ФРАКТАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ КОСИНУСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ОБЛАСТЯМИ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Каспарьян М.С.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Вводится аналог косинусного преобразования на предфрактальной области. Из фрактального дискретного преобразования выводится фрактальное дискретное косинусное преобразование на двумерных областях, ассоциированных с фундаментальными областями систем счисления в мнимых квадратичных кольцах. Показывается, что это преобразование ортогонально.

Ключевые слова: ортогональные преобразования, фрактал, канонические системы счисления, косинусное преобразование.

Введение

Одним из важнейших дискретных ортогональных преобразований (ДОП), применяемых в цифровой обработке изображений, является дискретное косинусное преобразование и его различные версии. Это связано, в частности, с тем, что базисные функции дискретного косинусного преобразования (ДКП) для многих классов сигналов близки к базисным функциями преобразования Карунена–Лоэва. Тем не менее, несмотря на известные преимущества ДКП, при блочном кодировании изображения всё же возникают артефакты на границах квадратных блоков, достаточно визуально различимые именно из-за их структурированности. Возможной альтернативой классического ДКП, свободной от указанного недостатка, являлось бы ДОП, подобное ДКП, но определённое на блоках неправильной формы, которые образуют покрытие области определения изображения. Возможным преобразованием, удовлетворяющим сформулированным свойствам, является одномерное ДКП, базисные функции которого определены на некоторой траектории-развёртке двумерной области. Такие преобразования рассматривались в [1]. В настоящей работе вводится и исследуется новое ДОП – «фрактальное ДКП», связанное с фурьеподобными преобразованиями, определёнными на фрактальных областях специфического вида (фундаментальные области КСС в мнимых квадратичных полях), таким же образом, как и обычное ДКП связано с дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

1. Канонические системы счисления

Приведём краткие сведения о канонических системах счисления (КСС) в мнимых квадратичных поля [2]–[4].

Определение 1. Пусть $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ есть квадратичное поле: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)=\left\{z=a+b\sqrt{d};a,b\in\mathbb{Q}\right\}$, d – целое число, свободное от квадратов.

Если для элемента $z=a+b\sqrt{d}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ норма и след есть целые числа,

$$Norm\left(z\right)=\left(a+b\sqrt{d}\right)\left(a-b\sqrt{d}\right), \tag{1}$$

$$Tr\left(z\right)=\left(a+b\sqrt{d}\right)+\left(a-b\sqrt{d}\right), \tag{2}$$

то элемент называется целым алгебраическим элементом поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$. Целые элементы образуют решётку на комплексной плоскости.

Определение 2. Целое алгебраическое число $\alpha=A+\sqrt{d}$ называется основанием канонической системы счисления в кольце целых элементов поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, если любой целый элемент этого поля однозначно представим в форме конечной суммы

$$\begin{gathered} z=\sum_{j=0}^{k(z)} z_j\cdot\alpha^j, \\ z_j\in N=\left\{0,1,\cdots,\left|Norm(\alpha)\right|-1\right\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Пара $\left\{\alpha,N\right\}$ называется канонической системой счисления (КСС) в кольце целых элементов поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.

В работе рассматривается только случай $d<0$, то есть мнимые квадратичные поля. Приведём несколько примеров канонических систем счисления с различными нормами.

Пример 1. Пусть $Norm(\alpha)=2$, тогда в силу (3) $N=\left\{0,1\right\}$. В работе [2] показано, что существует ровно три мнимых квадратичных поля для $d=-1,-2,-3$, в кольцах целых элементов которых существуют бинарные КСС, а именно:

1) кольцо целых Гауссовых чисел $\mathbb{Z}\left(i\right)\in\mathbb{Q}\left(i\right)$ с основаниями, равными $\alpha=-1\pm i$;
2) кольцо $\mathbb{S}\left(i\sqrt{7}\right)\in\mathbb{Q}\left(i\sqrt{7}\right)$ с основаниями, равными $\alpha=\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$;
3) кольцо $\mathbb{S}\left(i\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Q}\left(i\sqrt{2}\right)$ с основаниями, равными $\alpha=\pm i\sqrt{2}$.

Пример 2. При $Norm\left(\alpha\right)=7$ существуют следующие мнимые квадратичные поля, в кольцах целых элементов которых существуют семеричные канонические системы счисления, а именно:

1) поле $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{6}\right)$ с основанием $\alpha = -1 \pm i\sqrt{6}$;

2) поле $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right)$ с основанием $\alpha = \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

3) поле $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{19}\right)$ с основанием $\alpha = \frac{-3 \pm \mathrm{i}\sqrt{19}}{2}$.

Если в формуле (3) k фиксировано, то множество элементов, представимых k-членной суммой, представляет собой ограниченное множество на комплексной плоскости, которое будем называть k-фундаментальной областью, примеры таких областей изображены на рис. 1*а–в*.

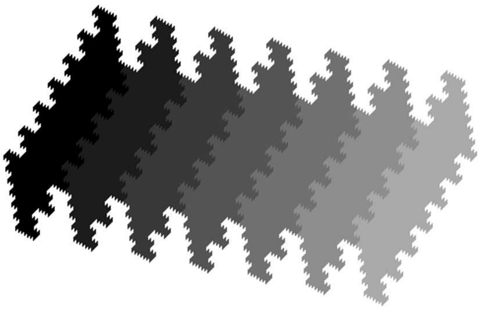


Рис. 1а. $\mathrm{k} = 6, \alpha = \frac{-3 \pm i\sqrt{19}}{2}$

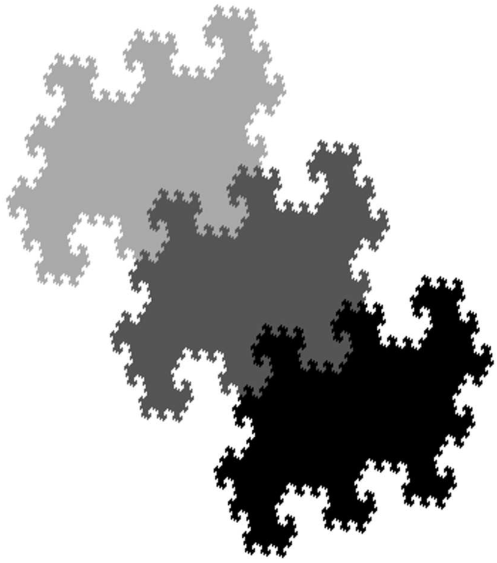


Рис. 1б. $\mathrm{k} = 10,\ \alpha = -1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$

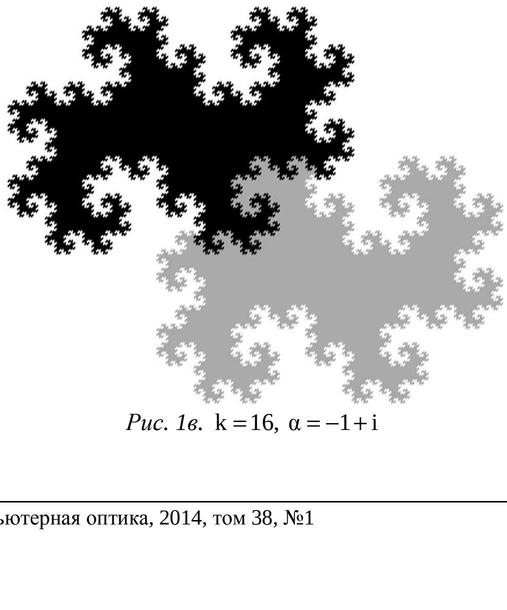


Рис. 1в. $\mathrm{k} = 16,\ \alpha = -1 + \mathrm{i}$

Оттенки серого цвета на приведённых рисунках подчёркивают самоподобный «характер» k-фундаментальных областей при растущем k.

В работе [3] приводится классификационная теорема для КСС в мнимых квадратичных полях, устанавливающая явную связь между параметрами α, d, N.

Теорема 1.

(а) Пусть $d \le -2$, $\mathrm{d} \ne 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Пара $\{\alpha, N\}$ является канонической системой счисления в кольце $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{d}}\right)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{d}}$, $0 \le -2A \le A^2 - d \ge 2; A \in \mathbb{Z}$.

(б) Пусть $d \le -2$. Пара $\{\alpha, N\}$ является канонической системой счисления в кольце $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{d}}\right)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{1}{2}\left(B \pm \sqrt{d}\right)$,

$-1 \le -B \le \frac{1}{4}\left(B^2 - d\right) \ge 2$; $B \in \mathbb{Z}$ и нечётное.

2. Фрактальное дискретное ортогональное преобразование

Следуя работе [5], дискретное преобразование Фурье (ДПФ) длины $N = 2^t$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) exp\left\{2\pi i \frac{nm}{N}\right\}$$

$$m = 0, \ldots, N-1$$

запишем в форме

$$X(m) = \sum_{n \in G} x(n) E(m \cdot n),$$

$$m \in G = \{0, \ldots, N-1\}.$$

Базисные функции ДПФ обладают свойствами:

1) $E(n \cdot m) = E(n) + E(m)$;

2) $E(N) = E(0) = 1$;

3) $E\left(p^{k-1}\right) = \exp\left\{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{N}\right\}, N = p^k$.

Введём ДОП на k-фундаментальной области G_k со свойствами базисных функций Λ_k, аналогичными свойствам базисных функций ДПФ:

1) $\Lambda_k(m+n) = \Lambda_k(m) \cdot \Lambda_k(n)$;

2) $\Lambda_k(\alpha^k) = 1, \Lambda_k(0) = 1$;

3) $\Lambda_k(\alpha^{k-1}) = \exp\left\{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{Norm(\alpha)^k}\right\}$;

4) $\Lambda_k(\alpha \cdot x) = \Lambda_{k-1}(x)$.

В работе [5] показано, что функция Λ_k имеет вид:

$\Lambda_k(x) = \exp\left\{C_1 \cdot x + C_2 \cdot \bar{x}\right\}$, где

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\overline{\alpha}^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\overline{\alpha}\right)}, \\ C_2 = \dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\overline{\alpha}\right)}. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда фрактальное дискретное преобразование Фурье (ФДПФ) будет иметь вид:

$$X\left(m\right) = \sum_{n\in G_k} x\left(n\right)\cdot\Lambda_k\left(m\cdot n\right),\ m\in G_k. \tag{5}$$

В работе [5] показано, что справедлива теорема:

Теорема 2. Пусть α – основание канонической системы счисления с $Norm\left(\alpha\right)\geq 2$, множество G_k – k-фундаментальная область, тогда преобразование (5) с базисными функциями $\Lambda_k(n) = \exp\left\{C_1\cdot n + C_2\cdot\overline{n}\right\}$, где $n\in G_k$ и

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\overline{\alpha}^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\overline{\alpha}\right)}, \\ C_2 = \dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\overline{\alpha}\right)}, \end{cases}$$

является ортогональным.

Учитывая коэффициенты (4), выражение для $\Lambda_k\left(x\right)$ может быть преобразовано к виду:

$$\Lambda_k\left(x\right) = \exp\left\{\frac{\pi\cdot i\cdot\mathrm{Im}\left(\alpha^k\cdot\overline{x}\right)}{Norm\left(\alpha^{k-1}\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\alpha\right)}\right\}. \tag{6}$$

3. Фрактальное дискретное косинусное преобразование

Как известно [6]–[8], ДКП имеет вид

$$X\left(m\right) = \lambda\left(m\right)\sum_{n=0}^{N-1} x\left(n\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot m\cdot\left(2n+1\right)}{2N}\right),$$

где $\lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{N}}, n=0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}, n\neq 0 \end{cases}.$

Пользуясь тем, что

$$\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot\left(2x+1\right)}{2N}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \exp\left\{\dfrac{\pi\cdot n\cdot\left(2x+1\right)}{2N}i\right\} + \\ \exp\left\{-\dfrac{\pi\cdot n\cdot\left(2x+1\right)}{2N}i\right\} \end{array}\right),$$

определим базисные функции фрактального аналога ДКП, связанные с базисными функциями фрактального ДПФ, таким же образом, что и классическое ДКП связано с классическим ДПФ:

$$\Lambda COS_k\left(n,x\right) = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{k+1}\left(n\cdot\left(x+\beta\right)\right) + \overline{\Lambda_{k+1}\left(n\cdot\left(x+\beta\right)\right)}\right). \tag{7}$$

С учётом соотношений (6)–(7) получим:

$$\Lambda COS_k\left(n,x\right) = \cos\left(\frac{\pi\cdot\mathrm{Im}\left(\overline{\alpha}^{k+1}\cdot n\cdot\left(x+\beta\right)\right)}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\alpha\right)}\right).$$

В отличие от базисных функций классического ДКП, в котором параметр сдвига β равен $\frac{1}{2}$, для вводимого преобразования β зависит от длины преобразования и нормы основания, т.е. конкретного квадратичного расширения.

Найдём значение β, например, для $Norm\left(\alpha\right)=2$. Параметр β будем подбирать из соображений ортогональности:

$$\sum_{x\in G_k}\Lambda COS_k\left(p,x\right)\cdot\Lambda COS_k\left(q,x\right) = 0,\ p\neq q.$$

Подставив вместо каждого $\Lambda COS_k(p,x)$ (7), получим:

$$\begin{aligned} &\Lambda COS_k\left(p,x\right)\cdot\Lambda COS_k\left(q,x\right) = \\ &\frac{\Lambda_{k+1}\left(p\left(x+\beta\right)\right)+\overline{\Lambda_{k+1}\left(p\left(x+\beta\right)\right)}}{2}\cdot\frac{\Lambda_{k+1}\left(q\left(x+\beta\right)\right)+\overline{\Lambda_{k+1}\left(q\left(x+\beta\right)\right)}}{2} = \\ &= \frac{1}{4}\left[\begin{array}{l} \Lambda_{k+1}\left(p\left(x+\beta\right)\right)\cdot\Lambda_{k+1}\left(q\left(x+\beta\right)\right)+\overline{\Lambda_{k+1}\left(p\left(x+\beta\right)\right)}\cdot\Lambda_{k+1}\left(q\left(x+\beta\right)\right)+ \\ +\Lambda_{k+1}\left(p\left(x+\beta\right)\right)\cdot\overline{\Lambda_{k+1}\left(q\left(x+\beta\right)\right)}+\overline{\Lambda_{k+1}\left(p\left(x+\beta\right)\right)\cdot\Lambda_{k+1}\left(q\left(x+\beta\right)\right)} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Используя свойства ФДПФ, получим:

$$\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(\left(p+q\right)\left(x+\beta\right)\right)+\overline{\Lambda_{k+1}\left(\left(p+q\right)\left(x+\beta\right)\right)} = 0,$$

$$\Lambda_{k+1}\left(\beta\left(p+q\right)\right)\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(x\left(p+q\right)\right)+$$

$$+\overline{\Lambda_{k+1}\left(\beta\left(p+q\right)\right)}\sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_{k+1}\left(x\left(p+q\right)\right)} = 0.$$

Если $p+q\equiv 0(\mathrm{mod}\,\alpha)$, то, полагая $p+q=\alpha T$, получим первое уравнение:

$$\Lambda_{k+1}\left(\beta\alpha T\right)\cdot\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(x\alpha T\right)+$$

$$+\overline{\Lambda_{k+1}\left(\beta\alpha T\right)}\cdot\sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_{k+1}\left(x\alpha T\right)} = 0.$$

Так как $\Lambda_k(\alpha\cdot x) = \Lambda_{k-1}(x)$, то получим:

$$\Lambda_k\left(\beta T\right)\cdot\sum_{x\in G_k}\Lambda_k\left(xT\right)+\overline{\Lambda_k\left(\beta T\right)}\cdot\sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_k\left(xT\right)} = 0.$$

В силу теоремы 2:

$$\sum_{x\in G_k}\Lambda_k\left(xT\right) = 0 \text{ и } \sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_k\left(xT\right)} = 0.$$

Таким образом, при $p+q\equiv 0(\operatorname{mod}\alpha)$ параметр β не может быть определён однозначно.

Если $p+q\equiv 1\left(\operatorname{mod}\alpha\right)$, то, очевидно, $p+q=1+\alpha T$ можно заменить на 1, и тогда сумма примет вид:

$$\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)\cdot\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(x\right)+\overline{\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)}\cdot\sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_{k+1}\left(x\right)}=0. \quad (8)$$

Так как мы проводим рассуждения для $Norm\left(\alpha\right)=2$, то можно сумму $\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(x\right)$ разделить на две суммы:

$$\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(x\right)=\sum_{x\in G_{k-1}}\left(\Lambda_{k+1}\left(\alpha x\right)+\Lambda_{k+1}\left(\alpha x+1\right)\right) \quad (9)$$

для $k>1$.

Подставив в (8) правую часть (9), получим:

$$\sum_{x\in G_{k-1}}\left(\Lambda_{k+1}\left(\alpha x\right)+\Lambda_{k+1}\left(\alpha x+1\right)\right)=$$

$$=-\frac{\overline{\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)}}{\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)}\sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_{k+1}\left(x\right)}.$$

Последующие итерации процесса приводят к равенству:

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1+\Lambda_i\left(1\right)\right)=-\frac{\overline{\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)}}{\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)}\cdot\prod_{i=2}^{k+1}\left(1+\overline{\Lambda_i\left(1\right)}\right). \quad (10)$$

Так как справедливо очевидное равенство

$$\left(1+\overline{\Lambda_i\left(1\right)}\right)=\frac{\left(1+\Lambda_i\left(1\right)\right)}{\Lambda_i\left(1\right)}, \quad (11)$$

то равенство (10) преобразуется:

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1+\Lambda_i\left(1\right)\right)=-\Lambda_{k+1}\left(-2\beta\right)\cdot\frac{\prod_{i=2}^{k+1}\left(1+\Lambda_i\left(1\right)\right)}{\prod_{i=2}^{k+1}\Lambda_i\left(1\right)}.$$

Полученное равенство позволяет определить β:

$$\prod_{i=2}^{k+1}\Lambda_i\left(1\right)=-\Lambda_{k+1}\left(-2\beta\right).$$

Воспользовавшись свойствами функций ФДПФ, получаем тождество, которое и помогает определить β:

$$\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)\cdot\sum_{x\in G_k}\Lambda_{k+1}\left(x\right)+\overline{\Lambda_{k+1}\left(\beta\right)}\cdot\sum_{x\in G_k}\overline{\Lambda_{k+1}\left(x\right)}=0,$$

$$\Lambda_{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)=\Lambda_{k+1}\left(\alpha^k\right)\cdot\Lambda_{k+1}\left(-2\beta\right),$$

$$\Lambda_{k+1}\left(\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\right)=\Lambda_{k+1}\left(\alpha^k-2\beta\right),\text{ следовательно,}$$

$$\beta=\frac{\alpha^{k+1}-2\alpha^k+1}{2(\alpha-1)}. \quad (12)$$

4. Ортогональность базисных функций

Множество

$$B_{2N}=\left\{\cos\left(\frac{\pi\cdot m\cdot\left(2\cdot x+1\right)}{2N}\right);m=0,...,2N-1\right\}$$

образует базис $2N$-мерного пространства, который, как известно, не является ортогональным (функции $\cos\left(\frac{\pi\cdot m\left(2x+1\right)}{2N}\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi\cdot k\left(2x+1\right)}{2N}\right)$ при $m+k=2N$ не являются ортогональными). Однако N функций

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi\cdot m\cdot\left(2x+1\right)}{2N}\right);m=0,...,N-1\right\}$$

образуют ортогональный базис N-мерного пространства.

Аналогичная ситуация возникает и в рассмотренном случае. Функции $\Lambda COS_k\left(p,x\right)$ и $\Lambda COS_k\left(q,x\right)$ неортогональны при $p+q\equiv 0(\operatorname{mod}\alpha^{k+1})$. В отличие от классического ДКП определение целого алгебраического числа – номера «парной неортогональной» функции представляет некоторые трудности при его аналитическом определении, однако этот элемент может быть определён алгоритмически.

Алгоритм 1.

for $p,q\in G_{k+1}$ **do**
  $mtrGram\left[p,q\right]=\sum_{x\in G_k}\Lambda COS_k\left(p,x\right)\cdot\Lambda COS_k\left(q,x\right)$
end for
$D_k=\{\}$
$BadNumbers=\{\}$
for $p\in G_{k+1}$ **do**
  if $p\in BadNumbers$ **then** continue **end if**
  if $mtrGram[p,p]=0$ **then**
    $BadNumbers=BadNumbers\cup\{p\}$
    continue
  end if
  $D_k=D_k\cup\{p\}$
  for $q\in G_{k+1}\cap p$ **do**
    if $mtrGram[p,q]<>0$ **then**
      $BadNumbers=BadNumber\cup q$
    end if
  end for
end for

Данный алгоритм разбивает множество из $Norm\left(\alpha\right)^{k+1}$ номеров на два подмножества: множество номеров D_k и множество номеров D_k^*, для которых функции ΛCOS_k не ортогональны функциям ΛCOS_k с номерами из D_k. На рис. 2*а–в* изображены область преобразования, на которой определён входной сигнал, и область, в которой лежит спектр. Центр каждого квадратика соответствует алгебраическому целому числу. Изображённые области соответствуют основаниям $\alpha_1 = -1+i$, $\alpha_2 = -i\sqrt{2}$ и $\alpha_7 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

Алгоритм 1 позволяет найти множество D_k, элементами которого занумерованы ортогональные базисные функции. Это позволяет дать основное определение.

Определение 3. Фрактальным дискретным косинусным преобразованием (ФДКП) называется преобразование:

$$X(m) = \lambda(m) \sum_{n \in G_k} x(n) \cdot \Lambda COS_k(n,m), \tag{13}$$

где $m \in D_k$,

$\lambda(m)$ – нормирующий коэффициент:

$$\lambda(m) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{Norm(\alpha)^k}}, m+m \equiv 0 (\bmod \alpha^k) \\ \sqrt{\dfrac{2}{Norm(\alpha)^k}}, m+m \neq 0 (\bmod \alpha^k) \end{cases}.$$

Из доказанной ортонормированности преобразования легко следует формула обратного преобразования.

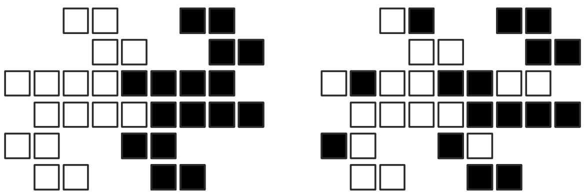


Рис. 2а. $\alpha_1 = -1+i$

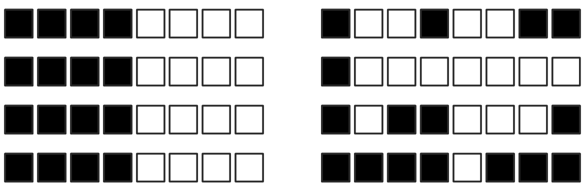


Рис. 2б. $\alpha_2 = -i\sqrt{2}$

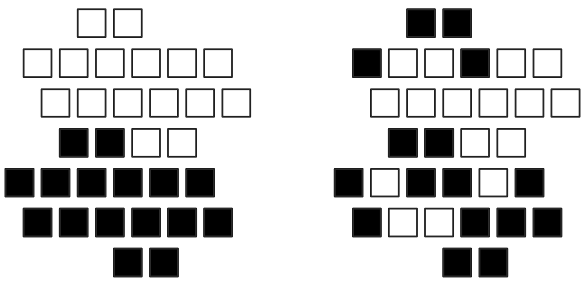


Рис. 2в. $\alpha_7 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

Определение 4. Обратным фрактальным дискретным косинусным преобразованием (ОФДКП) называется преобразование:

$$x(m) = \sum_{n \in D_k} \lambda(n) \cdot X(n) \cdot \Lambda COS_k(n,m), \tag{14}$$

где $m \in G_k$,

$\lambda(n)$ – нормирующий коэффициент:

$$\lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{Norm(\alpha)^k}}, n+n \equiv 0 (\bmod \alpha^k) \\ \sqrt{\dfrac{2}{Norm(\alpha)^k}}, n+n \neq 0 (\bmod \alpha^k) \end{cases}.$$

Нормирующий коэффициент для разных длин преобразований и разных оснований канонических систем счисления будет разным.

Заключение

В работе синтезированы ФДКП – аналоги ДКП на предфрактальной области, ассоциированной с КСС. Важной особенностью ДКП является существование для них быстрых алгоритмов вычисления, полученных различными методами: кронекеровская факторизация [6], обобщённое полиномиальное преобразование [9], сведение преобразования к умножению элементов прямых сумм конечномерных пространств. Ряд этих подходов либо неприменим, либо перенесение на рассматриваемый случай представляется весьма сложным. Таким образом, синтез быстрых алгоритмов рассмотренных преобразований методами, отличными от сведения вычисления ФДКП к вычислению ФДПФ, представляется актуальной задачей.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00822-а, 13-01-97007-р_поволжье_а).

Литература

1. **Белов, А.М.** Исследование эффективности одномерных дискретных косинусных преобразований на развёртках двумерных сигналов, порождённых каноническими системами счисления / А.М. Белов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т 35, № 4. – С. 519-523.
2. **Katai, I.** Canonical number system in imaginary quadratic fields / I. Katai, A. Kovacs // Acta Mathematica Hungarica. – 1981. – Vol. 37. – P. 159-164.
3. **Katai, I**. Canonical number systems for comlex integers / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math.(Szeged). – 1975. – V. 37. – P. 255-260.
4. **Чернов, В.М.** Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований / В.М. Чернов. – М.: Физматлит, 2007. – 264 с.
5. **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования на фундаментальных областях канонических систем счисления / В.М. Чернов, М.С. Каспарьян // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 4. – С. 484-487.
6. **Ярославский, Л.П.** Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии / Л.П. Ярославский. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
7. **Ahmed, N.** Discrete Cosine Transform / N. Ahmed, T. Natarajan, K.R. Rao // IEEE Transactions on Computers. – 1974. –V. 23(1). – P. 90-93.
8. **Ахмед, Н.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао. – Под ред. И.Б. Фоменко. – Пер. с англ. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

9. **Крот, А.М.** Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений / А.М. Крот, Е.Б. Минервина. – Минск: Навука і тэхніка, 1995. – 407 с.

References

1. **Belov, A.M.** Research of the efficiency of one-dimensional discrete cosine transforms based on two-dimensional signal scannings generated by canonical number systems / A.M. Belov // Computer Optics. – 2011. – Vol. 35. – P. 519-523. – (In Russian).
2. **Katai, I.** Canonical number system in imaginary quadratic fields / I. Katai, A. Kovacs // Acta Mathematica Hungarica. – 1981. – Vol. 37. – P. 159-164.
3. **Katai, I**. Canonical number systems for comlex integers / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1975. – V. 37. – P. 255-260.
4. **Chernov, V.M.** Arithmetical methods of synthesis of fast algorithms of Discrete orthogonal Transforms / V.M. Chernov. – Moscow: "Fizmatlit" Publisher, 2007. – 264 p. – (In Russian).
5. **Chernov, V.M.** Discrete orthogonal transforms on fundamental domains of canonical number systems / V.M. Chernov, M.S. Kasparyan // Computer Optics. – 2013. – Vol. 37. – P. 484-487. – (In Russian).
6. **Yaroslavsky, L.P.** Digital signal processing in optics and holography / L.P. Yaroslavsky. – Moscow: "Radio i svyaz" Publisher, 1987. – 296 p. – (In Russian).
7. **Ahmed, N.** Discrete Cosine Transform / N. Ahmed, T. Natarajan, K.R. Rao / IEEE Transactions on Computers. – 1974. – Vol. 23(1). – P. 90-93.
8. **Ahmed, N.** Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing / N. Ahmed, K.R. Rao. – Moscow: "Svyaz" Publisher, 1980. – 248 p. – (In Russian).
9. **Crot, A.M.** Fast algorithms and spectral digital signal and image processing / A.M. Crot, E.B. Minareva. – Minsk: "Nauka i tekhnika" Publisher, 1995. – 407 p. – (In Russian).

FRACTAL DISCRETE COSINE TRANSFORM ON PRE-FRACTAL DOMAINS ASSOCIATED WITH FUNDAMENTAL DOMAINS OF CANONICAL NUMBER SYSTEMS

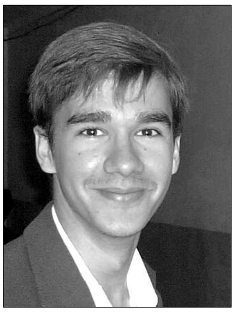
M.S. Kasparyan
Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

I introduce an analog cosine transform on the pre-fractal region. The discrete cosine transform on two-dimensional domains associated with the fundamental domains of number systems in imaginary quadratic rings is derived from fractal discrete Fourier transform. It is shown that this transformation is orthogonal.

Key words: orthogonal transforms, fractal, canonical number system, cosine transform.

Сведения об авторе



Михаил Суренович Каспарьян, 1988 года рождения. В 2011 году с отличием окончил Адыгейский государственный университет по специальности «Прикладная математика». В данный момент является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Стажёр–исследователь Института систем обработки изображений РАН.

E-mail: *kasparyanm@gmail.com* .

Mikhail Surenovich Kasparyan (b. 1988) graduated with honours (2011) from Adyghe State University, majoring in Applied Mathematics, postgraduate of S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU). Trainee researcher of Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests are image processing, programming, applied mathematics.

Поступила в редакцию 29 декабря 2013 г.