

## МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ДЕСКРИПТОРЫ ФОРМЫ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СТРУКТУРИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Сидякин С.В., Визильтер Ю.В.

ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем»

### Аннотация

Предложен аналитический подход к вычислению непрерывных скелетов с эллиптическими структурирующими элементами (эллиптических скелетов). Описан переход между дисковыми скелетами и эллиптическими скелетами. На основе эллиптических скелетов предложен вычислительно эффективный дискретно-непрерывный подход к построению морфологических дескрипторов (спектров и карт) с фиксированными эллиптическими структурирующими элементами. Введены понятия морфологических эллиптических карт и спектров размеров, направлений, вытянутости по произвольным эллиптическим структурирующим элементам. Определены двумерные спектры по различным сочетаниям факторов размера и формы. Предложенные эллиптические спектры могут применяться как для сегментации фигуры на области различной толщины и/или направления, так и в качестве дескрипторов формы для распознавания типа наблюдаемых фигур.

**Ключевые слова:** математическая морфология, морфологические спектры, непрерывные скелеты, эллиптический структурирующий элемент.

### Введение

В работе Л.М. Местецкого [1] были предложены оригинальные вычислительно эффективные алгоритмы построения непрерывных скелетов плоских многоугольных фигур. Скелет [1] определяется через множество центров всех «максимальных пустых» (вписанных) кругов фигуры. Он является информативным, хотя и неустойчивым дескриптором формы двумерных фигур. Известна связь скелетных представлений с математической морфологией (ММ) Серра [2]. ММ-фильтры [2] с дисковым структурирующим элементом (СЭ) фиксированного размера, а также морфологический спектр Марагоса [3] с дисковым СЭ переменного размера могут быть эффективно вычислены на основе непрерывного скелета, радиальной функции [1] и процедур растеризации «по Брезенхему» [4, 5]. При этом спектр Марагоса с дисковым СЭ является устойчивым и достаточно информативным дескриптором формы фигуры, который позволяет охарактеризовать локальную толщину частей фигуры [5], но при этом никак не характеризует «направление» и «степень вытянутости» данных частей. В связи с этим существенный интерес представляет задача построения обобщённых спектров плоских многоугольных фигур с использованием СЭ, имеющих форму, отличную от дисковой, но такую, что она может быть описана аналитически и определяется конечным количеством числовых параметров, включающих фактор размера и различные факторы формы. В данной работе в качестве такого СЭ рассматривается эллиптический СЭ (эллипс), характеризующийся размером (корень из площади или величина одной из полуосей) и двумя основными факторами формы: ориентацией (углом наклона большой полуоси) и вытянутостью (эксцентриситетом или коэффициентом сжатия). Соответственно предложены понятия эллиптического скелета двумерной фигуры и эллиптических морфологических спектров по различным факторам формы, а также алгоритмы вычисле-

ния непрерывных эллиптических скелетов и факторных спектров фигур с эллиптическими СЭ.

Вычислительно эффективный алгоритм построения скелета двумерной фигуры для эллиптического СЭ с фиксированными факторами формы основан на использовании непрерывного скелетного описания с дисковым СЭ, которое строится для эквивалентно преобразованного контура исходной фигуры. С учётом этого предложенный дискретно-непрерывный алгоритм вычисления морфологических спектров с эллиптическими СЭ основан на растеризации скелета «по Брезенхему» аналогично [4, 5].

Предложенные морфологические дескрипторы для случая фиксированного эллиптического СЭ далее обобщены для произвольных эллиптических СЭ.

Использование эллиптических СЭ позволяет, помимо толщины, дополнительно сохранять структурную информацию, которая может быть использована непосредственно для распознавания либо для сегментации фигуры на части заданной протяжённости и направления.

### 1. Скелет многоугольной фигуры. Представление скелета плоским прямолинейным графом

Кратко затронем основные определения непрерывной бинарной морфологии согласно [1].

**Определение 1.** Многоугольная фигура – это замкнутая область на плоскости, граница которой состоит из конечного числа простых непересекающихся многоугольников.

**Определение 2.** Скелетом  $Sk(X)$  фигуры  $X$  называется множество центров всех её «максимальных пустых» (вписанных в фигуру) кругов.

**Определение 3.** Радиальной функцией  $r_X(p)$  называется максимальная величина радиуса пустого круга с центром в точке  $p$ .

**Определение 4.** Скелетным представлением фигуры является совокупность её скелета и радиальной функции, определённой в точках скелета.

Эффективный метод построения непрерывного скелета многоугольной фигуры использует концепцию диаграммы Вороного линейных сегментов ( $O(n \cdot \log n)$ , где  $n$  – число сторон и вершин (сайтов) фигуры) [1]. Скелет многоугольной фигуры, имеющей  $n$  вершин, может быть получен за время  $O(n)$  из диаграммы Вороного.

Геометрическая конструкция скелета многоугольной фигуры имеет вид плоского графа, рёбра которого состоят из отрезков прямых и парабол (рис. 1).

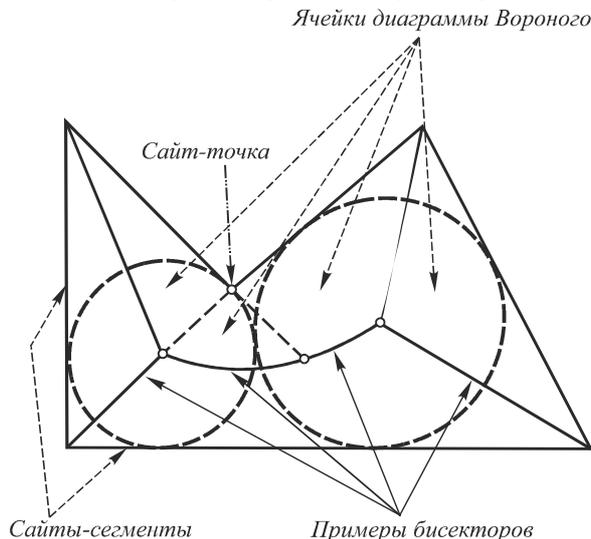


Рис. 1. Непрерывный скелет многоугольной фигуры и ячейки диаграммы Вороного

Из-за присутствия в скелете параболических рёбер возникают технические неудобства при построении и хранении скелета. Неявные уравнения парабол включают квадратичные формы общего вида, что является неудобным для рисования (растеризации). При хранении данных о скелете приходится запоминать фокусы и директрисы параболических рёбер для вычисления уравнений в ходе обработки. Неявное уравнение параболы задаёт всю бесконечную кривую, а в скелет входит лишь её конечный фрагмент. Поэтому в работе [6] было предложено представление скелета «без параболических рёбер» в виде прямолинейного графа, не требующее получения уравнений параболических рёбер ни на этапе построения диаграммы Вороного, ни при хранении, рисовании и обработке. Для этого скелет многоугольной фигуры представляется объединением некоторого множества элементарных кривых Безье первой (для линейного ребра) и второй степени (для параболического ребра) – составной кривой Безье. Составная кривая Безье определяется своим контрольным планарным прямолинейным графом, который образуется из характеристических многоугольников  $\{V_0, V_1, V_2\}$  элементарных кривых Безье.  $\{V_0, V_1, V_2\}$  обозначают вершины контрольного графа, связанные с конкретным характеристическим многоугольником. Алгоритм построения контрольного графа подробно описан в работе [6]. Там же отмечено, что радиальная функция  $r(t)$  в каждой

точке скелета  $V(t)$  может быть вычислена с использованием составной кривой Безье. В случае сайтов «сегмент–сегмент» бисектор представляет собой линейное ребро, характеризуемое кривой Безье 1-го порядка:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \cdot (1-t) + V_1 \cdot t \\ r(t) &= r_0 \cdot (1-t) + r_1 \cdot t \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $V_0, V_1$  – концевые точки линейного ребра,  $r_0$  и  $r_1$  – радиусы соответствующих данным точкам концевых максимальных пустых кругов,  $t \in [0,1]$  – параметр кривой Безье.

В случае сайтов «точка–сегмент» бисектор представляет собой параболическое ребро, характеризуемое кривой Безье 2-го порядка:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \cdot (1-t)^2 + 2t \cdot (1-t) \cdot V_1 + t^2 \cdot V_2, \\ r(t) &= r_0 \cdot (1-t)^2 + r_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + r_2 \cdot t^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$r_1 = \frac{[B_1 B_2 \times B_1 V_1]}{[B_1 B_2]},$$

где  $V_0, V_2$  – концевые точки параболического ребра,  $r_0$  и  $r_2$  – радиусы соответствующих данным точкам концевых максимальных пустых кругов,  $V_1$  – контрольная вершина,  $B_1$  и  $B_2$  – концевые точки сайта сегмента, определяющего параболическое ребро,  $t \in [0,1]$  – параметр кривой Безье.

В случае сайтов «точка–точка» бисектор представляет собой линейное ребро, но из-за того, что радиальную функцию данного линейного бисектора нельзя представить в виде кривой Безье 1-го порядка, будем использовать представление в виде рациональной кривой Безье 2-го порядка и для данного бисектора, и для его радиальной функции [7]:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{V_0 \cdot (1-t)^2 + 2t \cdot (1-t) \cdot V_1 \cdot \omega_1 + t^2 \cdot V_2}{(1-t)^2 + 2t \cdot (1-t) \cdot \omega_1 + t^2}, \\ V_1 &= V_0 \cdot (1-\mu) + V_2 \cdot \mu, \mu = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$r(t) = \frac{r_0 \cdot (1-t)^2 + r_1 \cdot \omega_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + r_2 \cdot t^2}{(1-t)^2 + \omega_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + t^2},$$

где  $V_0(x_0, y_0), V_2(x_2, y_2)$  – концевые точки ребра,  $r_0$  и  $r_2$  – радиусы соответствующих данным точкам концевых максимальных пустых кругов,  $t \in [0,1]$  – параметр кривой Безье,  $\omega_1$  – весовой коэффициент,  $r_1$  – радиус контрольного круга,  $x_1$  – координата контрольной вершины на оси абсцисс. Для определения  $r_1$  и  $x_1$  решается система уравнений (1.4):

$$\begin{cases} r_0 \cdot r_1 - x_0 \cdot x_1 = c^2 \\ r_2 \cdot r_1 - x_2 \cdot x_1 = c^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

где  $c$  – 1/2 расстояния между сайтами точками, определяющими бисектор.

Для определения  $\omega_1$  решается система уравнений (1.5):

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_0\lambda_1}},$$

$$x^* = \frac{1}{2}(x_0 + x_2), \quad r^* = \sqrt{c^2 - (x^*)^2}, \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} x_0 \cdot \lambda_0 + x_1 \cdot \lambda_1 + x_2 \cdot \lambda_2 = x^*, \\ r_0 \cdot \lambda_0 + r_1 \cdot \lambda_1 + r_2 \cdot \lambda_2 = r^*, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Описанное удобно и представление для скелета и радиальной функции будет непосредственно использоваться в следующих разделах.

## 2. Скелет и спектр многоугольной фигуры по эллиптическому СЭ фиксированной формы

Предлагаемая идея построения спектра бинарного изображения с эллиптическим СЭ основывается на введении и использовании понятия эллиптического скелета двумерной фигуры и эллиптической карты размеров.

В качестве перемещаемого и масштабируемого СЭ будем рассматривать эллипс, у которого отношение большой и малой полуосей фиксировано ( $a/b = \text{const}$ ), а также фиксирован угол наклона  $\phi$ .

Рассмотрим множество таких фиксированных эллипсов  $E_{a,b,\phi}$ .

**Определение 5.** Пустым эллипсом будем называть эллипс из  $E_{a,b,\phi}$ , который целиком содержится в фигуре или в фоне (дополнении фигуры до кадра).

**Определение 6.** Максимальным пустым эллипсом называется такой пустой эллипс, который не содержится целиком ни в одном другом пустом эллипсе.

**Определение 7.** Эллиптическим скелетом бинарной фигуры по эллиптическому СЭ называется множество центров максимальных пустых (вписанных в фигуру) эллиптических СЭ.

Пусть заданы: исходная многоугольная фигура и фиксированный эллиптический СЭ из  $E_{a,b,\phi}$ . Требуется построить эллиптический скелет многоугольной фигуры. Очевидно, что преобразование данного эллиптического СЭ в дисковый СЭ той же площади описывается соответствующим фиксированным эквивалентным преобразованием. Результат применения того же эквивалентного преобразования к исходной многоугольной фигуре будем называть эквивалентной многоугольной фигурой. Заметим, что эквивалентная многоугольная фигура может быть вычислена путём применения эквивалентного преобразования к координатам каждой из вершин исходной многоугольной фигуры. Как известно, любое эквивалентное преобразование обратимо. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между многоугольной фигурой, эллиптическим СЭ и эллиптическим скелетом многоугольной фигуры с одной стороны и эквивалентной многоугольной фигурой, дисковым СЭ и соответствующим дисковым скелетом эквивалентной многоугольной фигурой с другой, причём каждой терминальной вершине или узлу эллип-

тического скелета многоугольной фигуры соответствует терминальная вершина или узел дискового скелета эквивалентной многоугольной фигуры, координаты которых связаны эквивалентным преобразованием. Значит, поскольку дисковый скелет эквивалентной многоугольной фигуры представляет собой связный планарный граф, рёбра которого являются отрезками прямых или сегментами парабол, а при эквивалентном преобразовании связность графов не нарушается, прямые переходят в прямые, а параболы – в параболы, то эллиптический скелет многоугольной фигуры обладает теми же свойствами. Т.е. доказано:

**Утверждение 1.** Эллиптический скелет многоугольной фигуры представляет собой связный планарный граф, рёбра которого являются отрезками прямых или сегментами парабол.

При этом, как было отмечено ранее, дисковый скелет эквивалентной многоугольной фигуры может быть эффективно вычислен аналитически [1]. Иными словами, вычисление эллиптического скелета предполагает выполнение следующих основных шагов:

1) определение эквивалентного преобразования по заданному эллиптическому СЭ;

2) преобразование многоугольной фигуры в эквивалентную многоугольную фигуру путём применения эквивалентного преобразования ко всем вершинам многоугольной фигуры;

3) быстрое вычисление дискового скелета эквивалентной многоугольной фигурой с использованием обобщённой диаграммы Вороного [1];

4) обратное преобразование дискового скелета эквивалентной многоугольной фигуры в эллиптический скелет многоугольной фигуры путём применения обратного эквивалентного преобразования ко всем узлам и вершинам дискового скелета эквивалентной многоугольной фигуры.

Поскольку преобразование многоугольной фигуры в эквивалентную многоугольную фигуру выполняется за линейное по числу вершин многоугольной фигуры время, а обратное преобразование дискового скелета эквивалентной многоугольной фигуры в эллиптический скелет многоугольной фигуры выполняется за линейное время по числу узлов дискового скелета эквивалентной многоугольной фигуры, оценка времени вычисления эллиптического скелета определяется временем вычисления обобщённой диаграммы Вороного  $O(n \cdot \log n)$ , где  $n$  – число сторон и вершин (сайтов) исходной фигуры [1]. Таким образом, справедливо:

**Утверждение 2.** Процедура вычисления эллиптического скелета многоугольной фигуры с фиксированным эллиптическим СЭ линейно сводится к процедуре вычисления скелета с дисковым структурирующим элементом.

С использованием эллиптического скелета предполагается вычислять вспомогательный морфологический дескриптор – эллиптическую карту размеров.

**Определение 8.** Эллиптической картой размеров фигуры по максимальным эллиптическим СЭ будем

называть двумерную функцию, определённую на заданном кадре и принимающую в каждой точке кадра значение, равное *размеру* покрывающего данную точку максимального пустого эллипса наибольшей площади, вписанного в фигуру или фон (если точка принадлежит фигуре или фону соответственно). Если эллипсы вписаны в фигуру, то размер эллипсов берётся со знаком «+», если в фон, то со знаком «-».

Определим понятие эллиптического спектра, используя эллиптическую карту размеров.

**Определение 9.** *Эллиптическим спектром размеров* по максимальному эллиптическому СЭ будем называть гистограмму эллиптической карты толщин изображения по максимальному эллиптическому элементу.

В последующих двух разделах поочерёдно подробно будут рассмотрены: эквиваффинное преобразование эллипса в диск и вычислительно эффективный алгоритм построения эллиптических скелетов, эллиптических карт размеров и эллиптических спектров с фиксированным эллиптическим структурирующим элементом.

### 3. Эквиваффинное преобразование эллипса в диск

Для начала рассмотрим, как устроено эквиваффинное преобразование между диском и эллипсом.

Известно, что при эквиваффинном преобразовании эллипс переходит в эллипс, частным случаем которого является окружность. Найдём матрицу эквиваффинного преобразования эллипса в диск.

Пусть имеется эллипс, который характеризуется углом наклона  $\phi$  между большой полуосью  $a$  и осью абсцисс,  $b$  – малая полуось. Пусть имеется диск с радиусом  $R$ .  $Ox_1y_1$  – прямоугольная система координат, связанная с большой полуосью эллипса,  $Oxy$  – прямоугольная система координат (рис. 2). Начало координат  $Ox_1y_1$  и  $Oxy$  совпадают.

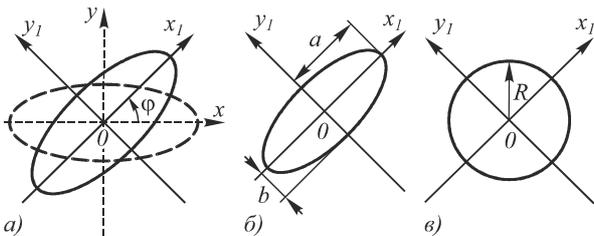


Рис. 2. Эллипс (а)–(б) и диск (в) с указанием систем координат и основных обозначений

Для того, чтобы преобразовать повернутый эллипс в диск:

1) найдём координаты повернутого эллипса в системе  $Ox_1y_1$ , связанной с его главной полуосью.

$$x'_1 = S \cdot x' \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где  $S$  – матрица перехода от  $Oxy$  к  $Ox_1y_1$ ;

$$x' = S_1 \cdot x'_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $S_1$  – матрица перехода от  $Ox_1y_1$  к  $Oxy$ ;

2) зная соответствие между двумя точками на эллипсе и диске в системе  $Ox_1y_1$ , получим матрицу эквиваффинного преобразования эллипса в диск.

Так как центры эллипса и диска совпадают, то в общем виде (экви)аффинное преобразование эллипса в диск имеет вид:

$$\begin{cases} x_d = a_{11}x_e + a_{12}y_e \\ y_d = a_{21}x_e + a_{22}y_e \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где  $A$  – матрица эквиваффинного преобразования,  $x_d, y_d$  – координаты точки диска, которая соответствует точке  $(x_e, y_e)$  на эллипсе.

Также при эквиваффинном преобразовании площадь эллипса и полученного из него диска равны, поэтому существует связь между радиусом диска и размерами полуосей эллипса.

Пусть  $S_e$  – площадь эллипса,  $S_d$  – площадь диска.

$$S_e = \pi \cdot R^2, \quad S_d = \pi \cdot a \cdot b,$$

$$\text{тогда } \pi \cdot R^2 = \pi \cdot a \cdot b \Rightarrow R = \sqrt{a \cdot b}. \quad (3.3)$$

Выберем 2 точки на эллипсе (рис. 3), для которых известно, в какие точки на диске они переходят, и составим систему уравнений, из которой определим матрицу аффинного преобразования эллипса в диск.

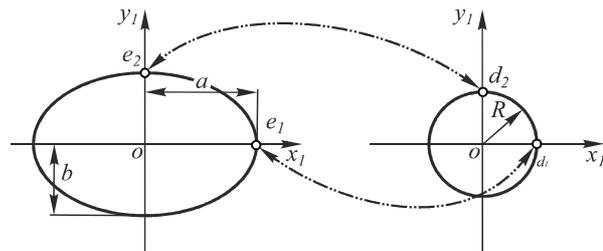


Рис. 3. отображение точек эллипса в точки диска при эквиваффинном преобразовании

Зависимость радиуса диска от величины полуосей эллипса:

для  $e_1$  и  $d_1$ :

$$\begin{cases} R = a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot 0 \\ 0 = a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = R/a, a_{21} = 0,$$

для  $e_2$  и  $d_2$ :

$$\begin{cases} 0 = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot b \\ R = a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot b \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 0, a_{22} = R/b.$$

Матрица эквиваффинного преобразования эллипса в диск:

$$A_{e \rightarrow d} = \begin{pmatrix} \sqrt{a \cdot b}/a & 0 \\ 0 & \sqrt{a \cdot b}/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{b/a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a/b} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

При этом нетрудно убедиться, что матрица эквиваффинного преобразования диска в эллипс будет иметь вид:

$$A_{d \rightarrow e} = \begin{pmatrix} a/\sqrt{a \cdot b} & 0 \\ 0 & b/\sqrt{a \cdot b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a/b} & 0 \\ 0 & \sqrt{b/a} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Таким образом, было установлено соответствие между повернутым эллипсом и диском заданного радиуса.

**4. Вычислительно эффективный алгоритм построения морфологических дескрипторов с фиксированным эллиптическим СЭ**

Рассмотрим множество фиксированных эллипсов  $E_{a,b,\phi}$ . В качестве фактора размера, по которому будем строить морфологические дескрипторы, в данном случае предлагается использовать корень из площади эллипса (характеризующий локальный размер фигуры в целом) или величину его малой полуоси (характеризующую локальную толщину фигуры).

**Алгоритм 1**

**Вход:** бинарное изображение, содержащее фигуру (рис. 4а). Эллипс с параметрами:  $a, b, (a/b = c = const), \phi = const$ .

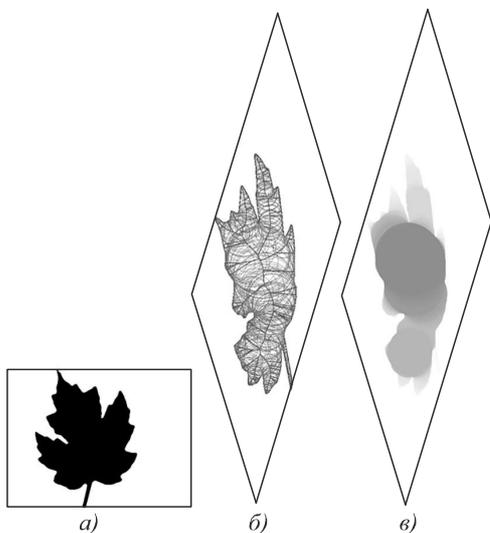


Рис. 4. Слева показано исходное изображение до эквиаффинного преобразования (а); по центру – дисковый скелет (б) эквиаффинно преобразованной многоугольной фигуры. Справа – дисковая карта размеров (в)

**Выход:** эллиптический спектр, аналитическое описание эллиптического скелета, эллиптическая карта размеров.

1. Вычислить внешние и внутренние многоугольные контура фигуры на изображении алгоритмом построения разделяющего многоугольника минимального периметра [1]. Пусть  $K_i^n(x_i^n, y_i^n)$  –  $i$ -ая вершина в контуре  $n$  с координатами  $x_i^n, y_i^n$ .

2. Преобразовать координаты каждой вершины  $K_i^n(x_i^n, y_i^n)$ , последовательно применяя матрицу перехода (3.1) и матрицу эквиаффинного преобразования (3.4), получить вершины  $K_{i\ af}^n$  эквиаффинного контура:

$$K_{i\ af}^n = A_{e \rightarrow d} \cdot S \cdot K_i^n \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{i\ af}^n \\ y_{i\ af}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/c} \cdot \cos \phi & \sqrt{1/c} \cdot \sin \phi \\ -\sqrt{c} \cdot \sin \phi & \sqrt{c} \cdot \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^n \\ y_i^n \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

3. Построить дисковый скелет эквиаффинной многоугольной фигурой по алгоритму [1], используя эквиаффинно преобразованные контура. Получить скелетное описание в виде составной кривой Безье, определённой своим контрольным планарным прямолинейным графом [6] (формулы (1.1), (1.2) и (1.3)) (рис. 4б).

4. Вычислить морфологические дескрипторы.

4.1. Вычислить эллиптический скелет исходной многоугольной фигуры.

4.1.1. Преобразовать координаты вершин  $\{V_i(x_i, y_i), i = 0, \dots, 2\}$  характеристических многоугольников контрольного графа дискового скелета эквиаффинной многоугольной фигуры последовательным применением эквиаффинного преобразования диска в эллипс (3.5) и матрицы перехода (3.2), получить вершины  $\{V_i^e(x_i^e, y_i^e), i = 0, \dots, 2\}$  характеристических многоугольников контрольного графа, соответствующих эллиптическому скелету:

$$\begin{pmatrix} x_i^e \\ y_i^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c} \cdot \cos \phi & -\sqrt{1/c} \cdot \sin \phi \\ \sqrt{c} \cdot \sin \phi & \sqrt{1/c} \cdot \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

4.1.2. Для вычисления радиальной функции в точках эллиптического скелета (в данном случае радиальная функция определяет значения большой  $a(t)$  и малой  $b(t)$  полуосей) удобно пользоваться выражениями радиальной функции для кругов, определяемой через вершины контрольного графа [6] (формулы (1.1), (1.2) и (1.3)), и формулой пересчёта (3.3) с учётом  $a/b = c = const$ :

$$\begin{aligned} a(t) &= r(t) \cdot \sqrt{c}, \\ b(t) &= r(t) \cdot \sqrt{1/c}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рис. 5 демонстрирует эллиптическое скелетное описание для изображения листа (рис. 4а).

4.2. Построить эллиптическую карту размеров (рис. 6).

4.2.1. Получить дисковую карту размеров (толщин) (рис. 4в) для эквиаффинной многоугольной фигуры (рис. 4б) по алгоритму [4, 5].

4.2.2. Двигаясь по элементам (пикселям) эллиптической карты размеров исходного изображения, найти соответствие между ними и элементами дисковой карты размеров эквиаффинной многоугольной фигуры (4.1), при этом элементам эллиптической карты размеров исходного изображения присваивается значение фактора размера с учётом пересчёта значений радиусов кругов к значениям полуосей эллипса по формуле (4.2).

4.3. Вычислить эллиптический спектр как гистограмму эллиптической карты размеров (шаг 4.2.2, рис. 6.) (способ 1), согласно определению 9, или как гистограмму дисковой карты разме-

ров (шаг 4.2.1, рис. 4е), собранную с учётом пересчёта (4.2) радиусов кругов к значениям полуосей эллипса (способ 2).

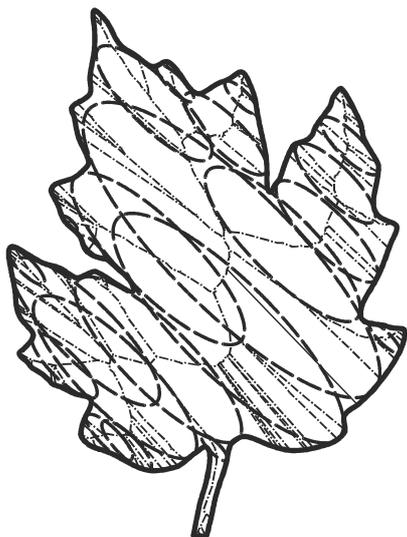


Рис. 5. Эллиптический скелет фигуры. Сплошной линией отмечены контура, штрихпунктирными линиями – скелет, пунктирными линиями – вписанные эллипсы



Рис. 6. Положительная часть эллиптической карты размеров

Первый способ получения эллиптического спектра является точным, так как параметры эллипсов вычисляются аналитически. Второй способ является наиболее быстрым (процедуру растеризации дисков можно организовать быстрее, чем эллипсов), но менее точным, так как проявляются недостатки дискретного представления при переходе между пикселями диска и пикселями эллипса. Существует и третий способ (способ 3) вычисления эллиптического спектра, который эффективнее способа 1 и чуть более медленный по сравнению со способом 2, но при этом является точным. Действуя по аналогии с шагом 4.2.2, нужно откорректировать процесс сбора гистограммы в способе 2 таким образом, чтобы пиксели исходного изображения, которые попадают в один и тот же пиксел дисконной карты размеров, учитывались соответствующее число раз.

Предложенный в данном разделе алгоритм позволяет эффективно формировать эллиптические спектры, но по-прежнему никак не характеризует струк-

турную информацию о направлениях «значимых частей» фигуры. Этих недостатков лишён спектр, описанный далее.

### 5. Эллиптические спектры и карты факторов формы по максимальным эллиптическим структурирующим элементам

Рассмотрим теперь множество всех возможных эллипсов  $E$  ( $a/b \neq const, \phi \neq const$ ).

**Определение 10.** Пустым эллипсом будем называть эллипс из  $E$ , который целиком содержится в фигуре или в фоне (дополнении фигуры до кадра).

**Определение 11.** Максимальным пустым эллипсом называется такой пустой эллипс, который не содержится целиком ни в одном другом пустом эллипсе из  $E$ .

**Определение 12.** Эллиптической картой размеров фигуры по максимальным эллиптическим СЭ будем называть двумерную функцию, определённую на заданном кадре и принимающую в каждой точке кадра значение, равное размеру покрывающего данную точку максимального пустого эллипса наибольшей площади, вписанного в фигуру или фон (если точка принадлежит фигуре или фону соответственно). Если эллипсы вписаны в фигуру, то размер эллипсов берётся со знаком «+», если в фон, то со знаком «-».

**Определение 13.** Эллиптическим спектром размеров по максимальному эллиптическому СЭ будем называть гистограмму эллиптической карты толщин изображения по максимальному эллиптическому элементу.

**Определение 14.** Эллиптической картой направлений по максимальному эллиптическому элементу будем называть двумерную функцию, определённую на заданном кадре и принимающую в каждой точке кадра значение, равное ориентации покрывающего данную точку максимального пустого эллипса наибольшей площади, вписанного в фигуру или фон (если точка принадлежит фигуре или фону соответственно). Если эллипсы вписаны в фигуру, то направление эллипсов берётся со знаком «+», если в фон, то со знаком «-».

**Определение 15.** Эллиптическим спектром направлений по максимальному эллиптическому СЭ будем называть гистограмму эллиптической карты направлений по максимальному эллиптическому элементу.

**Определение 16.** Эллиптической картой вытянутости по максимальному эллиптическому элементу будем называть двумерную функцию, определённую на заданном кадре и принимающую в каждой точке кадра значение, равное вытянутости покрывающего данную точку максимального пустого эллипса наибольшей площади, вписанного в фигуру или фон (если точка принадлежит фигуре или фону соответственно). Если эллипсы вписаны в фигуру, то направление эллипсов берётся со знаком «+», если в фон, то со знаком «-».

**Определение 17.** Эллиптическим спектром вытянутости по максимальному эллиптическому СЭ будем называть гистограмму эллиптической карты вытянутости по максимальному эллиптическому элементу.

Легко убедиться, что спектры вытянутости инвариантны к сдвигу, масштабу и повороту изображения, в

то время как спектры размеров и направлений инвариантны только к сдвигу-повороту и сдвигу-масштабу соответственно. В случае спектра направлений учесть вращение также можно, используя циклический сдвиг при сравнении подобных спектров.

Могут быть определены также двумерные спектры по различным сочетаниям факторов формы.

**Определение 18.** Эллиптическими спектрами размера-направления, размера-вытянутости и вытянутости-направления по максимальному эллиптическому СЭ будем называть двумерные совместные гистограммы соответствующих пар карт по максимальному эллиптическому СЭ.

Рис. 7 иллюстрирует карту размеров и карту направлений. Размеры и направления, представленные в фигуре, кодируются в градациях серого от 0 до 255: 0 соответствует минимальному размеру и минимальному углу в  $0^\circ$ , 255 соответствует максимальному размеру и максимальному углу в  $179^\circ$ .

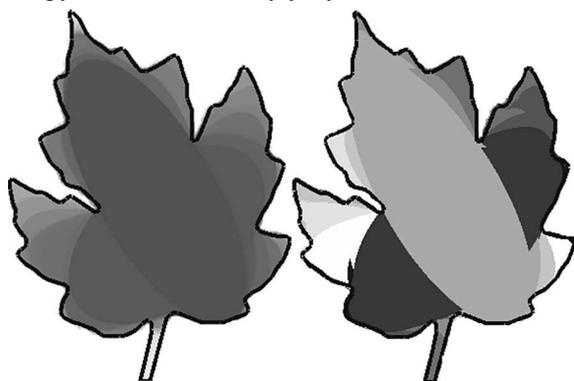


Рис. 7. Карта размеров (слева) и карта направлений (справа) фигуры по максимальному эллиптическому элементу

Можно предложить следующий наивный алгоритм вычисления введённых выше двумерных совместных эллиптических спектров по факторам размера и формы на основе алгоритма 1.

**Алгоритм 2**

**Вход:** бинарное изображение двумерной фигуры размера  $w \times h$ .

**Выход:** набор эллиптических спектров по факторам размера и формы.

1. Вычислить по алгоритму 1 эллиптические карты размеров для всех фиксированных эллиптических СЭ с параметрами в диапазоне  $\phi = 0^\circ, \dots, 179^\circ$ ,

$$a = 0, \dots, \sqrt{w^2 + h^2} / 2, \quad b = 0, \dots, \sqrt{w^2 + h^2} / 2.$$

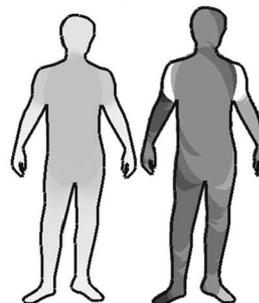
2. Получить эллиптические карты по факторам размера и формы для всех возможных эллипсов, последовательно просканировав все пиксели во всех картах размера, найдя максимальный эллипс наибольшей площади, покрывающий данную точку, и его параметры (согласно определениям 12, 14, 16).

3. Вычислить спектры по факторам размера и формы как гистограммы соответствующих карт толщин.

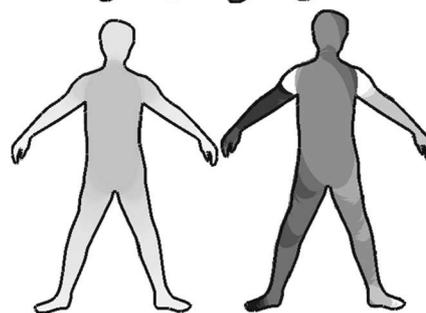
Примеры «эллиптических» карт толщин по максимальному эллиптическому СЭ приведены на рис. 7, 8.

Изменяя дискрет, с которым измеряется угол наклона эллипса и размеры полуосей, можно достичь компромисса между скоростью вычисления и чувствительностью спектра.

Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

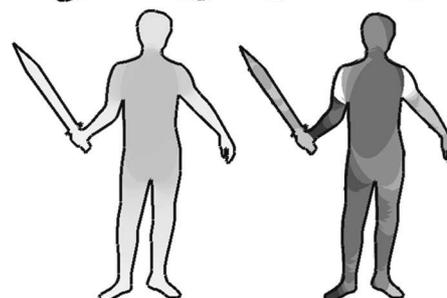


Рис. 8. Примеры эллиптических карт размеров (слева) и карт направлений (справа) для фигур 1–3 из набора [8]

Примеры эллиптических спектров размеров и направлений для фигур из базы [8] приведены на рис. 9–14, направления квантуются с шагом в  $20^\circ$ .

Эллиптический спектр размеров

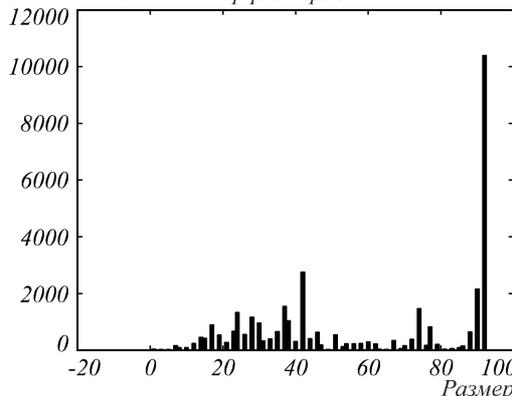


Рис. 9. Эллиптический спектр размеров фигуры 1

**Заключение**

В работе предложен аналитический подход к вычислению непрерывных эллиптических скелетов. Описана связь между эллиптическими и дисковыми скелетами.

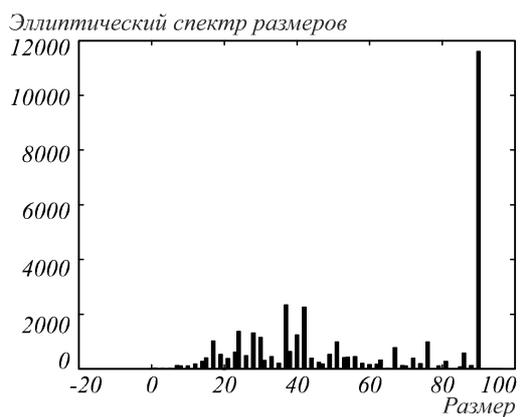


Рис. 10. Эллиптический спектр размеров фигуры 2

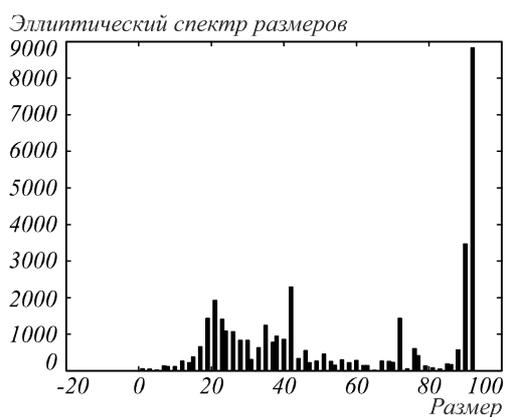


Рис. 11. Эллиптический спектр размеров фигуры 3

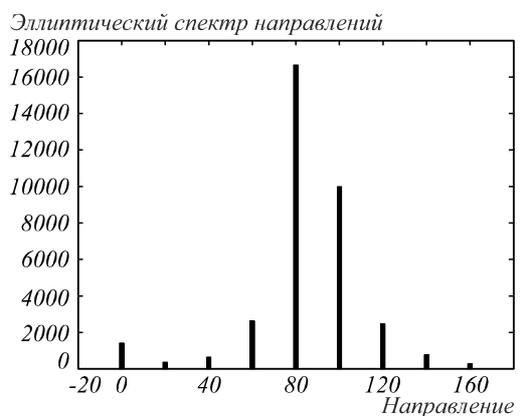


Рис. 12. Эллиптический спектр направлений фигуры 1

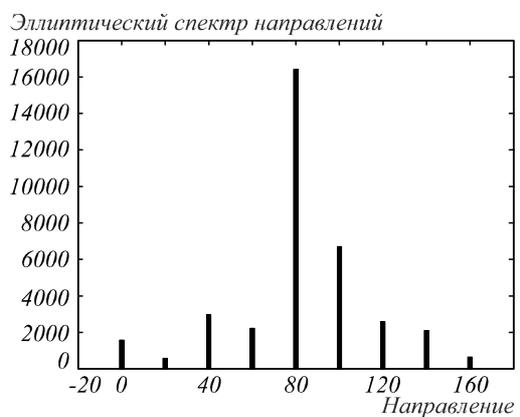


Рис. 13. Эллиптический спектр направлений фигуры 2

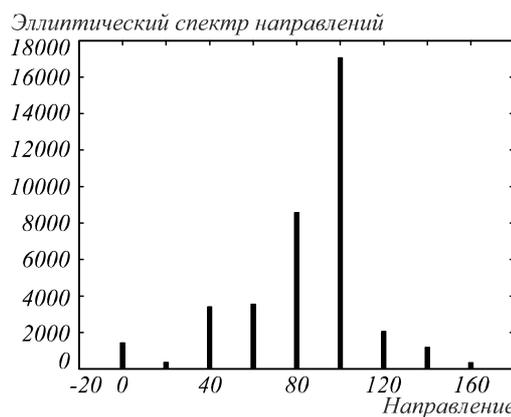


Рис. 14. Эллиптический спектр направлений фигуры 3

На основе эллиптических скелетов предложен вычислительно эффективный дискретно-непрерывный подход к построению морфологических спектров с эллиптическими структурирующими элементами. Введены понятия морфологических эллиптических карт и спектров размеров, направлений, вытянутости, на основе которых определены также двумерные спектры по различным сочетаниям факторов размера и формы.

В прикладных задачах компьютерного зрения эллиптические спектры могут применяться как для сегментации фигуры на области различной толщины и/или направления, так и в качестве дескрипторов формы для распознавания типа наблюдаемых фигур. В дальнейшем, по аналогии с результатами, ранее полученными в работе [5] для дисковых СЭ, мы надеемся показать, что при сравнении с помощью EMD-метрик [9] эллиптические спектры также являются устойчивыми дескрипторами формы фигур и изображений по отношению к контурным и площадным искажениям. При этом они заведомо более информативны и чувствительны, чем дисковые спектры, поскольку содержат, наряду с информацией о локальной толщине фигуры, также информацию о локальных вытянутости и направлении.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-07-00914-А и 12-07-00798-а.

**Литература**

1. Местецкий, Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений. Фигуры. Скелеты. Циркуляры. – М.: Физматлит, 2009. – 688 с.
2. Serra, J. Image Analysis and Mathematical Morphology. – London: Academic Press, 1982. – 610 p.
3. Maragos, P. Pattern Spectrum, Multiscale Shape Representation // Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. – 1989, July – Vol. 11, Issue 7. – P. 701-716.
4. Визильтер, Ю.В. Вычисление морфологических спектров плоских фигур с использованием непрерывных скелетных представлений / С.В. Сидякин, А.Ю. Рубис // Сборник докладов 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов». – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 416-419.
5. Сидякин, С.В. Разработка алгоритмов построения морфологических спектров для анализа цифровых изображений и видеопоследовательностей: дисс. канд. тех. наук. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 163 с.

6. **Местецкий, Л.М.** Скелет многоугольной фигуры – представление плоским прямолинейным графом // Труды международной конференции по компьютерной графике и зрению «ГрафиКон 2010». – СПб, 2010. – С. 222-229.
  7. **Mestetskiy, L.M.** Segment Voronoi Diagram Representation by Bezier Control Graph // Proceedings of the 10th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2013). – Saint Petersburg, 2013. – P. 75-81.
  8. **Bronstein, A.M.** Analysis of two-dimensional non-rigid shapes / M.M. Bronstein, A.M. Bruckstein, R. Kimmel // International Journal of Computer Vision (IJCV). – 2008. – Vol. 78(1). – P. 67-88.
  9. **Rubner, Y.** The Earth Mover's Distance as a Metric for Image Retrieval / C. Tomasi, L.J. Guibas // International Journal of Computer Vision. – 2000. – Vol. 40(2). – P. 99-121.
- References*
1. **Mestetskiy, L.M.** Continuous morphology of binary images: figures, skeletons, circulars. – Moscow: "Fizmatlit" Publisher, 2009. – 288 p. – (In Russian).
  2. **Serra, J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. – London: Academic Press, 1982. – 610 p.
  3. **Maragos, P.** Pattern Spectrum, Multiscale Shape Representation // Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. – 1989, July – Vol. 11, Issue 7. – P. 701-716.
4. **Vizilter, Yu.V.** Morphological spectrum computation of flat figures using continuous skeletal representations / S.V. Sidyakin, A.Yu Rubis // Proceedings of 15th Conference on Mathematical Methods in Pattern Recognition – Moscow: "MAKS Press" Publisher, 2011 – P. 416-419. – (In Russian).
  5. **Sidyakin, S.V.** Morphological pattern spectra algorithm development for digital image and video sequences analysis // PhD Thesis. – Moscow: Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS (CC RAS), 2013. – 163 p. – (In Russian).
  6. **Mestetskiy, L.M.** Skeleton of polygonal figure – representation by planar linear graph // Proceedings of the 20th International Conference on Computer Graphics and Vision "Graphicon 2010" Publisher. – Saint Petersburg, 2010. – P. 222-229 – (In Russian).
  7. **Mestetskiy, L.M.** Segment Voronoi Diagram Representation by Bezier Control Graph // Proc. of the 10th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2013). – Saint Petersburg, 2013. – P. 75-81
  8. **Bronstein, A.M.** Analysis of two-dimensional non-rigid shapes / M.M. Bronstein, A.M. Bruckstein, R. Kimmel // International Journal of Computer Vision (IJCV). – 2008. – Vol. 78(1). – P. 67-88.
  9. **Rubner, Y.** The Earth Mover's Distance as a Metric for Image Retrieval / C. Tomasi, L.J. Guibas // International Journal of Computer Vision. – 2000. – Vol. 40(2). – P. 99-121.

## MORPHOLOGICAL SHAPE DESCRIPTORS OF BINARY IMAGES BASED ON ELLIPTICAL STRUCTURING ELEMENTS

S.V. Sidyakin, Yu.V. Vizilter  
FGUP "GosNIAS"

### Abstract

In this paper, we proposed algorithms for constructing continuous skeletons with elliptical structuring element (SE). The transformation between disk and elliptical skeletons is described. Computationally efficient discrete-continuous approach for the construction of morphological descriptors (spectra and maps) with fixed elliptical SE is proposed based on elliptical skeletons. The definitions of morphological elliptical maps, size spectra, directions spectra, elongation spectra with arbitrary elliptical structuring element is proposed. Definitions of two-dimensional spectra with various combinations of size and shape factors is given. Proposed morphological descriptors can be used directly for shape comparison or for shape segmentation into simple geometric parts of specified thickness, direction and elongation.

**Key words:** mathematical morphology, pattern spectra, continuous skeleton, ellipse.

### Сведения об авторах



**Сидякин Сергей Владимирович**, 1985 года рождения, в 2009 году окончил ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)». В 2013 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук. С 2009 года работает в ФГУП «ГосНИИ авиационных систем» (ГосНИИАС). В настоящее время является начальником сектора анализа движения и видеонаблюдения. Является автором и соавтором 24 научных трудов (из них 8 статей в рецензируемых журналах из списка ВАК). Круг научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, программирование, видеонаблюдение.

E-mail: [sersid@bk.ru](mailto:sersid@bk.ru).

**Sergey Vladimirovich Sidyakin** (b.1985) graduated from Moscow Aviation Institute (National Research University) in 2009. In 2013 he received his candidates of Technical Sciences degree. He currently resides at the FGUP "GosNIAS". Author of 24 scientific papers. Research interests are image and video analysis, pattern recognition, programming.



**Визильтер Юрий Валентинович**, 1970 года рождения, в 1992 году окончил ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)». В 1997 г. защитил кандидатскую, а в 2009 году – докторскую диссертацию. В настоящее время является начальником подразделения ФГУП «ГосНИИ авиационных систем» (ГосНИИАС). Опубликовал более 80 научных работ (из них более 20 статей в рецензируемых журналах из списка ВАК). Область научных интересов: обработка и анализ изображений, цифровая фотограмметрия, машинное зрение, математическая морфология, распознавание образов, машинное обучение, биометрия.

E-mail: [viz@gosniias.ru](mailto:viz@gosniias.ru).

**Yuri Valentinovich Vizilter** (b.1970) graduated from Moscow Aviation Institute (National Research University) in 1992. Since 1997 is the Candidates of Technical Sciences, 2009 – the Doctor of Technical Sciences. Currently he works as the head of department at the FGUP “GosNIIAS”. Author of 80 scientific papers. Research interests are processing and image analysis, digital photogrammetry, computer vision, mathematical morphology, pattern recognition, machine learning, biometry.

*Поступила в редакцию 17 июня 2014 г.*