

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Котляр В.В., Ковалёв А.А., Налимов А.Г.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Получено выражение для комплексной амплитуды семейства параксиальных гипергеометрических лазерных пучков, распространяющихся в градиентном параболическом волокне. Найден широкий класс модовых решений уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для градиентной параболической среды. Эти решения пропорциональны функциям Куммера, но только те из них обладают конечной энергией (то есть физически реализуемы), которые совпадают с модами Лагерра–Гаусса. Отрезок определённой длины градиентного параболического волокна рассмотрен как параболическая линза, для которой получены выражения для числовой апертуры и диаметра фокуса по полуспаду интенсивности. Получена явная формула для радиусов колец бинарной линзы, аппроксимирующей градиентную параболическую линзу. Моделирование FDTD-методом показало возможность фокусировки линейно-поляризованного гауссова пучка бинарной параболической микролинзой с показателем преломления 1,5 в эллиптическое фокусное пятно почти без боковых лепестков и с меньшим диаметром по полуспаду интенсивности 0,45 длины волны.

Ключевые слова: гипергеометрические пучки, градиентная линза, бинарная параболическая линза, моды параболического волокна.

Введение

В 2007 году были рассмотрены параксиальные гипергеометрические моды (ГГ-моды) [1]. Немного позже на основе ГГ-мод были получены гипергеометрические гауссовы лазерные пучки [2]. В [3] рассмотрено более общее семейство ГГ-пучков, которые включают в себя как частные случаи ГГ-моды [1] и гипергеометрические гауссовы пучки [2]. Лазерные ГГ-пучки были экспериментально сформированы с помощью дифракционных оптических элементов [4] и голограмм, синтезированных на компьютере [5]. Недавно получены аналитические выражения, описывающие распространение ГГ-пучков в градиентной гиперболической среде [6] и одноосном кристалле [7].

В этой работе получено выражение, описывающее распространение ГГ-пучков в 3D градиентном параболическом волноводе. Показано, что световое поле ГГ-пучков периодически повторяется, а через каждые полпериода формируется Фурье-спектр.

Также было получено новое семейство модовых решений для уравнения Гельмгольца в параболической среде. Эти решения пропорциональны функциям Куммера и расходятся на бесконечности. Однако при некоторых значениях параметров функции Куммера эти решения становятся конечными и переходят в известные моды Лагерра–Гаусса (ЛГ-моды).

В последнее время возрос интерес к градиентным элементам микрооптики. Так, в [8–10] рассматривалась градиентная микролинза Лунеберга. В [8, 9] были проведены эксперименты с планарной линзой Лунеберга, а в [10] моделирование планарной фотонно-кристаллической линзы Лунеберга показало, что сформированный ею фокус имеет ширину по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 0,44\lambda$ при $n_0 = 1,41$. В [11, 12] рассмотрена планарная, а в [13] – трёхмерная линзы Микаэляна с градиентным показателем преломления в виде гиперболического сепанса. В [13] показано, что 3D градиентная линза

Микаэляна формирует фокальное пятно с диаметром по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 0,40\lambda$. В [14] рассмотрена планарная субволновая бинарная линза Микаэляна, формирующая фокус шириной $\text{FWHM} = 159 \text{ нм} = 0,102\lambda = 0,35\lambda/n$, $n = 3,47$ – показатель преломления линзы.

В этой работе рассмотрено распространение гауссова пучка в градиентном параболическом волокне. Участок этого волокна определённой длины можно рассматривать как градиентную параболическую (ГП) линзу. Моделирование показало, что фокусное пятно в такой линзе имеет диаметр $\text{FWHM} = 0,42\lambda$, при $n_0 = 1,5$ – показатель преломления на оси линзы. Получено также аналитическое выражение для радиусов скачков показателя преломления для бинарной линзы, аппроксимирующей 3D ГП-линзу. Рассчитанный FDTD-методом меньший диаметр эллиптического фокусного пятна такой бинарной параболической линзы $\text{FWHM} = 0,45\lambda$.

1. Параксиальные гипергеометрические пучки в параболической градиентной среде

Рассмотрим параболическую градиентную среду с показателем преломления вида:

$$n^2(r) = n_0^2 \left[1 - \frac{(n_0^2 - n_1^2)}{n_0^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где r – радиальная поперечная координата, n_0 и n_1 – показатели преломления на оптической оси ($r=0$) и при $r=r_0$. На рис. 1 показан профиль показателя преломления (1).

Параксиальное уравнение распространения света в параболической среде (1) имеет вид:

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\alpha k)^2 \frac{(x^2 + y^2)}{4} \right] \times \times E(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

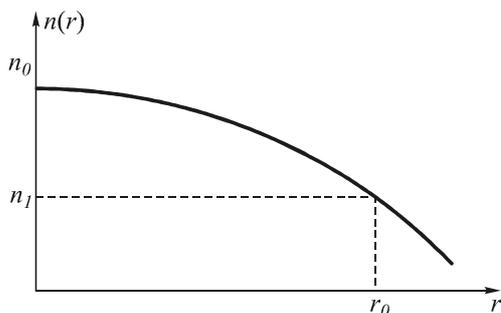


Рис. 1. График зависимости параболического показателя преломления от радиальной координаты

где $\alpha = \frac{2\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}{r_0 n_0}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} n_0$, λ – длина волны. В [15] показано, что общее решение (2) имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{\alpha k}{2\pi i \sin(\tau z)} \times \exp\left[\frac{i\alpha k}{4tg(\tau z)}(x^2 + y^2)\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{i\alpha k}{4\sin(\tau z)}[(\xi^2 + \eta^2) \times \cos(\tau z) - 2(x\xi + y\eta)]\right\} d\xi d\eta, \tag{3}$$

где $\tau = \alpha/2$. Заметим, что интегральное преобразование (3) с точностью до обозначений совпадает с частичным преобразованием Фурье [16, 17]. В цилиндрических координатах уравнение (3) для начального поля $E_0(r, \varphi) = E_0(r) \exp(in\varphi)$ имеет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{2k}{f_2} \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f_1} + in\theta\right) \times \int_0^{\infty} E_0(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2f_1}\right) J_n\left(\frac{kr\rho}{f_2}\right) r dr, \tag{4}$$

где n – целое число, $J_n(x)$ – функция Бесселя,

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 tg(z/f_0), \\ f_2 &= f_0 \sin(z/f_0), \\ f_0 &= \frac{2}{\alpha} = \frac{r_0 n_0}{\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

В [18] получены выражения, описывающие преобразования пучков ЛГ в параболическом волокне. Далее мы рассмотрим распространение в параболическом волокне (1) ГГ-пучков, которые в начальной плоскости описываются комплексной амплитудой [3]:

$$E_0(r) = \left(\frac{r}{\delta}\right)^{m+i\gamma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \tag{6}$$

где m, γ – действительные числа, δ и σ – масштаб степенной амплитудной составляющей и радиус гауссова пучка. Подставим выражение (6) в (4) и воспользуемся справочным интегралом [19]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^{\mu-1} \exp(-\beta y^2) J_n(cy) dy &= \\ &= \frac{c^n \beta^{-(n+\mu)/2} \Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)}{2^{n+1} n!} \times \\ &\times {}_1F_1\left(\frac{n+\mu}{2}, n+1, -\frac{c^2}{4\beta}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, ${}_1F_1(a, b, x)$ – функция Куммера [19], тогда получим вместо (4):

$$\begin{aligned} E_{mpn}(\rho, \theta, z) &= \\ &= (-i)^{n+1} \left(\frac{2k\sigma^2}{f_2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{\delta}\right)^{m+i\gamma} \times \\ &\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f_1} + in\theta\right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{ik\sigma^2}{f_1}\right)^{-(m+i\gamma+2)/2} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}\right)}{n!} \times \\ &\times x^{n/2} {}_1F_1\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}, n+1, -x\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} x &= \frac{\rho^2}{2\omega^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)}, \\ \omega(z) &= \sigma \left[\cos^2\left(\frac{z}{f_0}\right) + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{z}{f_0}\right) \right]^{1/2}, \\ R(z) &= \frac{1}{2} f_0 \sin\left(\frac{2z}{f_0}\right) \times \left[1 + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{f_0}\right) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Световое поле (8) по модулю будет повторяться с периодом $L = \pi f_0$. Амплитуды в плоскостях, разделённых между собой расстоянием в половину периода $L_1 = (\pi f_0)/2$, связаны преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} E_{mpn}(\rho, \theta, z = L_1) &= (-i)^{n+1} \left(\frac{k\sigma^2}{f_2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{\delta}\right)^{m+i\gamma} \exp(in\theta) \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}\right) \left(\frac{\rho^2}{2\omega_1^2}\right)^{n/2}}{n!} \times \\ &\times {}_1F_1\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}, n+1, -\frac{\rho^2}{2\omega_1^2}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\omega_1 = f_0/k\sigma$ – эффективный радиус светового поля в плоскости Фурье. Световые поля (8) ортогональны между собой при разных значениях топологического заряда n . Заметим, что при $f_0 = k\sigma^2$

реальная часть аргумента функции Куммера перестаёт зависеть от расстояния z : $\omega(z) = \sigma = const$, а мнимая часть аргумента продолжает оставаться зависимой от переменной z : $R(z) = (1/2)f_0 \operatorname{tg}(z/f_0)$. Поэтому и амплитуда всего поля (8) будет зависеть от z . Поэтому ГГ-пучки (8) не являются модами параболической градиентной среды ни при каких параметрах и значениях номеров m, n, γ , за исключением гауссова пучка ($m = n = \gamma = 0$).

2. Моды параболической градиентной среды

Рассмотрим параболическую градиентную среду вида (1) $n^2(r) = n_0^2(1 - \tau^2 r^2)$, где $\tau = \alpha/2$. Будем искать решение уравнения Гельмгольца для параболической среды

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(r) \right) \times E(r, \varphi, z) = 0 \tag{11}$$

с показателем (1) в модовом виде:

$$E(r, \varphi, z) = r^p z^q \times \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \exp(in\varphi) \times \exp(i\beta z) F(r^l z^l) \tag{12}$$

где F – некоторая функция, а β – константа распространения моды. Можно показать, что решением уравнения (11) будет семейство функций:

$$E(r, \varphi, z) = r^n \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \times \exp(\pm in\varphi) \exp(i\beta z) \times {}_1F_1\left[\frac{n+1}{2} + \frac{\omega_2^2}{8}(\beta^2 - k^2 n_0^2), n+1, \frac{2r^2}{\omega_2^2}\right], \tag{13}$$

где ${}_1F_1(a, b, x)$ – по-прежнему функция Куммера, $\omega_2 = \sqrt{2/kn_0\tau}$. Так как функция Куммера имеет следующую асимптотику при $\xi \rightarrow \infty$ [20]:

$${}_1F_1(a, b, \xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \exp(\xi) \xi^{a-b} (1 + O(1/\xi)), \tag{14}$$

где $O(x)$ – стремится к нулю быстрее, чем x , то функция (13) будет расходиться при $r \rightarrow \infty$. Во множестве решений (13) есть и нерасходящиеся решения. Если у функции Куммера первый параметр равен целому отрицательному числу, то функция Куммера становится равной многочлену, а решение (13) сходится к нулю при $r \rightarrow \infty$. То есть при условии:

$$\frac{n+1}{2} + \frac{\omega_2^2}{8}(\beta^2 - k^2 n_0^2) = -s \tag{15}$$

вместо (13) получим известные моды Лагерра–Гаусса:

$$E(r, \varphi, z) = r^n \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \exp(\pm in\varphi) \times \exp(i\beta z) {}_1F_1\left[-s, n+1, \frac{2r^2}{\omega_2^2}\right] = \frac{s!}{(n+1)_s} r^n \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \times \exp(\pm in\varphi) \exp(i\beta z) L_s^n\left(\frac{2r^2}{\omega_2^2}\right), \tag{16}$$

где

$$\beta = kn_0 \sqrt{1 - \frac{2\tau}{kn_0}(2s + n + 1)}. \tag{17}$$

Если радиус гауссова пучка моды ЛГ (16) не удовлетворяет условию $\omega_2 = \sqrt{2/kn_0\tau}$, то пучок ЛГ уже не будет модой. Распространение немодового пучка Лагерра–Гаусса в параболической среде рассмотрено в [18].

Таким образом, в данном разделе показано, что существует широкий класс модовых решений уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для параболической среды, но только те решения из этого класса будут обладать конечной энергией (то есть будут физически реализуемы), которые совпадают с модами Лагерра–Гаусса.

3. Параболическая градиентная микролинза

В семейство решений (8) входит как фундаментальный пучок гауссов пучок, амплитуда которого также периодически повторяется при распространении в параболическом градиентном волокне (1). Из (8) при $n = m = \gamma = 0$ можно получить:

$$E_0(\rho, \theta, z) = (-i) \left(\frac{2k\sigma^2}{f_2}\right) \left(1 - \frac{ik\sigma^2}{f_1}\right)^{-1} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\omega^2(z)} - \frac{ik\rho^2}{2R_1(z)}\right), \tag{18}$$

где

$$R_1^{-1}(z) = \left[\cos^2(z/f_0) + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2(z/f_0) - 1 \right] / \left\{ f_0 \operatorname{tg}(z/f_0) \left[\cos^2(z/f_0) + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2(z/f_0) \right] \right\}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что при $f_0 = k\sigma^2$ гауссов пучок распространяется в параболическом волокне без изменения, сохраняя свой диаметр. Если $f_0 \neq k\sigma^2$, то радиус гауссова пучка меняется по формуле:

$$\omega(z) = \sigma \left[\cos^2 \left(\frac{z}{f_0} \right) + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{z}{f_0} \right) \right]^{1/2}, \quad (20)$$

из которой следует, что минимальный радиус, равный $\omega_1 = f_0 / k\sigma$ (если $f_0 < k\sigma^2$), достигается на расстоянии $L_1 = \pi f_0 / 2$ от начала ($z = 0$). При этом диаметр гауссова пучка по полуспаду интенсивности будет равен:

$$FWHM = \left(\frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi} \right) \frac{\lambda r_0 n_0}{\sigma \sqrt{n_0^2 - n_1^2}}. \quad (21)$$

Таким образом, можно рассмотреть градиентную параболическую линзу как отрезок параболического волокна с радиусом r_0 и длиной вдоль оптической оси $L_1 = (\pi f_0) / 2$. Такая ГП-линза будет фокусировать падающий на её входную поверхность плоский гауссов пучок с радиусом σ в фокусное пятно с диаметром (21), которое сформируется вблизи выходной плоскости линзы (рис. 2).

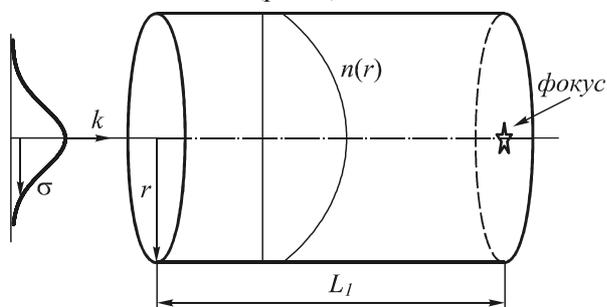


Рис. 2. Схема фокусировки гауссова пучка с помощью ГП-линзы

Из (21) следует выражение для числовой апертуры ГП-линзы ($n_1 = 1$):

$$NA = \frac{\sigma}{r_0} \sqrt{n_0^2 - 1}. \quad (22)$$

При $\sigma = r_0$ числовая апертура (22) совпадает с NA для планарной линзы Микаэляна [12]. Например, при $n_0 = 1,5$, $n_1 = 1$, $\sigma = r_0$ получим следующие значения длины ГП-линзы $L_1 = 2,1r_0$ и диаметра фокусного пятна $FWHM = 0,36\lambda$. Это немного больше, чем дифракционный предел в среде с показателем преломления $n_0 = 1,5$: $FWHM = 0,34\lambda$. Однако так как при выводе (21) предполагается, что линза имеет по радиусу неограниченные размеры и показатель преломления (1) спадает на бесконечности до нуля, то такое значение ширины фокуса ($FWHM = 0,36\lambda$) нельзя реализовать на практике, когда реальная линза ограничена радиусом r_0 , при котором $n(r_0) = 1$.

4. Бинарная параболическая линза

Градиентную параболическую линзу можно приближённо поменять на бинарную параболическую линзу по правилу, схематично изображённому на рис. 3.

Согласно рис. 3 радиус ГП-линзы r_0 разбивается на N равных отрезков длиной Δ : $r_0 = N\Delta$, тогда ра-

диусы начала и концов этих отрезков равны: $r_p = p\Delta$, $p = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

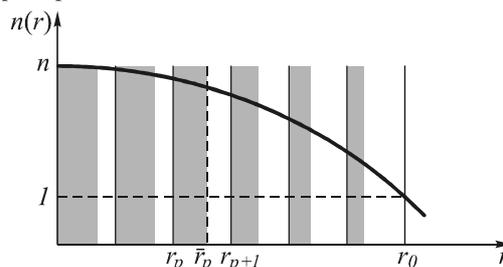


Рис. 3. Схема замены непрерывной параболической зависимости показателя преломления на кусочно-постоянную (бинарную) зависимость

Начало p -го бинарного кольца совпадает с радиусом r_p , а конец p -го бинарного кольца \bar{r}_p находится из уравнения:

$$(r_{p+1}^2 - \bar{r}_p^2) + n_0 (\bar{r}_p^2 - r_p^2) = 2n_0 \int_{r_p}^{\bar{r}_p} \sqrt{1 - \tau^2 r^2} r dr. \quad (23)$$

Из уравнения (23) можно получить явное выражение для радиуса конца p -го бинарного кольца:

$$\bar{r}_p^2 = \frac{(n_0 r_p^2 - r_{p+1}^2)}{(n_0 - 1)} + \frac{2n_0}{3(n_0 - 1)\tau^2} \times \left[(1 - (\tau r_p)^2)^{3/2} - (1 - (\tau r_{p+1})^2)^{3/2} \right], \quad (24)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Заметим, что в (24) радиусы скачков показателя преломления r_p можно выбирать не эквидистантными и учитывать минимальный технологически возможный размер зоны.

5. Результаты моделирования

5.1. Планарная градиентная параболическая линза

Для начала рассмотрим двумерный случай линзы. Моделировалась фокусировка ТЕ-поляризованной падающей волны методом FDTD в коммерческой программе FullWave (Rsoft Design Group). Сетка разбиения отсчётов по оптической оси Z и поперечной оси X была $\lambda/130$ (4,1 нм), шаг по времени $\Delta(ct) = 2,8$ нм.

На рис. 4 представлен показатель преломления в линзе в градациях серого. Радиус линзы $r_0 = 1$ мкм, $n_0 = 1,5$, $\alpha = 1,49$ мкм⁻¹, $\lambda = 0,532$ мкм. Так как $\alpha = 2/f_0$, то $f_0 = 2/\alpha = 1,342$ мкм, длина линзы $L_1 = (\pi/2)f_0 = (\pi/\alpha) = 2,1$ мкм.

На рис. 5 представлено распределение интенсивности электрической компоненты на расстоянии 10 нм за линзой при плоской падающей волне и гауссовом пучке с радиусом $\sigma = 1$ мкм.

Ширина фокусного пятна по полуспаду интенсивности равна $FWHM = 0,388\lambda = 0,2$ мкм в случае плоской падающей волны и $FWHM = 0,5\lambda = 0,27$ мкм в случае гауссова пучка. Как видно из рис. 5, макси-

мумы интенсивности рядом с основным фокусным пятном около 30%, что свидетельствует о неоптимальной длине линзы.

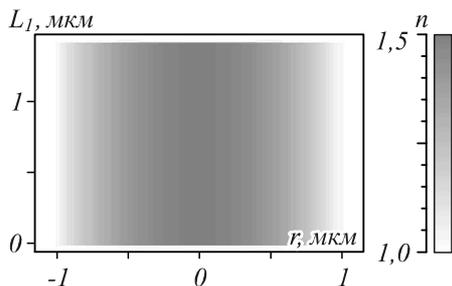


Рис. 4. Показатель преломления в градиентной бинарной линзе в градациях серого ($L_1 = 1,56$ мкм)

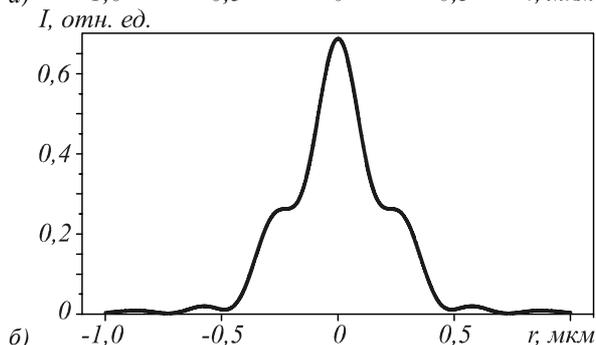
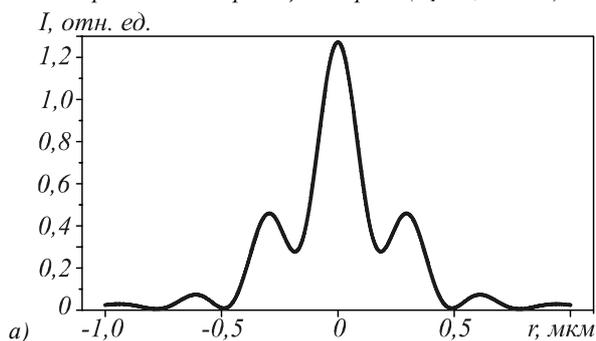


Рис. 5. Распределение интенсивности ($|E|^2$) в фокусной плоскости в 10 нм за линзой в случае плоской падающей волны (а) и гауссова пучка (б)

Можно достичь более острой фокусировки, изменив длину линзы. На рис. 6 показана зависимость ширины фокусировки света линзой FWHM в длинах волн от длины линзы L_1 .

Как видно из рисунка, минимальная ширина фокусного пятна для гауссова пучка и плоской волны достигаются при различной длине линзы L_1 . Наилучшая фокусировка плоской волны достигается при значении $L_1 = 1,56$ мкм, при этом $FWHM = 0,375\lambda$, а минимальное фокусное пятно при гауссовом падающем пучке составляет $FWHM = 0,394\lambda$ при длине линзы $L_1 = 1,73$ мкм. В этом результате проявляется общая закономерность при фокусировке лазерного света: при прочих равных условиях увеличение боковых лепестков (рис. 5а) сопровождается уменьшением ширины фокусного пятна (и увеличением глубины фокуса).

5.2. 3D градиентная параболическая линза

В трёхмерном случае моделировалась линза с градиентным показателем преломления в плоскости

XY , зависящим от радиуса r . Градиентное распределение показателя преломления трёхмерной линзы в плоскости XY представлено на рис. 7.

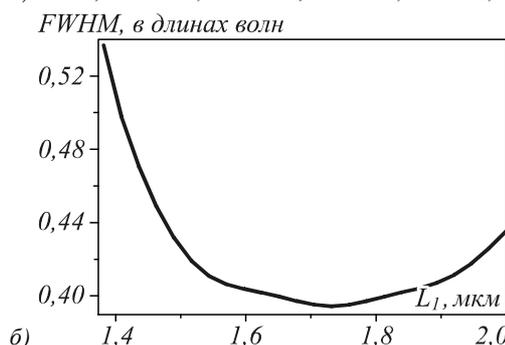
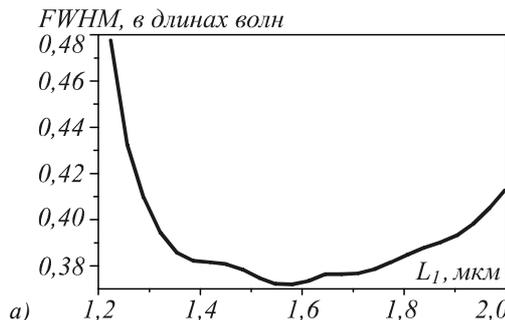


Рис. 6. Зависимость ширины фокусного пятна в 10 нм от выходной плоскости линзы от длины линзы L_1 для плоской волны (а) и гауссова пучка (б) на входе линзы

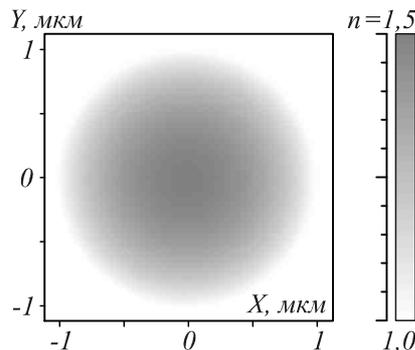


Рис. 7. Градиентное распределение показателя преломления линзы в плоскости XY в градациях серого

При моделировании трёхмерного случая использовалась сетка отсчётов $\lambda/40$ (13,3 нм) по всем трём осям. Моделировалось распространение линейно-поляризованного света через линзу (основная компонента падающего поля E_y), падающая волна – плоский гауссов пучок с радиусом $\sigma = 1$ мкм. На рис. 8а представлена зависимость ширины фокусного пятна FWHM от длины линзы L_1 , измеренная через центр фокусного пятна вдоль оси X .

Видно, что минимум достигается при длине линзы $L_1 = 1,6$ мкм, при этом ширина фокуса вдоль оси X равна $FWHM = 0,42\lambda$. Распределение интенсивности ($|E|^2$) в фокусном пятне линзы при этих параметрах представлено на рис. 8б. За счёт линейной поляризации фокусное пятно вытягивается вдоль оси Y и составляет $FWHM = 0,70\lambda$.

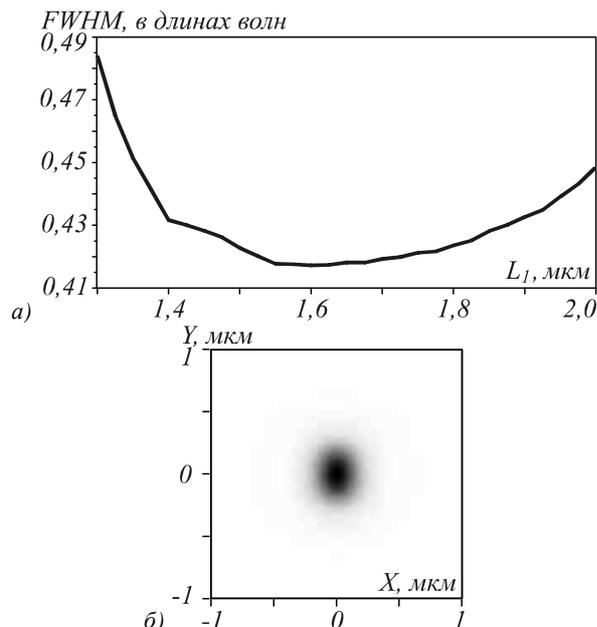


Рис. 8. Зависимость диаметра фокусного пятна вдоль оси X в 10 нм от выходной плоскости линзы от длины линзы L_1 для линейно-поляризованного гауссова пучка на входе линзы с радиусом $\sigma = 1$ мкм (а) и распределение интенсивности (негатив) в фокусном пятне линзы при оптимальной длине $L_1 = 1,6$ мкм (б)

5.3. 3D бинарная параболическая линза

На практике сложно изготовить линзу с градиентным непрерывным профилем показателя преломления. Бинарную же микролинзу можно изготовить по технологии изготовления 3D фотонно-кристаллических волноводов или волноводов Брегга [21]. На рис. 9 представлено бинарное распределение показателя преломления в плоскости XY бинарной линзы (24), аппроксимирующей градиентную параболическую линзу.

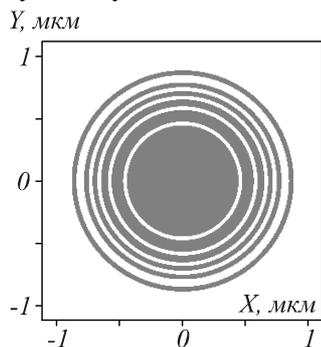


Рис. 9. Бинарное распределение показателя преломления линзы в плоскости XY. Тёмный цвет соответствует показателю преломления $n = 1,5$, белый – $n = 1$

Такая линза будет фокусировать свет немного хуже варианта с непрерывным изменением показателя преломления (1). На рис. 10 показано распределение интенсивности в фокусной плоскости бинарной параболической линзы и сечения этого распределения через центр вдоль осей X и Y. Длина линзы выбрана оптимальной и равна $L_1 \approx 1,9$ мкм (параксиальная теория даёт немного большее значение

$L_1 = 2,1$ мкм). Падающее линейно-поляризованное поле с плоским волновым фронтом имеет гауссово распределение интенсивности с радиусом $\sigma = 1$ мкм. Минимальный размер зоны (разница между соседними радиусами скачков показателя преломления) бинарной линзы равен 35 нм. При моделировании использовалась сетка отсчётов $\lambda/70$ (7,6 нм) по всем трём осям. Начальная плоскость поляризации параллельна плоскости ZY.

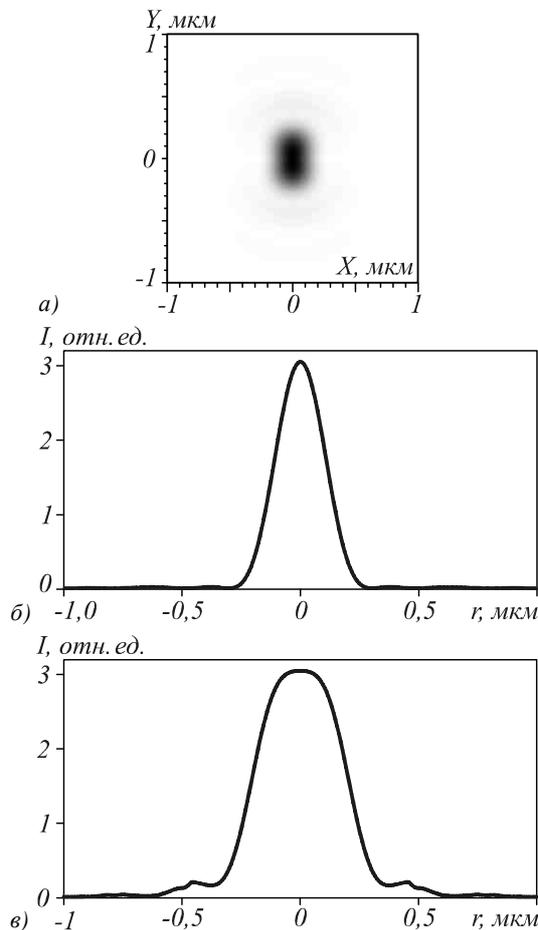


Рис. 10. Распределение интенсивности (негатив) в фокусной плоскости бинарной параболической линзы на рис. 9 (а) и сечения интенсивности через центр фокусного пятна вдоль оси X (б) и Y (в)

Диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности (для рис. 10) вдоль оси X $FWHM = 0,45\lambda$, вдоль оси Y $FWHM = 0,78\lambda$. Фокусное пятно вытянуто вдоль оси Y и почти не имеет боковых лепестков. Напомним, что параксиальная теория даёт диаметр фокусного пятна, $FWHM = 0,36\lambda$.

Заключение

- Основные результаты данной работы:
- получено выражение для комплексной амплитуды семейства параксиальных гипергеометрических лазерных пучков, распространяющихся в градиентном параболическом волокне (уравнение (8));
 - найден широкий класс модовых решений уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для градиентной параболической сре-

- ды; эти решения пропорциональны функциям Куммера (уравнение (13)); показано, что только те решения из этого класса будут обладать конечной энергией (то есть будут физически реализуемы), которые совпадают с модами Лагеррра–Гаусса (уравнение (16));
- отрезок определённой длины градиентного параболического волокна рассмотрен как параболическая линза, для которой получены выражения для числовой апертуры и для диаметра фокуса по полуспаду интенсивности (уравнения (21),(22));
 - моделирование FDTD-методом фокусировки линейно-поляризованного гауссова пучка с помощью 3D градиентной параболической линзы показало, что оптимальная длина линзы меньше, чем предсказывает скалярная теория, и при этом меньший диаметр эллиптического фокусного пятна $\text{FWHM} = 0,42\lambda$ (рис. 8б);
 - получена явная формула для радиусов колец бинарной 3D линзы, аппроксимирующей градиентную параболическую линзу (уравнение (24));
 - рассчитанный минимальный меньший диаметр эллиптического фокусного пятна такой бинарной 3D линзы $\text{FWHM} = 0,45\lambda$ (рис. 10).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № 14.740.11.0016), грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-4128.2012.9) и молодого кандидата наук (МК-3912.2012.2) и грантов РФФИ (12-07-00269, 12-07-31117).

Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Opt. Lett.*, 2007. – V. 32, N 7. – P. 742-744.
2. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci, E. Santameto // *Opt. Lett.* – 2007. – V. 32. – P. 3053-3055.
3. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – V. 25, N 1. – P. 262-270.
4. **Kotlyar, V.V.** Generating hypergeometric laser beams with a diffractive optical elements / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, J. Turunen // *Appl. Opt.* – 2008. – V. 47, N 32. – P. 6124-6133.
5. **Chen, J.** Production of confluent hypergeometric beam by computer-generated hologram / J. Chen, G. Wang, Q. Xu // *Opt. Eng.* – 2011. – V. 50, N 2. – P. 024201.
6. **Bernardo, B.** Data transmission by hypergeometric modes through a hyperbolic-index medium / B. Bernardo, F. Moraes // *Opt. Exp.* – 2011. – V. 19, N 2. – P. 11264-11270.
7. **Li, J.** Propagation of confluent hypergeometric beam through uniaxial crystals orthogonal to the optical axis / J. Li, Y. Chen // *Opt. Las. Technol.* – 2012. – V. 44. – P. 1603-1610.
8. **Di Falco, A.** Luneberg lens in silicon photonics / A. Di Falco, S.C. Kehr, U. Leonhardt // *Opt. Express.* – 2011. – V. 19. – P. 5156-5162.

9. **Zentgrat, T.** Plasmonic Luneberg and Eaton lenses / T. Zentgrat, Y. Liu, M.N. Mikkelsen, J. Valentine, X. Zhang // *Nat. Nanotechn.* – 2011. – V. 6. – P. 151-155.
10. **Soifer, V.A.** Graded photonic quasicrystals / P.N. Dyachenko, V.S. Pavelyev and V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2012. – V. 37, N 12. – P. 2178-2180.
11. **Kotlyar, V.V.** Photonic Crystal Mikaelian Lens / Y.R. Triandaphilov, V.V. Kotlyar // *Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform. Opt.)*. – 2008. – V. 17. – P. 1-7.
12. **Kotlyar, V.V.** Subwavelength Focusing with a Mikaelian Planar Lens / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform. Opt.)*. – 2010. – V. 19. – P. 273-278.
13. **Kotlyar, V.V.** Sharply focusing a radially polarized laser beam using a gradient Mikaelian's microlens / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev // *Opt. Commun.* – 2009. – V. 282, N 4. – P. 459-464.
14. **Котляр, В.В.** Механизм сверхразрешения в планарной гиперболической секансной линзе / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов, Я.Р. Триандафилов // *Компьютерная оптика.* – 2010. – Т. 34, № 4. – С. 428-435.
15. **Котляр, В.В.** Операторное описание параксиальных световых полей / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, Я. Ванг // *Компьютерная оптика.* – 2001. – Т. 21. – С. 45-52.
16. **Mendlovic, D.** Fractional Fourier transform and their optical implementation: I / D. Mendlovic, H.M. Ozaktas // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10, N 9. – P. 1875-1881.
17. **Lohmann, A.W.** Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform / A.W. Lohmann // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10, N 10. – P. 2118-2186.
18. **Хонина, С.Н.** Исследование распространения лазерных пучков в параболическом оптическом волокне с помощью интегрального параксиального оператора / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2007. – Т. 31, № 4. – С. 33-39.
19. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983.
20. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979.
21. **Dupuis, A.** Guiding in the visible with “colorful” solid-core Bragg fiber / A. Dupuis // *Opt. Lett.* – 2007. – V. 32 – P. 2882-2884.

References

1. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Opt. Lett.*, 2007. – V. 32, N 7. – P. 742-744.
2. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci, E. Santameto // *Opt. Lett.* – 2007. – V. 32. – P. 3053-3055.
3. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – V. 25, N 1. – P. 262-270.
4. **Kotlyar, V.V.** Generating hypergeometric laser beams with a diffractive optical elements / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, J. Turunen // *Appl. Opt.* – 2008. – V. 47, N 32. – P. 6124-6133.
5. **Chen, J.** Production of confluent hypergeometric beam by computer-generated hologram / J. Chen, G. Wang, Q. Xu // *Opt. Eng.* – 2011. – V. 50, N 2. – P. 024201.
6. **Bernardo, B.** Data transmission by hypergeometric modes through a hyperbolic-index medium / B. Bernardo, F. Moraes // *Opt. Exp.* – 2011. – V. 19, N 2. – P. 11264-11270.
7. **Li, J.** Propagation of confluent hypergeometric beam through uniaxial crystals orthogonal to the optical axis /

- J. Li, Y. Chen // *Opt. Las. Technol.* – 2012. – V. 44. – P. 1603-1610.
8. **Di Falco, A.** Luneberg lens in silicon photonics / A. Di Falco, S.C. Kehr, U. Leonhardt // *Opt. Express.* – 2011. – V. 19. – P. 5156-5162.
 9. **Zentgrat, T.** Plasmonic Luneberg and Eaton lenses / T. Zentgrat, Y. Liu, M.N. Mikkelsen, J. Valentine, X. Zhang // *Nat. Nanotechn.* – 2011. – V. 6. – P. 151-155.
 10. **Soifer, V.A.** Graded photonic quasicrystals / P.N. Dyaichenko, V.S. Pavelyev and V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2012. – V. 37, N 12. – P. 2178-2180.
 11. **Kotlyar, V.V.** Photonic Crystal Mikaelian Lens / Y.R. Triandafilov, V.V. Kotlyar // *Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform. Opt.)*. – 2008. – V. 17. – P. 1-7.
 12. **Kotlyar, V.V.** Subwavelength Focusing with a Mikaelian Planar Lens / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform. Opt.)*. – 2010. – V. 19. – P. 273-278.
 13. **Kotlyar, V.V.** Sharply focusing a radially polarized laser beam using a gradient Mikaelian's microlens / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev // *Opt. Commun.* – 2009. – V. 282, N 4. – P. 459-464.
 14. **Kotlyar, V.V.** Superresolution mechanism in a planar hyperbolic secant lens / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, Y.R. Triandafilov // *Computer optics.* – 2010. – V. 34, N 4. – P. 428-435. – (In Russian).
 15. **Kotlyar, V.V.** Operator description of paraxial light fields / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, Y. Vang // *Computer optics.* – 2001. – V. 21. – P. 45-52. – (In Russian).
 16. **Mendlovic, D.** Fractional Fourier transform and their optical implementation: I / D. Mendlovic, H.M. Ozaktas // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10, N 9. – P. 1875-1881.
 17. **Lohmann, A.W.** Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform / A.W. Lohmann // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10, N 10. – P. 2118-2186.
 18. **Khonina, S.N.** Investigator of propagation of laser beams in a parabolic optical fiber with an integral paraxial operator / A.S. Strilec, S.N. Khonina // *Computer optics.* – 2007. – V. 31, N 4. – P. 33-39. – (In Russian).
 19. **Prudnikov, A.P.** Integrals and series. Special functions / A.P. Prudnikov, J.A. Brychkov, O.I. Marichev. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1983. – (In Russian).
 20. **Abramovitz, M.** Handbook of mathematical functions. / Ed. by M. Abramovitz, I. Stegun. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1979. – (In Russian).
 21. **Dupuis, A.** Guiding in the visible with "colorful" solid-core Bragg fiber / A. Dupuis // *Opt. Lett.* – 2007. – V. 32 – P. 2882-2884.

HYPERGEOMETRIC LASER BEAMS IN A PARABOLIC WAVEGUIDE

V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov

Image Processing Systems Institute of the RAS,

S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

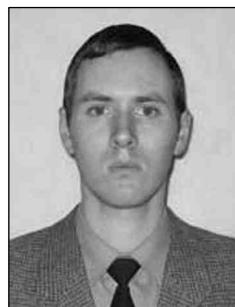
Abstract

Expression for a complex amplitude of paraxial hypergeometric laser beams, propagated in a gradient parabolic waveguide is obtained. Wide class of mode solves of Helmholtz equation in cylindrical coordinates for a gradient parabolic medium is received. This solves are proportion to Kummer functions, but only those have limited energy (physical able), which is equal to Laguerre-Gauss modes. A part of gradient parabolic fiber is considered as a parabolic micro lens, equations for numerical aperture and focal spot full width half maximum are obtained for it. Focal spot diameter can be less than a diffraction limit in a medium with a refraction number is equal to the diffraction number of the lens optical axis. Strict formulation for rings radii of a binar lens, which approximates gradient parabolic lens is obtained.

Key words: hypergeometric beams, gradient lens, binar lens, waveguide modes, parabolic lens.

Сведения об авторах

Сведения об авторах Котляр Виктор Викторович и Ковалёв Алексей Андреевич – см. стр. 307 этого номера.



Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики СГАУ в должности доцента, в Институте систем обработки изображений РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 58 работ.

E-mail: anton@smr.ru.

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), finished Samara state aerospace university in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 "mathematical modeling and program complexes", finished it in 2006 with speciality 01.04.05 "optics". Nalimov A.G. works on technical cybernetics department in SSAU as an associate professor, works as a scientist in Image processing systems institute of the Russian Academy of Sciences. Candidate in physics and mathematics, coauthor of 58 papers.

В редакцию поступила 23 июня 2012 г.