

РАСЧЁТ ЛИНЗ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПАРАКСИАЛЬНОГО ПРОДОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СООТВЕТСТВИИ С ИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ

Хонина С.Н., Устинов А.В.

Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

Рассмотрены радиально-симметричные дифракционные оптические элементы, формирующие в параксиальной области набор локальных фокусов или нулевых значений по определённому закону. При этом осевое распределение определяется пространственным спектром от радиальной функции оптического элемента, что позволяет назвать эти элементы продольно-спектральными линзами. Теоретическое объяснение эффекта базируется на сведении преобразования Френеля–Ханкеля к одномерному преобразованию Фурье. Рассмотрены различные линзы, в том числе формирующие модовые продольные распределения, пропорциональные функциям Эйри и Гаусса–Эрмита.

Ключевые слова: дифракция в параксиальной области, преобразование Френеля–Ханкеля, преобразование Фурье, функции Эйри, моды Гаусса–Эрмита.

Введение

Формирование определённого распределения интенсивности вдоль оптической оси (соосные отрезки, наборы последовательных осевых фокусов, световые бутылки, последовательность оптических «пузырьков» и т.д.) важно в различных приложениях, связанных с метрологией [1–4]; при формировании изображений протяжённых или движущихся объектов, для неразрушающего исследования материалов [5–7], а также в оптическом микроманипулировании [8–11].

Для расчёта дифракционных оптических элементов (ДОЭ), формирующих заданное продольное распределение, используются как аналитические [12–19], так и численные подходы [20–24].

В данной работе рассмотрены радиально-симметричные ДОЭ, формирующие вдоль оптической оси набор локальных фокусов, распределение которых определяется пространственным спектром от радиальной функции оптического элемента. Данное свойство позволяет назвать эти элементы продольно-спектральными линзами.

Теоретическое объяснение эффекта базируется на сведении преобразования Френеля–Ханкеля к одномерному преобразованию Фурье. Такой подход применялся в различных работах [20, 25, 26], однако использовался либо для итерационного расчёта [20], либо для определения продольной картины, формируемой фрактальными зонными пластинками [25, 26].

В данной работе рассмотрен более широкий класс ДОЭ, обеспечивающих формирование определённых последовательностей фокусов и/или нулевых значений, в том числе пропорциональных модовым распределениям Эйри и Гаусса–Эрмита.

1. Дифракция в параксиальной области

Распространение радиально-симметричного светового поля в параксиальном приближении описывается следующим интегральным преобразованием Френеля–Ханкеля:

$$G(\rho, z) = \frac{ik}{z} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty g(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right) r dr. \quad (1)$$

Для распределения на оптической оси ($\rho = 0$) выражение (1) упрощается:

$$G(0, z) = \frac{ik}{z} \exp(ikz) \int_0^\infty g(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) r dr \quad (2)$$

и может быть приведено к виду одномерного преобразования Фурье с помощью замены переменных [20]. Пусть функция $g(r)$ ограничена радиусом R , тогда удобно ввести нормированные переменные:

$$x = \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad u = \frac{R^2}{2\lambda z}. \quad (3)$$

В этом случае выражение (2) примет вид:

$$G(u) = i2\pi u \exp\left(\frac{i\pi R^2}{u\lambda^2}\right) \int_0^1 g(x) \exp(i2\pi u x) dx, \quad (4)$$

что пропорционально пространственному спектру от ограниченной функции:

$$S(u) = \int_0^T g(x) \exp(i2\pi u x) dx = \int_{-\infty}^\infty g(x) \text{rect}\left(\frac{x-T/2}{T}\right) \exp(i2\pi u x) dx, \quad (5)$$

где

$$\text{rect}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq T/2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Используя выражение (4), можно формировать на оптической оси распределения, соответствующие пространственному спектру ограниченных функций.

Интенсивность на оптической оси:

$$I(u) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_0^1 g(x) \exp(i2\pi u x) dx \right|^2 \quad (7)$$

удовлетворяет условию излучения, т.к. стремится к нулю при $u \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$).

Ситуацию, когда $u \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 0$), нужно рассматривать осторожно, т.к. в этом случае может нарушаться условие паракиальности и корректности применения выражения (1).

2. Дифракция на кольцевой апертуре

Рассмотрим простейший случай, когда входное поле является постоянным на кольцевой апертуре:

$$g(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r_1, \\ 1, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 < r, r_2 \leq R. \end{cases} \quad (8)$$

Используя (4), получаем (через a обозначен коэффициент перед интегралом):

$$\begin{aligned} G(u) &= au \int_{x_1}^{x_2} \exp(i2\pi ux) dx = \\ &= \frac{au}{i2\pi u} [\exp(i2\pi ux_2) - \exp(i2\pi ux_1)] = \\ &= 2i \exp\left(\frac{i\pi R^2}{u\lambda^2}\right) \exp(i2\pi ux_c) \sin(\pi u \Delta), \end{aligned} \quad (9)$$

где $x_c = (x_1 + x_2) / 2$ – середина кольца, $\Delta = (x_2 - x_1)$ – ширина кольца.

В исходных координатах интенсивность для выражения (9) в соответствии с (7) имеет следующий вид:

$$I(z) = 4 \sin^2 \left(\pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\lambda z} \right). \quad (10)$$

Как следует из (10), максимумы на оптической оси имеют одинаковую интенсивность и будут располагаться на расстояниях:

$$z_n = \frac{r_2^2 - r_1^2}{(2n+1)\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Таким образом, относительные положения максимумов имеют одинаковую зависимость, которая масштабируется только за счёт ширины апертуры.

Самый дальний от входной плоскости ($z = 0$) максимум будет на расстоянии:

$$z_0 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lambda}. \quad (12)$$

Остальные будут располагаться всё ближе к входной плоскости, причём с уменьшающимся расстоянием между ними:

$$\begin{aligned} z_n - z_{n+1} &= \\ &= \frac{2(r_2^2 - r_1^2)}{(2n+1)(2n+3)\lambda} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2n^2\lambda}. \end{aligned} \quad (13)$$

Разумеется, на близких расстояниях данное приближение является некорректным. Также нужно быть осторожным при уменьшении ширины апертуры, т.к. в этом случае самый дальний максимум (12) будет смещаться к входной плоскости. Пределы применимости паракиального приближения обсуждались в [27].

На рис. 1а приведены результаты моделирования для кольцевой апертуры с радиусами $r_1 = 1$ мм и $r_2 = 1,5$ мм при освещении плоским пучком с длиной волны 532 нм. По формуле (11) положения максимумов: $z_0 \approx 2350$ мм, $z_1 \approx 783$ мм, $z_3 \approx 470$ мм с точностью до округления совпали с рассчитанными интегрированием по формуле (2).

Полученные формулы можно использовать и в случае круглой апертуры. В этом случае $r_1 = 0$, $r_2 = R$. На рис. 1б показаны результаты моделирования для круглой апертуры с радиусом $R = 1$ мм. Положения максимумов: $z_0 \approx 1880$ мм, $z_1 \approx 626$ мм, $z_3 \approx 376$ мм.

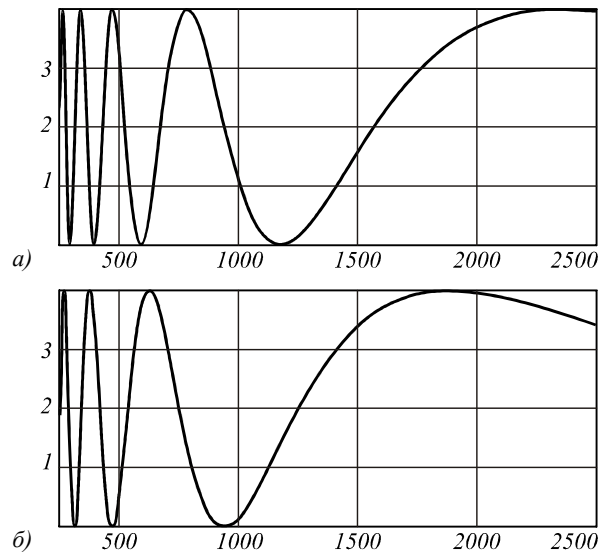


Рис. 1. Интенсивность вдоль оптической оси для кольцевой апертуры с радиусами: $r_1 = 1$ мм, $r_2 = 1,5$ мм (а) и $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ мм (б)

Для двух кольцевых апертур:

$$g(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r_1, \\ 1, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 < r < r_3, \\ 1, & r_3 \leq r \leq r_4, \\ 0, & r_4 < r, r_4 \leq R \end{cases} \quad (14)$$

получается более сложное распределение:

$$\begin{aligned} G(u) &= 2i \exp\left(\frac{i\pi R^2}{u\lambda^2}\right) \times \\ &\times [\exp(i2\pi ux_{c1}) \sin(\pi u \Delta_1) + \\ &+ \exp(i2\pi ux_{c2}) \sin(\pi u \Delta_2)], \end{aligned} \quad (15)$$

где $x_{c1} = (x_1 + x_2) / 2$, $x_{c2} = (x_3 + x_4) / 2$, $\Delta_1 = (x_2 - x_1)$, $\Delta_2 = (x_4 - x_3)$.

Интенсивность:

$$\begin{aligned} I(u) &= 4 [\sin^2(\pi u \Delta_1) + \sin^2(\pi u \Delta_2) + \\ &+ 2 \cos(i2\pi u d_{12}) \sin(\pi u \Delta_1) \sin(\pi u \Delta_2)], \end{aligned} \quad (16)$$

где $d_{12} = x_{c2} - x_{c1}$ – расстояние между центрами колец.

В полярных координатах:

$$I(z) = 4 \left[\sin^2 \left(\pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\lambda z} \right) + \sin^2 \left(\pi \frac{r_4^2 - r_3^2}{2\lambda z} \right) + 2 \cos \left(\pi \frac{(r_3^2 - r_1^2) + (r_4^2 - r_2^2)}{2\lambda z} \right) \times \sin \left(\pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\lambda z} \right) \sin \left(\pi \frac{r_4^2 - r_3^2}{2\lambda z} \right) \right] \quad (17)$$

Таким образом, получаем дифракцию на каждом из колец и перекрёстный член. При некогерентном излучении перекрёстный член исчезнет.

Используя выражение (17), можно выписать условия, накладываемые на параметры функции (14), с целью максимизировать или обнулить интенсивность на некотором заданном расстоянии $z = h$.

В частности, для формирования глобального максимума нужно выполнить условия:

$$\begin{cases} \Delta_{r1} = \lambda h (4n_1 + 1), \\ \Delta_{r2} = \lambda h (4n_2 + 1), \\ d_r = 4\lambda h m, \end{cases} \quad (18)$$

где n_1, n_2, m – целые числа, $\Delta_{r1} = r_2^2 - r_1^2$, $\Delta_{r2} = r_4^2 - r_3^2$, $d_r = (r_3^2 - r_1^2) + (r_4^2 - r_2^2)$.

Условие (18) состоит из трёх уравнений, поэтому один из четырёх параметров можно выбрать произвольным. Пусть, в частности, $r_1 = 0$, тогда решением системы (18) будет следующее:

$$\begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = \sqrt{\lambda h (4n_1 + 1)}, \\ r_3 = \sqrt{2\lambda h (n_1 - n_2 + m)}, \\ r_4 = \sqrt{\lambda h (1 + 2(n_1 + n_2 + m))}. \end{cases} \quad (19)$$

Для получения нулевого значения достаточно выполнить более простые условия, определяющие ширины колец при произвольном расстоянии между ними:

$$\begin{cases} \Delta_{r1} = 2\lambda h n_1, \\ \Delta_{r2} = 2\lambda h n_2. \end{cases} \quad (20)$$

На рис. 2 показано распределение интенсивности на оптической оси для двухкольцевой апертуры (14) с радиусами, удовлетворяющими (19) и обеспечивающими формирование глобального максимума при $z = 1000$ мм: $r_1 = 0, r_2 = 1,63$ мм, $r_3 = 2,06$ мм, $r_4 = 2,63$ мм.

Если выбрать кольца так, что:

$$r_2^2 - r_1^2 = r_4^2 - r_3^2 = \Delta_r, \quad (21)$$

т.е. выполнить одно из требований зонной пластинки, то выражение (17) упростится:

$$I(z) = 8 \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta_r}{2\lambda z} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi d_r}{2\lambda z} \right) \right] = 16 \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta_r}{2\lambda z} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi d_r}{2\lambda z} \right), \quad (22)$$

где d_r – расстояние между кольцами.

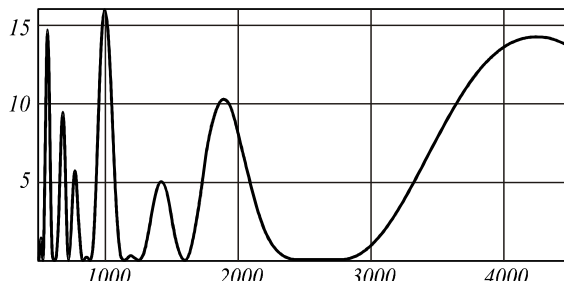


Рис. 2. Интенсивность вдоль оптической оси для двухкольцевой апертуры с радиусами: $r_1 = 0, r_2 = 1,63$ мм, $r_3 = 2,06$ мм, $r_4 = 2,63$ мм

Первый множитель в (22), связанный с шириной колец, соответствует более медленным осцилляциям, а второй множитель – более быстрым.

На рис. 3 показано распределение амплитуды на оптической оси для двухкольцевой апертуры (14) с радиусами: $r_1 = 1$ мм, $r_2 = 3$ мм, $r_3 = 3,5$ мм, $r_4 = 4,5$ мм. Положения одной серии максимумов можно получить из формулы (11):

$$z_{1,n} = \frac{\Delta_r}{(2n+1)\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

а вторая серия максимумов соответствует выражению:

$$z_{2,m} = \frac{d_r}{2m\lambda}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Однако максимум произведения двух функций, как правило, не совпадает с максимумами сомножителей и только нулевые значения обеих функций будут оставаться на своих местах. Соответствующие серии нулевых значений имеют следующую зависимость:

$$q_{1,n} = \frac{\Delta_r}{2n\lambda}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$q_{2,m} = \frac{d_r}{(2m+1)\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Из (25) и (26) получаем положения для нулевых значений:

$$\begin{aligned} q_{1,1} = 7519 \text{ мм}, \quad q_{1,2} = 3759 \text{ мм}, \quad q_{1,3} = 2506 \text{ мм}; \\ q_{2,0} = 21147 \text{ мм}, \quad q_{2,1} = 7049 \text{ мм}, \quad q_{2,2} = 4229 \text{ мм}, \\ q_{2,3} = 3021 \text{ мм}, \quad q_{2,4} = 2350 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Эти значения с точностью до округления совпадают с полученными по формуле (2) (см. рис. 3). Между нулями располагаются локальные максимумы.

Для того чтобы максимизировать интенсивность на некотором заданном расстоянии $z = h$, нужно выполнить условие, аналогичное (18):

$$\begin{cases} \Delta_r = \lambda h (2n + 1), \\ d_r = 2\lambda h m, \end{cases} \quad (27)$$

откуда следует связь между шириной колец и расстоянием между кольцами:

$$d_r = \frac{2\Delta_r m}{2n+1}. \tag{28}$$

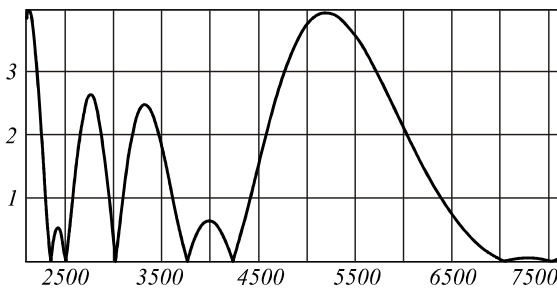


Рис. 3. Распределение амплитуды вдоль оптической оси для двухкольцевой апертуры с радиусами: $r_1 = 1$ мм, $r_2 = 3$ мм, $r_3 = 3,5$ мм, $r_4 = 4,5$ мм

Одно из возможных решений:

$$\begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = \sqrt{\lambda h(2n+1)}, \\ r_3 = 2\sqrt{\lambda hm}, \\ r_4 = \sqrt{\lambda h(4m+2n+1)}. \end{cases} \tag{29}$$

Заметим, что условие (27) приводит к более общему типу зонных пластинок, т.к. расстояние между прозрачными кольцами имеет больше степеней свободы.

На рис. 4 показано распределение интенсивности на оптической оси для двухкольцевой апертуры (14) с радиусами: $r_1=0$, $r_2=0,73$ мм, $r_3=1,46$ мм, $r_4=1,63$ мм, удовлетворяющими (29) и обеспечивающими максимум при $h=1000$ мм.

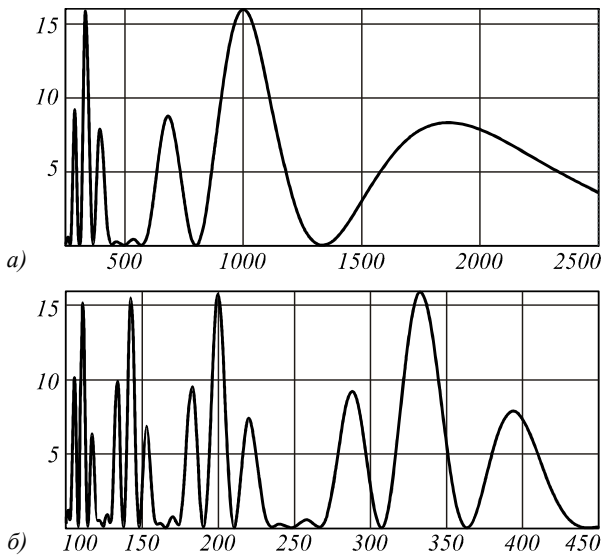


Рис. 4. Интенсивность вдоль оптической оси для двухкольцевой апертуры с радиусами: $r_1=0$, $r_2=0,73$ мм, $r_3=1,46$ мм, $r_4=1,63$ мм на интервале $z \in [250$ мм, 2500 мм] (а) и $z \in [100$ мм, 450 мм] (б)

Как видно из рис. 4, максимальное значение достигается не только при $h_0=1000$ мм, но и на других расстояниях:

$$h_n = \frac{h_0}{2n+1}, \tag{30}$$

обеспечивающих удовлетворение первого условия в (27). Таким образом, получается периодически повторяющееся распределение. Причём наличие боковых максимумов рядом с основными похоже на распределение, формируемое фрактальными зонными пластинками [25, 26].

3. Параболическая линза

Действие классической паракиальной линзы с фокусом f :

$$g(r) = \exp\left(-ik \frac{r^2}{2f}\right) \tag{31}$$

в операторе (2) соответствует в спектральном преобразовании (5) действию призмы (оптического клина) и выполняет смещение.

Для линзы, ограниченной кольцевой апертурой (8), получим соответствующее спектральное распределение:

$$\begin{aligned} S(u) &= \int_{x_1}^{x_2} \exp(-i2\pi\alpha x) \exp(i2\pi u x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \exp[i2\pi(u-\alpha)x] dx = \\ &= \frac{\sin(\pi(u-\alpha)\Delta)}{\pi(u-\alpha)} \exp(i2\pi u x_c), \end{aligned} \tag{32}$$

где $\alpha = R^2/2\lambda f$.

Интенсивность в соответствии с (7):

$$I(u) = 4\pi^2 u^2 \left(\frac{\sin(\pi(u-\alpha)\Delta)}{\pi(u-\alpha)} \right)^2. \tag{33}$$

В исходных координатах:

$$I(z) = \left(\frac{2f}{z-f} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)(z-f)}{2\lambda z f} \right]. \tag{34}$$

В отличие от (10) выражение (34) имеет максимум при $z=f$. Частота осцилляций определяется шириной кольца $\Delta r = r_2^2 - r_1^2$.

На рис. 5 показано распределение амплитуды на оптической оси, формируемое параболической линзой с фокусом $f=1000$ мм, ограниченной кольцевой апертурой различного размера. При увеличении ширины апертуры глубина фокуса становится уже.

4. Линза четвертой степени

Рассмотрим спектр, соответствующий функции вида:

$$g(x) = \exp(-i2\pi\alpha x^2). \tag{35}$$

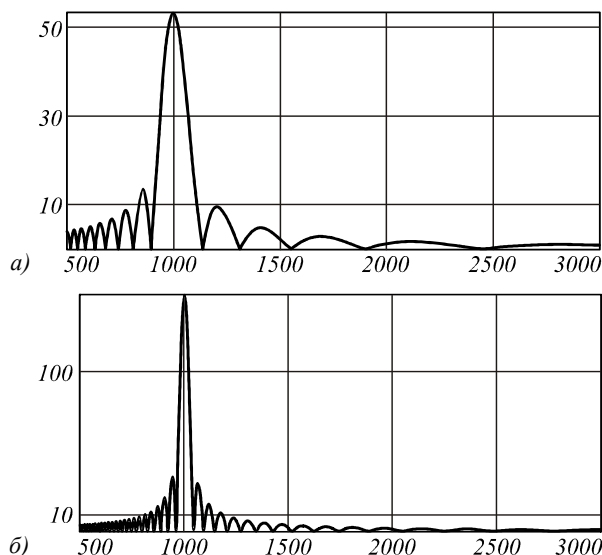


Рис. 5. Распределение амплитуды на оптической оси, формируемое параболической линзой с фокусом $f=1000$ мм, ограниченной кольцевой апертурой: $r_1=4$ мм, $r_2=5$ мм (а), $r_1=0$, $r_2=5$ мм (б)

В этом случае выражение (5) примет следующий вид:

$$S(u) = \int_{x_1}^{x_2} \exp(-i2\pi\alpha x^2) \exp(i2\pi ux) dx = \sqrt{\frac{1}{i2\alpha}} \exp\left(\frac{i\pi u^2}{2\alpha}\right) \otimes \text{sinc}[(x_2 - x_1)u], \tag{36}$$

где знак \otimes означает свёртку, $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Осцилляции в (36) связаны только с кольцевым ограничением функции (35). При увеличении интервала ограничения $[x_1, x_2]$ функция $\text{sinc}[(x_2 - x_1)u]$ будет стремиться к дельта-функции, а спектр (36) – к выражению, находящемуся слева от символа свёртки.

Выражение (36) можно записать через специальные функции:

$$S(u) = \exp\left(\frac{i\pi u^2}{2\alpha}\right) \int_{x_1-b}^{x_2-b} \exp(-i2\pi\alpha y^2) dy = \sqrt{\frac{1}{4\alpha}} \exp\left(\frac{i\pi u^2}{2\alpha}\right) \times \left\{ \pm E\left[2\pi\alpha(x_2 - b)^2\right] \pm E\left[2\pi\alpha(x_1 - b)^2\right] \right\}, \tag{37}$$

где $b = u/2\alpha$, $E(x) = C_2(x) + iS_2(x)$,

$$S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

– функции Френеля [28]. Знаки в фигурных скобках в (37) расставляются по следующему правилу:

- если $b \leq x_1$, то первый знак «+», а второй «-»;
- если $x_2 \leq b$, то первый знак «-», а второй «+»;
- если $x_1 \leq b \leq x_2$, то первый и второй знаки «+».

Интенсивность в соответствии с (7) в исходных координатах:

$$I(z) = \frac{\pi^2 R^4}{4\alpha\lambda^2 z^2} \times \left\{ \left[C_2(2\pi\alpha b_2^2(z)) \pm C_2(2\pi\alpha b_1^2(z)) \right]^2 \right\} + \frac{\pi^2 R^4}{4\alpha\lambda^2 z^2} \left\{ \left[S_2(2\pi\alpha b_2^2(z)) \pm S_2(2\pi\alpha b_1^2(z)) \right]^2 \right\}, \tag{38}$$

где $b_1(z) = \frac{r_1^2}{R^2} - \frac{R^2}{4\alpha\lambda z}$, $b_2(z) = \frac{r_2^2}{R^2} - \frac{R^2}{4\alpha\lambda z}$.

Если представить выражение (38) в виде:

$$I(z) = \frac{\eta(z)}{z^2},$$

то можно определить максимум функции в числителе $\eta(z)$. Он достигается в случае, когда оба знака в фигурных скобках в (38) «+» и аргументы равны по модулю $b_2(z) = -b_1(z)$. Тогда расстояние, на котором формируется максимальное значение для выражения (38), не больше следующей величины:

$$z_f < \frac{R^4}{2\alpha\lambda(r_1^2 + r_2^2)}. \tag{39a}$$

Нижнюю границу можно получить, если применить к (36) классический метод стационарной фазы, тогда (с учётом $r_2 = R$):

$$z_f > \frac{R^2}{4\alpha\lambda}. \tag{39б}$$

Для $r_1 = 0$ получим следующий интервал расположения максимального значения:

$$\frac{R^2}{4\alpha\lambda} < z_{0f} < \frac{R^2}{2\alpha\lambda}. \tag{39в}$$

Заметим, что верхняя граница в (39в) соответствует фокусу обычной параболической линзы, рассмотренной в предыдущем разделе.

На рис. 6а показано осевое распределение, сформированное линзой четвёртой степени, ограниченной круговой апертурой радиуса $R = 3$ мм с параметром $\alpha = 6,45$. По формуле (39в) максимальное значение должно быть на расстоянии $656 \text{ мм} < z_{0f} < 1312 \text{ мм}$. Действительно, как следует из рис. 6а, максимум находится в этом интервале.

Часто фазовая зависимость четвёртой степени от радиуса рассматривается как абберация классической линзы [29]. В разделе 3 было показано, что классическая параболическая линза смещает спектр (5) на величину, пропорциональную фокусному расстоянию.

На рис. 6б показано осевое распределение, сформированное отдельно линзой четвёртой степени, а на рис. 6в – совместно с параболической линзой. Видно, что распределение сместилось ближе к входной плоскости, примерно сохранив свой вид.

Как видно из приведённых примеров, линза четвёртой степени не позволяет формировать наборы локальных фокусов. Таким же свойством будут обладать линзы более высоких чётных степеней.

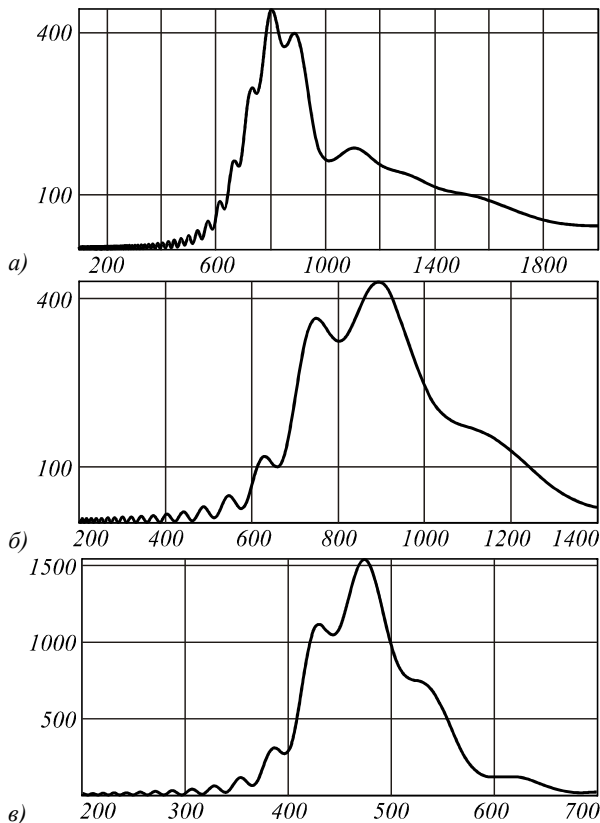


Рис. 6. Распределение интенсивности на оптической оси, формируемое линзой четвертой степени, ограниченной круговой апертурой радиуса $R=3$ мм (а); ограниченной кольцевой апертурой: $r_1=2$ мм, $r_2=3$ мм: без дополнительной линзы (б), с дополнительной линзой с фокусом $f=1000$ мм (в)

5. Распределения, пропорциональные функциям Эйри

Известно [29], что функции Эйри являются результатом преобразования Фурье от экспоненциальной кубической функции. Для генерации Эйри-подобных пучков использовались различные ограниченные аналоги [30-33], в том числе с зеркальной и радиальной симметрией.

Рассмотрим ограниченную смещённую экспоненциальную кубическую функцию:

$$g(x) = \begin{cases} \exp(ic(x-b)^3), & 0 \leq x \leq T, \\ 0, & x > T. \end{cases} \quad (40)$$

Её пространственный спектр пропорционален функции Эйри:

$$S(u) = \int_0^T \exp(ic(x-b)^3) \exp(i2\pi ux) dx \sim \sim \text{sinc}(Tu) \otimes \text{Ai}(\text{sgn}(c)u), \quad (41)$$

где $\text{Ai}(x)$ – функция Эйри [29], $\text{sgn}(x)$ – знаковая функция.

Функция Эйри имеет несимметричное распределение относительно начала координат (см. табл. 1), поэтому знак параметра c позволяет зеркально преобразовывать это распределение. Смещение распре-

деления можно выполнить как в предыдущих разделах – дополнительной параболической линзой.

Кубические фазовые маски используются для компенсации дефокусировки в некогерентных изображенияющих системах [34–37]. Функция размытия точки такой системы имеет вид функции Эйри.

В табл. 1 показаны спектральные и осевые распределения, полученные для смещённой кубической фазы при различных параметрах, в том числе с дополнительной линзой (вторая строка в табл. 1).

Таким образом, на оптической оси формируется иная, чем в предыдущих разделах, последовательность локальных максимумов и нулевых значений.

6. Распределения, пропорциональные модам Гаусса–Эрмита

Рассмотрим одномерную моду Гаусса–Эрмита (ГЭ) n -го порядка:

$$f(x) = gh_n(x) = \exp(-x^2 / (2\sigma_0^2)) H_n(x / \sigma_0), \quad (42)$$

где σ_0 – радиус гауссова пучка, $H_n(x)$ – полином Эрмита [29].

Известно [21], что эти моды инвариантны к преобразованию Фурье в бесконечных пределах.

Учитывая, что гауссовы пучки имеют конечную энергию, сосредоточенную практически полностью в центральной части пучка, то при ограничении бесконечных пределов происходит лишь незначительное искажение.

Моды ГЭ определяются на симметричном интервале, поэтому, чтобы получить нужное распределение только на положительной оси координат, воспользуемся инвариантностью преобразования Фурье к смещению. При условии $T \gg \sigma_0$ пространственный спектр смещённой функции (42) не меняется с точностью до фазового множителя:

$$\begin{aligned} S(u) &= \int_0^T gh_n(x-b) \exp(i2\pi ux) dx = \\ &= \int_{-b}^{T-b} gh_n(y) \exp(i2\pi u(y+b)) dy = \\ &\approx \exp(i2\pi ub) gh_n(u). \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, интенсивность (7):

$$I(z) \sim \left(\frac{1}{z}\right)^2 gh_n^2\left(\frac{1}{z}\right), \quad (44)$$

причём, учитывая наличие гауссовой функции:

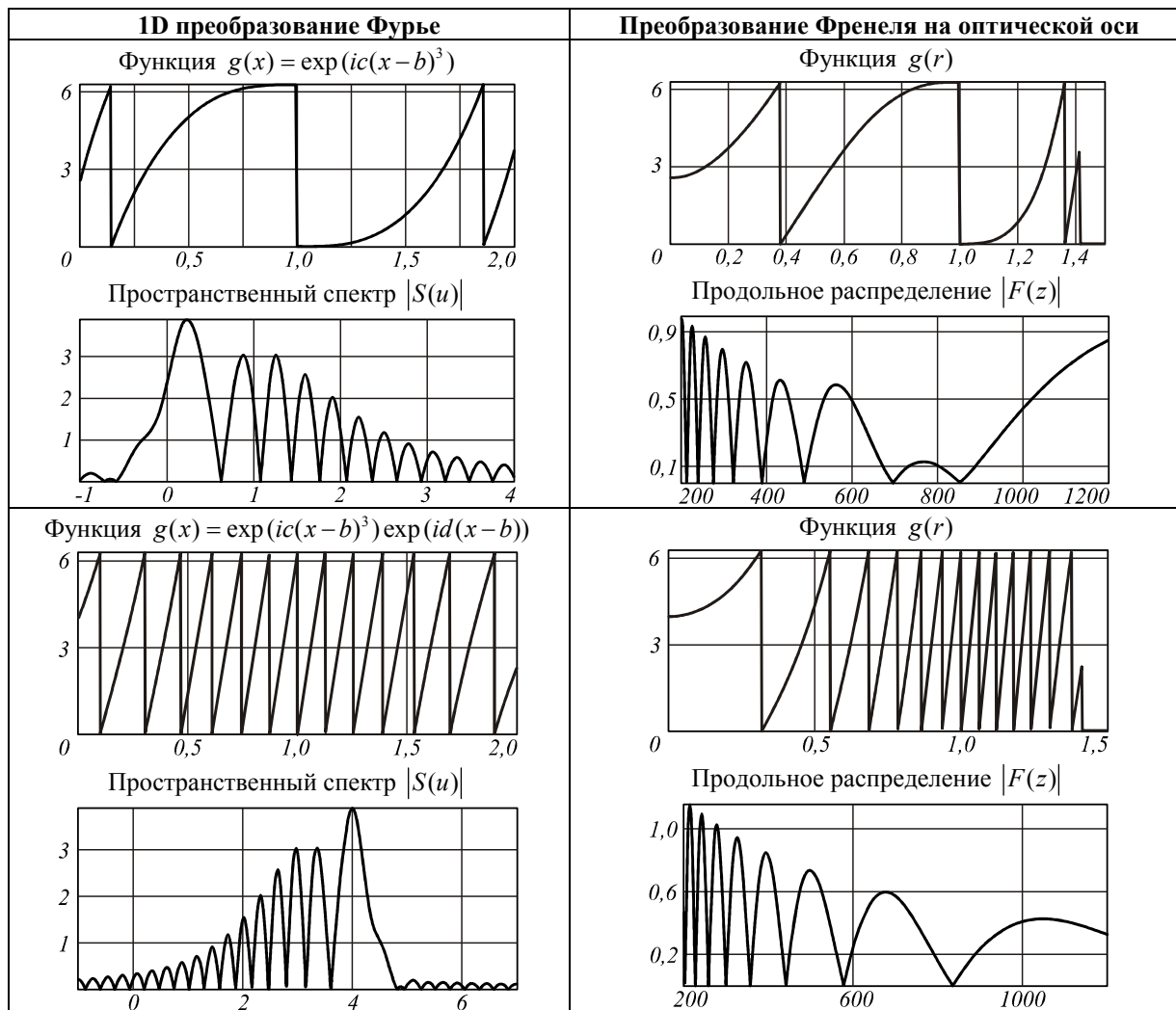
$$\lim_{z \rightarrow 0} I(z) = 0. \quad (45)$$

Таким образом, порядок моды ГЭ n определяет количество и положение локальных максимумов, а также нулевых значений, формируемых вдоль оптической оси (см. табл. 2).

Заключение

В скалярном паракиальном приближении рассмотрены радиально-симметричные ДОЭ, обеспечивающие формирование определённых последовательностей фокусов и/или нулевых значений.

Таблица 1. Формирование распределения, пропорционального функции Эйри



Использование кольцевой апертуры, освещённой плоской волной, является наиболее простым способом формирования в параксиальной области цепочки локальных максимумов с одинаковой интенсивностью. Причём относительные положения максимумов имеют одинаковую зависимость, которая масштабируется за счёт ширины апертуры.

Показано, что при использовании двухкольцевой апертуры можно формировать на заданном расстоянии либо максимум, либо нулевое значение интенсивности.

Получено условие для синтеза двухкольцевых ДОЭ, формирующих периодическое осевое распределение, аналогичное фрактальным зонным пластинкам.

На основе сведения преобразования Френеля–Ханкеля к одномерному преобразованию Фурье показано, что классическая параболическая линза смещает распределение вдоль оптической оси пропорционально фокусному расстоянию. Таким образом, дополнение ДОЭ квадратичным фазовым элементом является одним из параметров управления распределением вдоль оптической оси.

Показана возможность формирования последовательности локальных максимумов и нулевых значений пропорционально модовым распределениям Эйри и Гаусса–Эрмита. Причём в последнем случае количество экстремумов определяется номером моды.

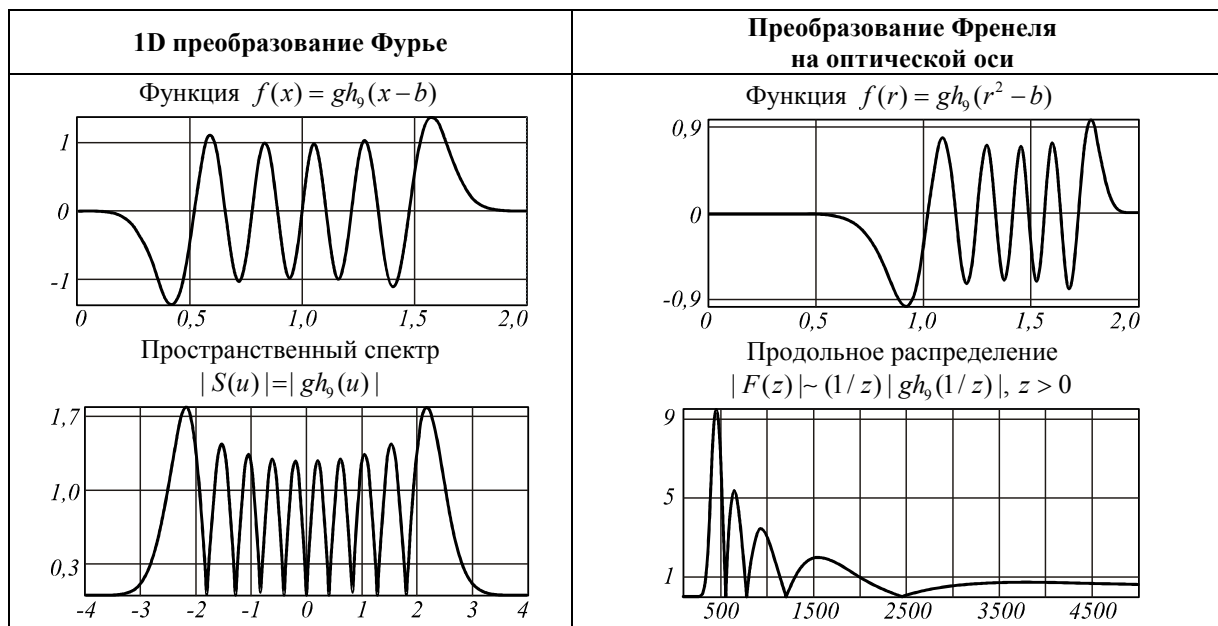
Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ 13-07-00266, 13-07-97004р_поволжье_а и 13-07-97005-р_поволжье_а) и Министерства образования и науки Российской Федерации, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение №8231).

Литература

1. **Arimoto, R.** Imaging properties of axicon in a scanning optical system / R. Arimoto, C. Saloma, T. Tanaka, and S. Kawata // *Appl. Opt.* – 1992. – Vol. 31(31). – P. 6653-6657.
2. **Котляр, В.В.** Бесконтактное прецизионное измерение линейных смещений с использованием ДОЭ, формирующих моды Бесселя / В.В. Котляр, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2001. – № 21. – С. 102-104.

Таблица 2. Формирование распределения, пропорционального моде ГЭ



3. **Wang, K.** Influence of the incident wave-front on intensity distribution of the nondiffracting beam used in large-scale measurement / K. Wang, L. Zeng and Ch. Yin // *Opt. Commun.* – 2003. – Vol. 216. – P. 99-103.
4. **Fortin, M.** Optical tests with Bessel beam interferometry / Mathieu Fortin, Michel Piché and Ermanno F. Borra // *Optics Express.* – 2004. – Vol. 12, N 24. – P. 5887-5895.
5. **Leitgeb, R.A.** Extended focus depth for Fourier domain optical coherence microscopy / R.A. Leitgeb, M. Villiger, A.H. Bachmann, L. Steinmann and T. Lasser // *Opt. Lett.* – 2006. – Vol. 31(16). – P. 2450-2452.
6. **Lee, K.-S.** Bessel beam spectral-domain high-resolution optical coherence tomography with micro-optic axicon providing extended focusing range / Kye-Sung Lee, Jan-nick P. Rolland // *Opt. Lett.* – 2008. – Vol. 33(15). – P. 1696-1698.
7. **Lu, J.** Producing deep depth of field and depth-independent resolution in NDE with limited diffraction beams / Jian-yu Lu, J.F. Greenleaf // *Ultrason. Imag.* – 1993. – Vol. 15(2). – P. 134-149.
8. **Arlt, J.** Generation of beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity: the optical bottle beam / J. Arlt, M. Padgett // *Opt. Lett.* – 2000. – Vol. 25(4). – P. 191-193.
9. **Garces-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam / V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett and K. Dholakia // *Nature.* – 2002. – V. 419. – P. 145-147.
10. **Soifer, V.A.** Optical microparticle manipulation: advances and new possibilities created by diffractive optics / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar and S.N. Khonina // *Phys. Part. Nucl.* – 2004. – Vol. 35. – P. 733-766.
11. **Zhao, Y.** Creation of a three-dimensional optical chain for controllable particle delivery / Y. Zhao, Q. Zhan, Y. Zhang and Y.P. Li // *Opt. Lett.* – 2005. – Vol. 30. – P. 848-850.
12. **Davidson, N.** Holographic axicons: high resolution and long focal depth / N. Davidson, A.A. Friesem and E. Hasman // *Opt. Lett.* – 1991. – V. 16(7). – P. 523-525.
13. Computer generated diffractive multi-focal lens / Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A. // *Journal of Modern Optics.* – 1992. – Vol.39, № 6. – P.1245-1251.
14. **Soifer, V.A.** Multifocal diffractive elements / Soifer V.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L. // *Optical Engineering.* – 1994. – Vol.33, № 11. – P.3610-3615.
15. Analysis of quasiperiodic and geometric optical solutions of the problem of focusing into an axial segment / Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Soifer V.A., Tzaregorodtzev A.Ye. // *Optik.* – 1995. – Vol.101, № 2. – P.37-41.
16. **Chavez-Cerda, S.** Interference of traveling nondiffracting beams / S. Chavez-Cerda, M.A. Meneses-Nava and J. Miguel Hickmann // *Opt. Lett.* – 1998. – Vol. 23. – P. 1871-1873.
17. **Kotlyar, V.V.** Phase formers of light fields with longitudinal periodicity / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer and S.N. Khonina // *Optics and Spectroscopy.* – 1998. – Vol. 84(5). – P. 771-777.
18. Design of microlenses with long focal depth based on the general focal length function / Jie Lin, Jianlong Liu, Jiasheng Ye and Shutian Liu // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2007. – Vol. 24(6). – P. 1747-1751.
19. **Хонина, С.Н.** Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью / С.Н. Хонина, С.Г. Вологовский // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 401-411.
20. **Khonina, S.N.** Calculation of the focusators into a longitudinal line segment and study of a focal area / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // *J. Modern Optics.* – 1993. – Vol. 40(5). – P. 761-769.
21. *Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements*, ed. Victor A. Soifer. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 765 p.
22. **Chen, W.** Three-dimensional focus shaping with cylindrical vector beams / W. Chen and Q. Zhan // *Opt. Commun.* – 2006. – Vol. 265. – P. 411-417.
23. **Menon, R.** Design of diffractive lenses that generate optical nulls without phase singularities / R. Menon, P. Rogge,

- Н.-Y. Tsai // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2009. – Vol. 26, N 2. – P. 297-304.
24. **Качалов, Д.Г.** Стохастическая оптимизация квантовых ДОЭ для формирования продольных распределений интенсивности / Д.Г. Качалов, В.С. Павельев, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Том 33, № 4. – С. 441-445.
 25. **Saavedra, G.** Fractal zone plates / G. Saavedra, W.D. Furlan, J.A. Monsoriu // *Opt. Lett.* – 2003. – Vol. 28, N 12. – P. 971-973.
 26. **Casanova, C.** Self-similar focusing with generalized devil's lenses / C. Casanova, W.D. Furlan, L. Remón, A. Calatayud, J.A. Monsoriu, O. Mendoza-Yero // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2011. – Vol. 28, N 2. – P. 210-213.
 27. **Хонина, С.Н.** Бинарная линза: исследование локальных фокусов / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Р.В. Скиданов // *Компьютерная оптика.* – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 339-346.
 28. **Abramowitz, M.** Handbook of Mathematical Functions / M. Abramowitz and I.A. Stegun – Courier Dover Publications, 1972. – 1046 p.
 29. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf. – 6th ed. – Pergamon, Oxford, 1980. – Chap. 8.3.
 30. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // *Opt. Letters.* – 2007. – V. 32(8). – P. 979-981.
 31. **Banders, M.A.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M.A. Banders, J.C. Gutierrez-Vega // *Opt. Express.* – 2007. – V. 15(25). – P. 16719-16728.
 32. **Хонина, С.Н.** Ограниченные 1D пучки Эйри: лазерный веер / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // *Компьютерная оптика.* – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 168-174.
 33. **Хонина, С.Н.** Эйри-подобные двумерные распределения / С.Н. Хонина // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва.* – 2010. – № 4(24). – С. 299-311.
 34. **Dowski, E.R.** Extended depth of field through wavefront coding / E.R. Dowski and W.T. Cathey // *Appl. Opt.* – 1995. – Vol. 34. – P. 1859-1866.
 35. **Marks, D.L.** Three-dimensional tomography using a cubic-phase plate extended depth-of-field system / D.L. Marks, R.A. Stack and D.J. Brady // *Opt. Lett.* – 1999. – Vol. 24. – P. 253-255.
 36. **Pan, C.** Extension ratio of depth of field by wavefront coding method / C. Pan, J. Chen, R. Zhang, S. Zhuang // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16(17). – P. 13364-13371.
 37. **Хонина, С.Н.** Фазовая аподизация изображающей системы с целью увеличения глубины фокуса в когерентном и некогерентном случаях / С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2012. – Т. 36, № 3. – С. 357-364.
- References**
1. **Arimoto, R.** Imaging properties of axicon in a scanning optical system / R. Arimoto, C. Saloma, T. Tanaka and S. Kawata // *Appl. Opt.* – 1992. – Vol. 31(31). – P. 6653-6657.
 2. **Kotlyar, V.V.** Noncontact precision measurement of linear displacement using DOE forming Bessel modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina // *Computer Optics.* – 2001. – Vol. 21. – P. 102-104. – (In Russian).
 3. **Wang, K.** Influence of the incident wave-front on intensity distribution of the nondiffracting beam used in large-scale measurement / K. Wang, L. Zeng and Ch. Yin // *Opt. Commun.* – 2003. – Vol. 216. – P. 99-103.
 4. **Fortin, M.** Optical tests with Bessel beam interferometry / Mathieu Fortin, Michel Piché and Ermanno F. Borra // *Optics Express.* – 2004. – Vol. 12, N 24. – P. 5887-5895.
 5. **Leitgeb, R.A.** Extended focus depth for Fourier domain optical coherence microscopy / R.A. Leitgeb, M. Villiger, A.H. Bachmann, L. Steinmann and T. Lasser // *Opt. Lett.* – 2006. – Vol. 31(16). – P. 2450-2452.
 6. **Lee, K.-S.** Bessel beam spectral-domain high-resolution optical coherence tomography with micro-optic axicon providing extended focusing range / Kye-Sung Lee, Jannick P. Rolland // *Opt. Lett.* – 2008. – Vol. 33(15). – P. 1696-1698.
 7. **Lu, J.** Producing deep depth of field and depth-independent resolution in NDE with limited diffraction beams / Jian-yu Lu, J.F. Greenleaf // *Ultrason. Imag.* – 1993. – Vol. 15(2). – P. 134-149.
 8. **Arlt, J.** Generation of beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity: the optical bottle beam / J. Arlt, M. Padgett // *Opt. Lett.* – 2000. – Vol. 25(4). – P. 191-193.
 9. **Garces-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam / V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett and K. Dholakia // *Nature.* – 2002. – V. 419. – P. 145-147.
 10. **Soifer, V.A.** Optical microparticle manipulation: advances and new possibilities created by diffractive optics / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar and S.N. Khonina // *Phys. Part. Nucl.* – 2004. – Vol. 35. – P. 733-766.
 11. **Zhao, Y.** Creation of a three-dimensional optical chain for controllable particle delivery / Y. Zhao, Q. Zhan, Y. Zhang and Y.P. Li // *Opt. Lett.* – 2005. – Vol. 30. – P. 848-850.
 12. **Davidson, N.** Holographic axilens: high resolution and long focal depth / N. Davidson, A.A. Friesem and E. Hasman // *Opt. Lett.* – 1991. – V. 16(7). – P. 523-525.
 13. Computer generated diffractive multi-focal lens / Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A. // *Journal of Modern Optics.* – 1992. – Vol. 39, № 6. – P. 1245-1251.
 14. **Soifer, V.A.** Multifocal diffractive elements / Soifer V.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L. // *Optical Engineering.* – 1994. – Vol. 33, № 11. – P. 3610-3615.
 15. Analysis of quasiperiodic and geometric optical solutions of the problem of focusing into an axial segment / Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Soifer V.A., Tzaregorodtzev A.Ye. // *Optik.* – 1995. – Vol. 101, № 2. – P. 37-41.
 16. **Chavez-Cerda, S.** Interference of traveling nondiffracting beams / S. Chavez-Cerda, M.A. Meneses-Nava and J. Miguel Hickmann // *Opt. Lett.* – 1998. – Vol. 23. – P. 1871-1873.
 17. **Kotlyar, V.V.** Phase formers of light fields with longitudinal periodicity / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer and S.N. Khonina // *Optics and Spectroscopy.* – 1998. – Vol. 84(5). – P. 771-777.
 18. Design of microlenses with long focal depth based on the general focal length function / Jie Lin, Jianlong Liu, Jisheng Ye and Shutian Liu // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2007. – Vol. 24(6). – P. 1747-1751.
 19. **Khonina, S.N.** Fraxicon – diffractive optical element with conical focal domain / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Computer Optics.* – 2009. – Vol. 33, N 4. – P. 401-411. – (In Russian).
 20. **Khonina, S.N.** Calculation of the focusators into a longitudinal line segment and study of a focal area / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // *J. Modern Optics.* – 1993. – Vol. 40(5). – P. 761-769.

21. Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements, ed. Victor A. Soifer. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 765 p.
22. **Chen, W.** Three-dimensional focus shaping with cylindrical vector beams / W. Chen and Q. Zhan // Opt. Commun. – 2006. – Vol. 265. – P. 411-417.
23. **Menon, R.** Design of diffractive lenses that generate optical nulls without phase singularities / R. Menon, P. Rogge, H.-Y. Tsai // J. Opt. Soc. Am. A. – 2009. – Vol. 26, N 2. – P. 297-304.
24. **Kachalov, D.G.** Optimization of binary DOE forming intensity distribution along an axial focal zone / D.G. Kachalov, S.V. Pavelyev, S.N. Khonina // Computer Optics. – 2009. – Vol. 33, N 4. – P. 441-445. – (In Russian).
25. **Saavedra, G.** Fractal zone plates / G. Saavedra, W.D. Furlan, J.A. Monsoriu // Opt. Lett. – 2003. – Vol. 28, N 12. – P. 971-973.
26. **Casanova, C.** Self-similar focusing with generalized devil's lenses / C. Casanova, W.D. Furlan, L. Remón, A. Calatayud, J.A. Monsoriu, O. Mendoza-Yero // J. Opt. Soc. Am. A. – 2011. – Vol. 28, N 2. – P. 210-213.
27. **Khonina, S.N.** Binary lens: investigation of local focuses / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, R.V. Skidanov // Computer Optics. – 2011. – Vol. 35, N 3. – P. 339-346. – (In Russian).
28. **Abramowitz, M.** Handbook of Mathematical Functions / M. Abramowitz and I.A. Stegun – Courier Dover Publications, 1972. – 1046 p.
29. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf. – 6th ed. – Pergamon, Oxford, 1980. – Chap. 8.3.
30. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Opt. Letters. – 2007. – V. 32(8). – P. 979-981.
31. **Banders, M.A.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M.A. Banders, J.C. Gutierrez-Vega // Opt. Express. – 2007. – V. 15(25). – P. 16719-16728.
32. **Khonina, S.N.** Bounded one-dimensional Airy beams: laser fan / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Computer Optics. – 2008. – Vol. 32, N 2. – P. 168-174. – (In Russian).
33. **Khonina, S.N.** Airy-like two-dimensional distributions / S.N. Khonina // Bulletin of Samara State Aerospace University. – 2010. – Vol. 4(24). – P. 299-311. – (In Russian).
34. **Dowski, E.R.** Extended depth of field through wavefront coding / E.R. Dowski and W.T. Cathey // Appl. Opt. – 1995. – Vol. 34. – P. 1859-1866.
35. **Marks, D.L.** Three-dimensional tomography using a cubic-phase plate extended depth-of-field system / D.L. Marks, R.A. Stack and D.J. Brady // Opt. Lett. – 1999. – Vol. 24. – P. 253-255.
36. **Pan, C.** Extension ratio of depth of field by wavefront coding method / C. Pan, J. Chen, R. Zhang, S. Zhuang // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16(17). – P. 13364-13371.
37. **Khonina, S.N.** Phase apodization of imaging system to increase the focal depth in coherent and incoherent cases / S.N. Khonina // Computer Optics. – 2012. – Vol. 36, N 3. – P. 357-364. – (In Russian).

DESIGN LENSES FORMING PARAXIAL LONGITUDINAL DISTRIBUTION ACCORDING TO THEIR SPATIAL SPECTRA

*S.N. Khonina, A.V. Ustinov
Image Processing Systems Institute of RAS*

Abstract

We consider radially-symmetric diffractive optical elements forming along optical axis a set of local foci or zero values by the specific law. The axial distribution is determined by the spatial spectrum of the radial function of the optical element that allows us to call these elements longitudinally-spectral lenses. The theoretical explanation of the effect is based on the reduction of the on-axis Fresnel-Hankel transform to the one-dimensional Fourier transform. We investigate different lenses, including that forming the longitudinal-modal distribution proportional to the Airy and Gauss-Hermite functions.

Key words: diffraction in the paraxial region, Fresnel-Hankel transform, Fourier transform, the Airy function, Gauss-Hermite modes.

Сведения об авторах – см. стр. 169 этого номера.

Поступила в редакцию 17 марта 2013 г.