
=\frac{1}{\lambda^2}\iint\begin{pmatrix} E_x(x,y,0)\\ E_y(x,y,0)\end{pmatrix}\exp\left\{-ik\left[\alpha x+\beta y\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{21}
$$

Таким образом,

$$
\begin{pmatrix} c_1\left(\alpha,\beta\right)\\ c_2\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}=
=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} e_{2y}\left(\alpha,\beta\right)P_x\left(\alpha,\beta\right)-e_{2x}\left(\alpha,\beta\right)P_y\left(\alpha,\beta\right)\\ e_{1x}\left(\alpha,\beta\right)P_y\left(\alpha,\beta\right)-e_{1y}\left(\alpha,\beta\right)P_x\left(\alpha,\beta\right)\end{pmatrix}, \tag{22}
$$

где $\Delta=e_{1x}\left(\alpha,\beta\right)e_{2y}\left(\alpha,\beta\right)-e_{1y}\left(\alpha,\beta\right)e_{2x}\left(\alpha,\beta\right)$.

С учётом полученных выше выражений интегральный оператор распространения записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}(u,v,z)\\ \mathbf{H}(u,v,z)\end{pmatrix}=$$
$$=\iint\left\{c_1(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{1E}(\alpha,\beta)\\ \mathbf{G}_{1H}(\alpha,\beta)\end{pmatrix}\mathbf{e}_{1\perp}(\alpha,\beta)\times\right.$$
$$\times\exp\left[ikz\gamma_1(\alpha,\beta)\right]+c_2(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{2E}(\alpha,\beta)\\ \mathbf{G}_{2H}(\alpha,\beta)\end{pmatrix}\times \tag{23}$$
$$\left.\times\mathbf{e}_{2\perp}(\alpha,\beta)\exp\left[ikz\gamma_2(\alpha,\beta)\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left[ik(\alpha u+\beta v)\right]\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,$$

где

$$\mathbf{G}_{jE}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\dfrac{\alpha\varepsilon_{xx}+\beta\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_{zz}\gamma_j(\alpha,\beta)} & -\dfrac{\alpha\varepsilon_{xy}+\beta\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}\gamma_j(\alpha,\beta)}\end{pmatrix}, \tag{24}$$

$j=1,2$,

$$\mathbf{G}_{jH}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\mu_{zz}}\begin{pmatrix}-\dfrac{\alpha\beta+\varepsilon_{yx}\mu_{zz}}{\gamma_j(\alpha,\beta)} & \dfrac{\alpha^2-\varepsilon_{yy}\mu_{zz}}{\gamma_j(\alpha,\beta)}\\ \dfrac{-\beta^2+\varepsilon_{xx}\mu_{zz}}{\gamma_j(\alpha,\beta)} & \dfrac{\alpha\beta+\varepsilon_{xy}\mu_{zz}}{\gamma_j(\alpha,\beta)}\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}, \tag{25}$$

$j=1,2$.

Выражения (23)-(25) можно записать в другом виде:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}(u,v,z)\\ \mathbf{H}(u,v,z)\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{2}\iint\begin{pmatrix}\mathbf{e}_j(\alpha,\beta)\\ \mathbf{h}_j(\alpha,\beta)\end{pmatrix}\times$$
$$\times\left[\mathbf{w}_j(\alpha,\beta)^T\,\mathbf{P}_\perp(\alpha,\beta)\right]\times \tag{26}$$
$$\times\exp\left[ik\left(\alpha u+\beta v+\gamma_j(\alpha,\beta)z\right)\right]\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,$$

где $\mathbf{w}_j(\alpha,\beta)^T\,\mathbf{P}_\perp(\alpha,\beta)=c_j(\alpha,\beta)$, $\mathbf{P}_\perp(\alpha,\beta)$ – спектральный вектор из (21),

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1(\alpha,\beta)^T&=\Delta^{-1}\left(e_{2y}(\alpha,\beta),-e_{2x}(\alpha,\beta)\right),\\ \mathbf{w}_2(\alpha,\beta)^T&=\Delta^{-1}\left(-e_{1y}(\alpha,\beta),e_{1x}(\alpha,\beta)\right),\end{aligned} \tag{27}$$

$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_j(\alpha,\beta)\\ \mathbf{h}_j(\alpha,\beta)\end{pmatrix}$ – собственные (поляризационные) вектора, определённые в (17).

Подставляя в (26) выражение (21) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}(u,v,z)\\ \mathbf{H}(u,v,z)\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{2}\iint\iint\begin{pmatrix}\mathbf{e}_j(\alpha,\beta)\\ \mathbf{h}_j(\alpha,\beta)\end{pmatrix}\times$$
$$\times\left[\mathbf{w}_j(\alpha,\beta)^T\,\mathbf{E}_\perp(x,y,0)\right]\exp\left\{ik\left[\alpha(u-x)+\right.\right. \tag{28}$$
$$\left.\left.+\beta(v-y)+\gamma_j(\alpha,\beta)z\right]\right\}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Внутренний интеграл можно вычислить методом стационарной фазы [17].

3. Аналог интеграла Рэлея–Зоммерфельда для анизотропной среды

Рассмотрим наличие только диэлектрической анизотропии, т.е. $\mu_{xy}=\mu_{yx}=0$, $\mu_{xx}=\mu_{yy}=\mu_{zz}=\mu$. Заметим, что для анизотропных кристаллов тензоры вида (9*a*) имеют действительные значения и должны удовлетворять условию симметрии: $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}$. Кроме того, такие тензоры приводятся к диагональному виду

$$\ddot{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix} \tag{29}$$

поворотом на угол ψ [21]

$$\tan 2\psi=\frac{2\varepsilon_{xy}}{\left(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xx}\right)},$$
$$\varepsilon_1=\frac{\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)}{2}-\frac{\varepsilon_{xy}}{\sin 2\psi}, \tag{30}$$
$$\varepsilon_2=\frac{\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)}{2}+\frac{\varepsilon_{xy}}{\sin 2\psi},$$
$$\varepsilon_3=\varepsilon_{zz}.$$

Для тензора вида (29) при изотропной магнитной проницаемости элементы матрицы **M** примут следующий вид:

$$\begin{aligned}M_{11}&=\varepsilon_1\mu-\left(\beta^2+\alpha^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right),\\ M_{12}&=\alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right),\\ M_{21}&=\alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right),\\ M_{22}&=\varepsilon_2\mu-\left(\alpha^2+\beta^2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right).\end{aligned} \tag{31}$$

Собственные значения:

$$\gamma_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left\{-\alpha^2\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)-\right.$$
$$\left.-\beta^2\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)+\mu\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\pm\sqrt{T_a}\right\}, \tag{32}$$

где

$$T_a=\left[\alpha^2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)+\beta^2\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)\right]^2+$$
$$+\mu^2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+ \tag{33}$$
$$+2\left[\alpha^2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)-\beta^2\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)\right]\mu\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right).$$

Выражения для поперечных электрических векторов:

$$\begin{aligned}&e_{jx}(\alpha,\beta)=\alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right),\\&e_{jy}(\alpha,\beta)=\gamma_j^2(\alpha,\beta)+\left(\beta^2+\alpha^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)-\varepsilon_1\mu\end{aligned} \tag{34а}$$

или

$$\begin{aligned}&e_{jx}(\alpha,\beta)=\alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right),\\&e_{jy}(\alpha,\beta)=\gamma_j^2(\alpha,\beta)-\left(\alpha^2+\beta^2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)-\varepsilon_2\mu.\end{aligned} \tag{34б}$$

Для остальных компонент:

$$\begin{aligned}&h_{jx}(\alpha,\beta)=\frac{-\alpha\beta e_{jx}(\alpha,\beta)+\left(\alpha^2-\mu\varepsilon_2\right)e_{jy}(\alpha,\beta)}{\mu\gamma_j(\alpha,\beta)},\\&h_{jy}(\alpha,\beta)=\frac{-\left(\beta^2-\mu\varepsilon_1\right)e_{jx}(\alpha,\beta)+\alpha\beta e_{jy}(\alpha,\beta)}{\mu\gamma_j(\alpha,\beta)},\\&e_{jz}(\alpha,\beta)=-\frac{\alpha\varepsilon_1 e_{jx}(\alpha,\beta)+\beta\varepsilon_2 e_{jy}(\alpha,\beta)}{\varepsilon_3\gamma_j(\alpha,\beta)},\\&h_{jz}(\alpha,\beta)=-\frac{\beta e_{jx}(\alpha,\beta)-\alpha e_{jy}(\alpha,\beta)}{\mu}.\end{aligned} \tag{35}$$

Заметим, что выражение для собственных значений (32) значительно упростится, если под корнем можно выделить полный квадрат, а также если $M_{12}=0$ или $M_{21}=0$. Такие ситуации возникают, когда анизотропная среда является одноосной, т.е. два из трёх значений диэлектрической проницаемости совпадают.

В общем же случае применить метод стационарной фазы к выражению (32) затруднительно, однако в параксиальном приближении, т.е. когда α, β малы, также можно получить более простой аналитический вид.

Во всех этих случаях собственные значения сводятся к виду

$$\gamma(\alpha,\beta,d,s,t)=\sqrt{d-s\alpha^2-t\beta^2}\ , \tag{36}$$

где d, s, t – константы, зависящие от значений тензора (30).

Таким образом, вид для быстроосциллирующего члена в (29):

$$\exp\left\{ik\left[\alpha p+\beta q+z\sqrt{d-s\alpha^2-t\beta^2}\right]\right\}, \tag{37}$$

где $p=u-x$, $q=v-y$.

Из уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha p+\beta q+z\sqrt{d-s\alpha^2-t\beta^2}\right]=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left[\alpha p+\beta q+z\sqrt{d-s\alpha^2-t\beta^2}\right]=0\end{cases} \tag{38}$$

получаем выражение для стационарной точки

$$\begin{cases}\alpha_c=\sqrt{\dfrac{tp^2d}{s\left(tp^2+sq^2+stz^2\right)}},\\ \beta_c=\sqrt{\dfrac{sq^2d}{t\left(tp^2+sq^2+stz^2\right)}}.\end{cases} \tag{39}$$

Тогда внутренний интеграл в (28) можно приближённо заменить подынтегральным выражением в стационарной точке [17]:

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{\sqrt{H\left(\alpha_c,\beta_c\right)}}\begin{pmatrix}\mathbf{e}\left(\alpha_c,\beta_c\right)\\ \mathbf{h}\left(\alpha_c,\beta_c\right)\end{pmatrix}\left[\mathbf{w}\left(\alpha_c,\beta_c\right)^T\mathbf{E}_\perp(x,y,0)\right]\times\\&\times\exp\left\{ik\left[\alpha_c(u-x)+\beta_c(v-y)+\gamma\left(\alpha_c,\beta_c\right)z\right]\right\},\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$H\left(\alpha_c,\beta_c\right)=\frac{\left(t(u-x)^2+s(v-y)^2+stz^2\right)^2}{stdz^2}. \tag{41}$$

В стационарной точке

$$\begin{aligned}&\exp\left\{ik\left[\alpha_c p+\beta_c q+z\sqrt{d-s\alpha_c^{\ 2}-t\beta_c^{\ 2}}\right]\right\}=\\&=\exp\left\{ik\sqrt{\frac{d}{st}}\sqrt{tp^2+sq^2+stz^2}\right\}.\end{aligned} \tag{42}$$

Тогда выражение (28) можно записать в виде, похожем на интеграл Рэлея–Зоммерфельда:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\mathbf{E}(u,v,z)\\ \mathbf{H}(u,v,z)\end{pmatrix}=\frac{2\pi z}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{2}\iint\begin{pmatrix}\mathbf{e}_j\left(\alpha_{jc},\beta_{jc}\right)\\ \mathbf{h}_j\left(\alpha_{jc},\beta_{jc}\right)\end{pmatrix}\times\\&\times\left[\mathbf{w}_j\left(\alpha_{jc},\beta_{jc}\right)^T\mathbf{E}_\perp(x,y,0)\right]\times\\&\times\frac{\sqrt{d_js_jt_j}}{R_j^2}\exp\left\{ik\sqrt{\frac{d_j}{s_jt_j}}R_j\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$R_j=\sqrt{t_j(u-x)^2+s_j(v-y)^2+s_jt_jz^2}\ , \tag{44}$$

$$\begin{cases}\alpha_{jc}=\sqrt{\dfrac{d_jt_j}{s_j}}\dfrac{(u-x)}{R_j},\\ \beta_{jc}=\sqrt{\dfrac{d_js_j}{t_j}}\dfrac{(v-y)}{R_j}.\end{cases} \tag{45}$$

Рассмотрим конкретные частные случаи и определим для них параметры выражения (43).

3.1. Одноосный кристалл, ось которого направлена вдоль оси распространения Oz

В этом случае $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$, $\varepsilon_3=\varepsilon_e$. Такая конфигурация рассматривалась в [22], однако непараксиальность учитывалась как дополнительные члены к параксиальному оператору распространения. В нашей работе непараксиальность сразу учитывается в выражении (43), представляющем собой аналог интеграла Рэлея–Зоммерфельда.

Элементы матрицы **M**:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \varepsilon_o\mu - \left(\beta^2 + \alpha^2 \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\right), \\ M_{12} &= M_{21} = \alpha\beta\left(1 - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\right), \\ M_{22} &= \varepsilon_o\mu - \left(\alpha^2 + \beta^2 \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Собственные значения:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\alpha,\beta) &= \sqrt{\varepsilon_o\mu - \left(\alpha^2+\beta^2\right)}, \\ \gamma_2(\alpha,\beta) &= \sqrt{\varepsilon_o\mu - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\left(\alpha^2+\beta^2\right)}. \end{aligned} \tag{47}$$

Первое собственное число соответствует обыкновенной волне, а второе – необыкновенной.

Первая пара собственных векторов:

$$e_{1x}(\alpha,\beta) = \alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\right),$$

$$e_{1y}(\alpha,\beta) = -\alpha^2\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\right),$$

которая с учётом общих множителей может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} e_{1x} &= \beta, \\ e_{1y} &= -\alpha. \end{aligned} \tag{48}$$

Аналогично для второй пары:

$$\begin{aligned} e_{2x} &= \alpha, \\ e_{2y} &= \beta. \end{aligned} \tag{49}$$

Используя (35), получим остальные векторы:

$$\begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \\ h_{1x} \\ h_{1y} \\ h_{1z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \beta\mu \\ -\alpha\mu \\ 0 \\ \alpha\gamma_1(\alpha,\beta) \\ \beta\gamma_1(\alpha,\beta) \\ -\left(\alpha^2+\beta^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \\ h_{2x} \\ h_{2y} \\ h_{2z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_2(\alpha,\beta)}\begin{pmatrix} \alpha\gamma_2(\alpha,\beta) \\ \beta\gamma_2(\alpha,\beta) \\ -\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}\left(\alpha^2+\beta^2\right) \\ -\beta\varepsilon_o \\ \alpha\varepsilon_o \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Из (50) видно, что обыкновенная волна является ТЕ-волной ($e_{1z}=0$), а необыкновенная – ТМ-волной ($h_{2z}=0$).

Векторы (27) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(\alpha,\beta)^T &= \left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-1}(\beta,-\alpha), \\ \mathbf{w}_2(\alpha,\beta)^T &= \left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-1}(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{51}$$

Т.к. $d_1=d_2=\varepsilon_o\mu$, $s_1=t_1=1$, $s_2=t_2=\varepsilon_o/\varepsilon_e$, то стационарные точки в (43) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_{jc} = \sqrt{\varepsilon_o\mu}\,\dfrac{(u-x)}{R_j}, \\ \beta_{jc} = \sqrt{\varepsilon_o\mu}\,\dfrac{(v-y)}{R_j}, \end{cases} \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2+z^2}, \\ R_2 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}}\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2+\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}z^2}. \end{aligned} \tag{53}$$

3.2. Одноосный кристалл, ось которого направлена перпендикулярно оси распространения и совпадает с осью Oy

В этом случае $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_o$, $\varepsilon_2=\varepsilon_e$. Такая конфигурация рассмотрена в [23], однако непараксиальный интегральный оператор распространения не был выписан.

Элементы матрицы **M**:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \varepsilon_o\mu - \alpha^2 - \beta^2, \\ M_{12} &= \alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}\right), \\ M_{21} &= 0, \\ M_{22} &= \varepsilon_e\mu - \alpha^2 - \frac{\varepsilon_e\beta^2}{\varepsilon_o}. \end{aligned} \tag{54}$$

Собственные значения:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\alpha,\beta) &= \sqrt{\varepsilon_o\mu-\alpha^2-\beta^2}, \\ \gamma_2(\alpha,\beta) &= \sqrt{\varepsilon_e\mu-\alpha^2-\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}\beta^2}. \end{aligned} \tag{55}$$

Первая пара собственных векторов:

$$e_{1x}(\alpha,\beta) = \alpha\beta\left(1-\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}\right),$$

$$e_{1y}(\alpha,\beta) = 0$$

показывает, что теперь ось кристалла направлена вдоль оси *Oy*, и разделения на обычные ТЕ- и ТМ-моды не произойдёт.

Учитывая равенство нулю электрической *y*-компоненты, можно выбрать первую пару в виде:

$$\begin{aligned} &e_{1x}(\alpha,\beta)=1,\\ &e_{1y}(\alpha,\beta)=0. \end{aligned} \tag{56}$$

Вторая пара с учётом сокращения общих множителей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &e_{2x}(\alpha,\beta)=\alpha\beta,\\ &e_{2y}(\alpha,\beta)=\beta^2-\varepsilon_o. \end{aligned} \tag{57}$$

Используя (35), получим остальные векторы:

$$\begin{pmatrix} e_{1x}\\ e_{1y}\\ e_{1z}\\ h_{1x}\\ h_{1y}\\ h_{1z} \end{pmatrix}=\frac{1}{\mu\gamma_1(\alpha,\beta)}\begin{pmatrix} \mu\gamma_1(\alpha,\beta)\\ 0\\ -\alpha\mu\\ -\alpha\beta\\ \varepsilon_o\mu-\beta^2\\ -\beta\gamma_1(\alpha,\beta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{2x}\\ e_{2y}\\ e_{2z}\\ h_{2x}\\ h_{2y}\\ h_{2z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\beta\\ -(\varepsilon_o\mu-\beta^2)\\ \beta\gamma_2(\alpha,\beta)\\ \varepsilon_o\gamma_2(\alpha,\beta)\\ 0\\ -\alpha\varepsilon_o \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Векторы (27) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}_1(\alpha,\beta)^T=\left(1,\frac{\alpha\beta}{(\varepsilon_o\mu-\beta^2)}\right),\\ &\mathbf{w}_2(\alpha,\beta)^T=\left(0,-\frac{1}{(\varepsilon_o\mu-\beta^2)}\right). \end{aligned} \tag{59}$$

Т.к. $d_1=\varepsilon_o\mu$, $s_1=t_1=1$, $d_2=\varepsilon_e\mu$, $s_2=1$, $t_2=\varepsilon_e/\varepsilon_o$, то стационарные точки в (43) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_{1c}=\sqrt{\varepsilon_o\mu}\,\dfrac{(u-x)}{R_1},\\ \beta_{1c}=\sqrt{\varepsilon_o\mu}\,\dfrac{(v-y)}{R_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{1c}=\sqrt{\varepsilon_o\mu}\,\dfrac{(u-x)}{R_1},\\ \beta_{1c}=\sqrt{\varepsilon_o\mu}\,\dfrac{(v-y)}{R_1}, \end{cases} \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned} &R_1=\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2+z^2},\\ &R_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}}\sqrt{(u-x)^2+\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}(v-y)^2+z^2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Аналогичные результаты можно получить, если ось кристалла будет направлена вдоль оси *Ox*.

<u>3.3. Двуосная анизотропия в параксиальном приближении</u>

В параксиальном случае в (32):

$$\sqrt{T}\approx\mu(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\left[\alpha^2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)-\beta^2\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)\right], \tag{62}$$

и тогда собственные значения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\gamma_1^2\approx\mu\varepsilon_1-\alpha^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}-\beta^2,\\ &\gamma_2^2\approx\mu\varepsilon_2-\alpha^2-\beta^2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}. \end{aligned} \tag{63}$$

Из (34) можно получить 2 набора собственных векторов для поперечных электрических компонент:

$$\begin{aligned} &e_{1x}(\alpha,\beta)=1,\\ &e_{1y}(\alpha,\beta)=0,\\ &e_{2x}(\alpha,\beta)=\alpha\beta(\varepsilon_3-\varepsilon_2),\\ &e_{2y}(\alpha,\beta)=\mu\varepsilon_3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\alpha^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)-\beta^2(\varepsilon_3-\varepsilon_2), \end{aligned} \tag{64}$$

остальные векторы можно получить, используя (35).

Векторы (27) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}_1(\alpha,\beta)^T=\\ &=\left(1,-\frac{\alpha\beta(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}{\mu\varepsilon_3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\alpha^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)-\beta^2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}\right),\\ &\mathbf{w}_2(\alpha,\beta)^T=\\ &=\left(0,\frac{1}{\mu\varepsilon_3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\alpha^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)-\beta^2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}\right). \end{aligned} \tag{65}$$

Т.к. $d_1=\varepsilon_1\mu$, $s_1=\varepsilon_1/\varepsilon_3$, $t_1=1$, $d_2=\varepsilon_2\mu$, $s_2=1$, $t_2=\varepsilon_2/\varepsilon_3$, то стационарные точки в (43) записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_{1c}=\sqrt{\varepsilon_3\mu}\,\dfrac{(u-x)}{R_1},\\ \beta_{1c}=\sqrt{\varepsilon_3\mu}\,\dfrac{(v-y)}{R_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{2c}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2^2\mu}{\varepsilon_3}}\,\dfrac{(u-x)}{R_2},\\ \beta_{2c}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2^2\mu}{\varepsilon_3}}\,\dfrac{(v-y)}{R_2}, \end{cases} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} &R_1=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_3}}\sqrt{\varepsilon_3(u-x)^2+\varepsilon_1(v-y)^2+\varepsilon_1z^2},\\ &R_2=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_3}}\sqrt{\varepsilon_2(u-x)^2+\varepsilon_3(v-y)^2+\varepsilon_2z^2}. \end{aligned} \tag{67}$$

Заметим, что, несмотря на параксиальное приближение, мы сохранили зависимость собственных значений и векторов от пространственных частот вплоть до второй степени. Таким образом, в (43) остаётся условно непараксиальная зависимость расстояний между точками в пространстве вида (67).

4. Интегральные операторы распространения электромагнитных волн в гиротропной среде

Частным случаем сред, описываемых тензорами (9), являются гиротропные среды. В этом случае тензоры имеют следующий вид [19]:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \tag{68а}$$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & -iw & 0 \\ iw & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \tag{68б}$$

где g и w – параметры электрической и магнитной гирации, соответственно.

Гиротропные свойства проявляют некоторые среды (в том числе вода, стекло, алмаз, фосфор), помещённые в постоянное магнитное поле [14].

Используя (14), запишем матрицу **M** для (68):

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[-\left(\alpha\beta + iw\varepsilon_{zz}\right)\left(\alpha\beta + ig\mu_{zz}\right) + \left(\alpha^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{yy}\right)\left(\beta^2 - \mu_{zz}\varepsilon_{xx}\right)\right],\\
M_{12} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[\left(\alpha\beta + iw\varepsilon_{zz}\right)\left(\alpha^2 - \mu_{zz}\varepsilon_{yy}\right) - \left(\alpha\beta - ig\mu_{zz}\right)\left(\alpha^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{yy}\right)\right],\\
M_{21} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[-\left(\alpha\beta + ig\mu_{zz}\right)\left(\beta^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{xx}\right) + \left(\alpha\beta - iw\varepsilon_{zz}\right)\left(\beta^2 - \mu_{zz}\varepsilon_{xx}\right)\right],\\
M_{22} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz}}\left[\left(\alpha^2 - \mu_{zz}\varepsilon_{yy}\right)\left(\beta^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{xx}\right) - \left(\alpha\beta - iw\varepsilon_{zz}\right)\left(\alpha\beta - ig\mu_{zz}\right)\right].
\end{aligned} \tag{69}$$

Собственные значения:

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_{zz}\mu_{zz}} \times \\ \times\left\{A_1B_2 + A_2B_1 - 2i\alpha\beta\left(w\varepsilon_{zz} + g\mu_{zz}\right) \pm \sqrt{T_g}\right\}, \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
T_g &= \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)^2 + \\
&+4\left(wg\varepsilon_{zz}\mu_{zz}\right)\left(A_1B_2 + A_2B_1\right) - 4A_2B_2\left(w\varepsilon_{zz}\right)^2 - \\
&-4A_1B_1\left(g\mu_{zz}\right)^2 + \\
&+4\left(\alpha\beta\right)^2\left[\left(A_2 - A_1\right)\left(B_2 - B_1\right) - \left(w\varepsilon_{zz} + g\mu_{zz}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{71}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left(\alpha^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{yy}\right),\\
A_2 &= \left(\alpha^2 - \mu_{zz}\varepsilon_{yy}\right),\\
B_1 &= \left(\beta^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{xx}\right),\\
B_2 &= \left(\beta^2 - \mu_{zz}\varepsilon_{xx}\right).
\end{aligned} \tag{72}$$

Выражение (71) является действительным, а собственные значения (70) – комплексными, что соответствует частично поглощающей среде.

Рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны, пренебрегая слагаемыми, содержащими пространственные частоты:

$$\begin{aligned}
M_{11} &\approx \left(wg + \mu_{yy}\varepsilon_{xx}\right),\\
M_{12} &\approx -i\left(w\varepsilon_{yy} + g\mu_{yy}\right),\\
M_{21} &\approx i\left(w\varepsilon_{xx} + g\mu_{xx}\right),\\
M_{22} &\approx \left(wg + \varepsilon_{yy}\mu_{xx}\right).
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\gamma_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2}\left\{2wg + \mu_{yy}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\mu_{xx} \pm \right. \\ \left. \pm\sqrt{\left(\mu_{yy}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\mu_{xx}\right)^2 + 4\left[w\varepsilon_{yy} + g\mu_{yy}\right]\left[w\varepsilon_{xx} + g\mu_{xx}\right]}\right\}. \tag{74}$$

В этом случае собственные значения действительные и соответствуют двум распространяющимся с различными скоростями волнам.

Собственные вектора вычисляются из (73) с использованием (16) и соответствуют эллиптической поляризации.

Так как собственные значения и вектора не зависят от пространственных частот (отсутствует дифракция), то выражение (28) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} E_x(u,v,z) \\ E_y(u,v,z) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{2}\iint \begin{pmatrix} e_{jx} \\ e_{jy} \end{pmatrix} \mathbf{w}_j \begin{pmatrix} E_x(x,y,0) \\ E_y(x,y,0) \end{pmatrix} \times \\
&\times \exp\left(ik\gamma_j z\right)\delta\left(u-x, v-y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\lambda^2\Delta}\left\{\begin{pmatrix} e_{1x}e_{2y} & -e_{1x}e_{2x} \\ e_{1y}e_{2y} & -e_{1y}e_{2x} \end{pmatrix}\exp\left(ik\gamma_1 z\right) + \right. \\
&\left. + \begin{pmatrix} -e_{2x}e_{1y} & e_{2x}e_{1x} \\ -e_{2y}e_{1y} & e_{2y}e_{1x} \end{pmatrix}\exp\left(ik\gamma_2 z\right)\right\}\begin{pmatrix} E_x(u,v,0) \\ E_y(u,v,0) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Для каждой из поперечных электрических компонент происходит свой набег фазы:

$$\begin{aligned}
E_x(u,v,z) &= \frac{1}{\lambda^2\Delta}\left\{\left[e_{1x}e_{2y}\exp\left(ik\gamma_1 z\right) - \right.\right. \\
&\left. -e_{2x}e_{1y}\exp\left(ik\gamma_2 z\right)\right]E_x(u,v,0) + \\
&\left. +e_{1x}e_{2x}\left[\exp\left(ik\gamma_2 z\right) - \exp\left(ik\gamma_1 z\right)\right]E_y(u,v,0)\right\},\\
E_y(u,v,z) &= \frac{1}{\lambda^2\Delta}\left\{\left[e_{1x}e_{2y}\exp\left(ik\gamma_2 z\right) - \right.\right. \\
&\left. -e_{2x}e_{1y}\exp\left(ik\gamma_1 z\right)\right]E_y(u,v,0) + \\
&\left. +e_{1y}e_{2y}\left[\exp\left(ik\gamma_1 z\right) - \exp\left(ik\gamma_2 z\right)\right]E_x(u,v,0)\right\}.
\end{aligned} \tag{76}$$

В частном случае, когда $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$, $\mu_{xx} = \mu_{yy}$, поляризация будет круговой:

$$\begin{aligned}&\gamma_1^2 \approx (w+\mu_{xx})(g+\varepsilon_{xx}),\\&\gamma_2^2 \approx (w-\mu_{xx})(g-\varepsilon_{xx}).\end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}&e_{1x}(\alpha,\beta)\approx 1,\\&e_{1y}(\alpha,\beta)\approx -i,\\&e_{2x}(\alpha,\beta)\approx 1,\\&e_{2y}(\alpha,\beta)\approx i,\\&\Delta = 2i.\end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}&E_x(u,v,z)=\\&=\frac{1}{2\lambda^2}\Big\{\big[\exp(ik\gamma_1 z)+\exp(ik\gamma_2 z)\big]E_x(u,v,0)-\\&-i\big[\exp(ik\gamma_2 z)-\exp(ik\gamma_1 z)\big]E_y(u,v,0)\Big\},\\&E_y(u,v,z)=\\&=\frac{1}{2\lambda^2}\Big\{\big[\exp(ik\gamma_1 z)+\exp(ik\gamma_2 z)\big]E_y(u,v,0)+\\&+i\big[\exp(ik\gamma_2 z)-\exp(ik\gamma_1 z)\big]E_x(u,v,0)\Big\}.\end{aligned} \tag{79}$$

Как видно из выражения (79), на различных расстояниях z поперечные компоненты будут представлять собой различные суперпозиции исходных распределений этих компонент, в том числе могут переходить друг в друга.

Для наглядности не будем учитывать магнитную гирацию, тогда собственные значения (77), соответствующие распространяющимся вправо волнам, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}&\gamma_1 \approx \sqrt{\mu_{xx}}\sqrt{\varepsilon_{xx}+g},\\&\gamma_2 \approx \sqrt{\mu_{xx}}\sqrt{\varepsilon_{xx}-g}.\end{aligned} \tag{80}$$

При малом значении гирации:

$$\begin{aligned}&\gamma_1 \approx \sqrt{\mu_{xx}\varepsilon_{xx}}\left(1+\frac{g}{2\varepsilon_{xx}}\right),\\&\gamma_2 \approx \sqrt{\mu_{xx}\varepsilon_{xx}}\left(1-\frac{g}{2\varepsilon_{xx}}\right).\end{aligned} \tag{81}$$

Тогда выражение (79) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}&E_x(u,v,z)=\frac{1}{\lambda^2}\exp\left(ik\sqrt{\varepsilon_{xx}\mu_{xx}}z\right)\times\\&\times\left\{\cos\left(k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\right)E_x(u,v,0)+\right.\\&\left.+\sin\left(k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\right)E_y(u,v,0)\right\},\\&E_y(u,v,z)=\frac{1}{\lambda^2}\exp\left(ik\sqrt{\varepsilon_{xx}\mu_{xx}}z\right)\times\\&\times\left\{\cos\left(k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\right)E_y(u,v,0)-\right.\\&\left.-\sin\left(k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\right)E_x(u,v,0)\right\}.\end{aligned} \tag{82}$$

Если предположить, что изначально поле было линейно-поляризовано вдоль оси x, т.е.

$$E_x(u,v,0)=1,$$
$$E_y(u,v,0)=0,$$

то с учётом (82) распределение компонент на различных расстояниях будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}&E_x(u,v,z)=\\&=\frac{1}{\lambda^2}\exp\left(ik\sqrt{\varepsilon_{xx}\mu_{xx}}z\right)\cos\left(k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\right),\\&E_y(u,v,z)=\\&=-\frac{1}{\lambda^2}\exp\left(ik\sqrt{\varepsilon_{xx}\mu_{xx}}z\right)\sin\left(k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\right),\end{aligned} \tag{83}$$

что соответствует повороту плоскости поляризации на угол

$$\varphi = k\frac{g\sqrt{\mu_{xx}}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}z\,, \tag{84}$$

в частности, поворот на 45° произойдёт на расстоянии, пропорциональном четверти длины волны:

$$z_{45^\circ}=\frac{\lambda}{4}\frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{g\sqrt{\mu_{xx}}}\,, \tag{85}$$

а на 90° – на расстоянии, пропорциональном половине длины волны

$$z_{90^\circ}=\frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{g\sqrt{\mu_{xx}}}\,. \tag{86}$$

Этот эффект вращения плоскости поляризации при распространении носит название эффекта Фарадея [14, 15, 21].

Заключение

В работе рассмотрен непараксиальный интегральный метод расчёта распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах. Интегральное выражение для сред с разделимостью продольных и поперечных компонент записано в завершённой аналитической форме. В частных случаях данное интегральное преобразование сведено к аналогу интеграла Рэлея–Зоммерфельда.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы» (Государственный контракт №07.514.11.4055), а также грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-4128.2012.9.

Литература

1. **Ciattoni, A.** Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media / A. Ciattoni, G. Cincotti,

C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20(1). – P. 163-171.
2. **Marrucci, L.** Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo and D. Paparo // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96. – P. 163905-4.
3. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals / T.A. Fadeyeva, V.G. Shvedov, Y.V. Izdebskaya, A.V. Volyar, E. Brasselet, D.N. Neshev, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski and Y.S. Kivshar // Opt. Expr. – 2010. – Vol. 18(10). – P. 10848-10863.
4. **Picon, A.** Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory / A. Picon, A. Benseny, J. Mompart and G.F. Calvo // J. Opt. – 2011. – Vol. 13. – P. 064019-064015.
5. **Fleck, J.A. Jr.** Beam propagation in uniaxial anisotropic media / J.A. Fleck, Jr. and M.D. Feit // J. Opt. Soc. Am. – 1983. – Vol. 73(7). – P. 920-926.
6. **Ciattoni, A.** Vectorial theory of propagation in uniaxially anisotropic media / A. Ciattoni, B. Crosignani and P. Di Porto // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18(7). – P. 1656-1661.
7. **Zhao, Y.** Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam / Y. Zhao, J.S. Edgar, G.D.M. Jeffries, D. McGloin and D.T. Chiu // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 073901.
8. **Chen, L.** Electro-optically forbidden or enhanced spin-to-orbital angular momentum conversion in a focused light beam / L. Chen and W. She // Opt. Lett. – 2008. – Vol. 33. – P. 696-698.
9. **Khonina, S.N.** Controlling the contribution of the electric field components to the focus of a high-aperture lens using binary phase structures / S.N. Khonina, S.G. Volotovsky // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27, N 10. – P. 2188-2197.
10. **Stallinga, S.** Axial birefringence in high-numerical-aperture optical systems and the light distribution close to focus / S. Stallinga // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18(11). – P. 2846-2859.
11. **Seshadri, S.R.** Beam dynamics of two modes propagating along the optic axis in a uniaxial crystal / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22(2). – P. 361-369.
12. **Liu, D.** Various dark hollow beams propagating in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis / D. Liu and Z. Zhou // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2008. – Vol. 10. – P. 095005-095013.
13. Bessel beam transformation by anisotropic crystals / D.H. Zusin, R. Maksimenka, V.V. Filippov, R.V. Chulkov, M. Perdrix, O. Gobert and A.S. Grabtchikov // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27(8). – P. 1828-1833.
14. **Ярив, А.** Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М.: Мир, 1987.
15. **Потехин, А.И.** Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде / А.И. Потехин. – М.: Наука, 1979. – 76 с.
16. **Stamnes, J.J.** Radiation of electromagnetic fields in uniaxially anisotropic media / J.J. Stamnes and G.C. Sherman // J. Opt. Soc. Am. – 1976. – Vol. 66(8). – P. 780-788.
17. **Bleistein, N.** Asymptotic Expansions of Integrals / N. Bleistein and R.A. Handelsman. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975. – P. 340–359.
18. **Stamnes, J.J.** Double refraction of a Gaussian beam into a uniaxial crystal / J.J. Stamnes, V. Dhayalan // J. Opt. Soc. Am. A. – 2012. – Vol. 29(4). – P. 486-497.
19. **Qiu, C.-W.** Eigenfunctional representation of dyadic Green's functions in multilayered gyrotropic chiral media / C.-W. Qiu, H.-Y. Yao, L.-W. Li, S. Zouhdi, T.-S. Yeo // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – Vol. 40. – P. 5751-5766.
20. **Досколович, Л.Л.** Интегральные представления решений системы уравнений Максвелла для анизотропных сред / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 52-57.
21. **Най, Дж.** Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. / Дж. Най. пер. с англ. Л.А. Шувалова // – М.: МИР, 1967.
22. **Ciattoni, A.** Optical propagation in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis: paraxial theory and beyond / A. Ciattoni, C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20(11). – P. 2163-2171.
23. **Fadeyeva, T.** Non-canonical propagation of high-order elliptic vortex beams in a uniaxially anisotropic medium / T. Fadeyeva, C. Alexeyev, B. Sokolenko, M. Kudryavtseva and A. Volyar // Ukr. J. Phys. Opt. – 2011. – Vol. 12(2). – P. 62-82.

References

1. **Ciattoni, A.** Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media / A. Ciattoni, G. Cincotti, C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20(1). – P. 163-171.
2. **Marrucci, L.** Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo and D. Paparo // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96. – P. 163905-4.
3. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals / T.A. Fadeyeva, V.G. Shvedov, Y.V. Izdebskaya, A.V. Volyar, E. Brasselet, D.N. Neshev, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski and Y.S. Kivshar // Opt. Expr. – 2010. – Vol. 18(10). – P. 10848-10863.
4. **Picon, A.** Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory / A. Picon, A. Benseny, J. Mompart and G.F. Calvo // J. Opt. – 2011. – Vol. 13. – P. 064019-064015.
5. **Fleck, J.A. Jr.** Beam propagation in uniaxial anisotropic media / J.A. Fleck, Jr. and M.D. Feit // J. Opt. Soc. Am. – 1983. – Vol. 73(7). – P. 920-926.
6. **Ciattoni, A.** Vectorial theory of propagation in uniaxially anisotropic media / A. Ciattoni, B. Crosignani and P. Di Porto // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18(7). – P. 1656-1661.
7. **Zhao, Y.** Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam / Y. Zhao, J.S. Edgar, G.D.M. Jeffries, D. McGloin and D.T. Chiu // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 073901.
8. **Chen, L.** Electro-optically forbidden or enhanced spin-to-orbital angular momentum conversion in a focused light beam / L. Chen and W. She // Opt. Lett. – 2008. – Vol. 33. – P. 696-698.
9. **Khonina, S.N.** Controlling the contribution of the electric field components to the focus of a high-aperture lens using binary phase structures / S.N. Khonina, S.G. Volotovsky // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27, N 10. – P. 2188-2197.
10. **Stallinga, S.** Axial birefringence in high-numerical-aperture optical systems and the light distribution close to focus / S. Stallinga // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18(11). – P. 2846-2859.
11. **Seshadri, S.R.** Beam dynamics of two modes propagating along the optic axis in a uniaxial crystal / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22(2). – P. 361-369.
12. **Liu, D.** Various dark hollow beams propagating in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis / D. Liu and Z. Zhou // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2008. – Vol. 10. – P. 095005-095013.
13. Bessel beam transformation by anisotropic crystals / D.H. Zusin, R. Maksimenka, V.V. Filippov, R.V. Chulkov, M. Perdrix, O. Gobert and A.S. Grabtchikov // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27(8). – P. 1828-1833.
14. **Yariv, A.** Optical Waves in Crystals / A. Yariv and P. Yeh. – New York: Wiley, 1984.
15. **Potehin, A.I.** Radiation and distribution of electromagnetic waves in the anisotropic environment / A.I. Potehin. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1979. – 76 p.
16. **Stamnes, J.J.** Radiation of electromagnetic fields in uniaxially anisotropic media / J.J. Stamnes and G.C. Sherman // J. Opt. Soc. Am. – 1976. – Vol. 66(8). – P. 780-788.
17. **Bleistein, N.** Asymptotic Expansions of Integrals / N. Bleistein and R.A. Handelsman. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975. – P. 340–359.

18. **Stamnes, J.J.** Double refraction of a Gaussian beam into a uniaxial crystal / J.J. Stamnes, V. Dhayalan // J. Opt. Soc. Am. A. – 2012. – Vol. 29(4). – P. 486-497.
19. **Qiu, C.-W.** Eigenfunctional representation of dyadic Green's functions in multilayered gyrotropic chiral media / C.-W. Qiu, H.-Y. Yao, L.-W. Li, S. Zouhdi, T.-S. Yeo // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – Vol. 40. – P. 5751-5766.
20. **Doskolovich, L.L.** Integral representations for solutions of Maxwell's equations for anisotropic media / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov // Computer Optics. – 2010. – Vol. 34, N 1. – P. 52-57.
21. **Nye, J.F.** Physical proprities of crystals. Their representation by tensors and matrices / J.F. Nye. – Oxford, 1964.
22. **Ciattoni, A.** Optical propagation in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis: paraxial theory and beyond / A. Ciattoni, C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20(11). – P. 2163-2171.
23. **Fadeyeva, T.** Non-canonical propagation of high-order elliptic vortex beams in a uniaxially anisotropic medium / T. Fadeyeva, C. Alexeyev, B. Sokolenko, M. Kudryavtseva and A. Volyar // Ukr. J. Phys. Opt. – 2011. – Vol. 12(2). – P. 62-82.

ANALOGUE OF RAYLEIGH–SOMMERFELD INTEGRAL FOR ANISOTROPIC AND GYROTROPIC MEDIA

S.N. Khonina, S.I. Kharitonov

Image Processing Systems Institute RAS,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University

Abstract

Integral representations of solution of Maxwell equations for anisotropic and gyrotropic media with factorization of longitudinal and transversal components are written in the completed analytical form. In special cases the received integral expressions are transformed to analogue of Rayleigh–Sommerfeld integral.

Key words: anisotropic and gyrotropic media, diffraction, Maxwell equations, plane wave expansion, analogue of Rayleigh–Sommerfeld integral, Faraday effect.

Сведения об авторах

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва; ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: khonina@smr.ru .

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.

Харитонов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая кибернетика», старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Учреждения Российской академии наук Института систем обработки изображений РАН, . 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов.

E-mail: prognoz2007@gmail.com .

Sergey Ivanovich Kharitonov, Senior Researcher of Laboratory of Diffractive Optics of Image Processing Systems Institute of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 - graduated from the Physics Department of the Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation Focuser" 2010 г. – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements" Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of scientific papers SI Kharitonov's 87 articles, 5 patents.

Поступила в редакцию 9 марта 2012 г.