

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЗОНЕ ФРАУНГОФЕРА ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

И.М. Сизова

Физический институт им. Н.П. Лебедева РАН, Москва, Россия

Аннотация

Предложен метод аппроксимации потока излучения в конусе с заданным углом раствора в зоне Фраунгофера путём замены производной от автокорреляционной функции на модельную функцию. Выбор свободных параметров модели обеспечивает правильное разложение функции потока в начале координат и на бесконечности (по углу) и хорошую аппроксимацию её в промежуточной области.

Ключевые слова: апертуры, дифракция, дифракционная теория.

Цитирование: Сизова, И.М. Аппроксимация функции потока энергии в зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах сложной формы / И.М. Сизова // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 5. – С. 635-643. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-5-635-643.

Введение

Поток излучения в заданном конусе угла в зоне Фраунгофера при дифракции света на плоской ограниченной апертуре произвольной формы при произвольном падающем на неё поле вычисляется как интегральное преобразование усреднённой по углу автокорреляционной функции поля на апертуре с ядром в виде функции Бесселя 1-го порядка. Такие задачи возникают в разных областях физики – в астрономии, в фотодиссоционных лазерах с накачкой излучением открытых разрядов [1] и т.д. Расчёты подобных интегралов с осциллирующей функцией непросты. Ещё труднее решение обратных задач. Т.к. часто вполне хватает точности расчётов потока 10–15%, то актуален поиск его хорошей аппроксимации. В [2–3] была предложена такая аппроксимация, но точность её приемлема лишь при ряде ограничений на форму апертуры и структуру падающего поля. Поле должно быть плавным, а апертура не очень изрезанной.

Здесь предложена аппроксимация функции потока на основе другой, по сравнению с представленной в [2–3], модели. Она позволяет получить большую точность приближения в более широком диапазоне полей и апертур и, по-видимому, имеет перспективу дальнейшего улучшения в рамках развития предложенной методики.

1. Основные соотношения

В классической задаче дифракции произвольной монохроматичной световой волны, падающей вдоль оси z перпендикулярно на плоскую ограниченную апертуру ($z=0$), рассмотрим поток излучения $\epsilon(\vartheta)$ в конусе с образующей под углом ϑ к z , нормированный на $E_\Sigma = \iint_\Sigma |U(\vec{r}, 0)|^2 d^2\vec{r}$ – весь поток через апертуру, $U(\vec{r}, 0)$ – поле на апертуре с декартовыми координатами $\vec{r} = \{x, y\}$, Σ – площадь апертуры.

Выражение для потока $\epsilon(\vartheta)$ за апертурой в параксиальной области зоны Фраунгофера, полученное в рамках физической оптики методом Кирхгофа в приближении Френеля [4–5], имеет вид [2, 6]

$$\epsilon(\vartheta) = \frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \int_0^\infty \bar{T}(\rho) J_1\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda}\rho\right) \rho d\rho. \quad (1)$$

Здесь λ – длина волны; J_1 – функция Бесселя 1-го порядка; $\bar{T}(\rho)$ – автокорреляционная функция (АФ), усреднённая по углу φ введённых вместо декартовых в плоскости апертуры полярных координат $\vec{\rho} = \{\rho, \varphi\}$

$$\bar{T}(\rho) = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\iint_\Sigma U^*(\vec{r}, 0) \cdot U(\vec{r} + \vec{\rho}, 0) d^2\vec{r} \right) d\varphi}{2\pi E_\Sigma}. \quad (2)$$

Расчёт поля за апертурой в рамках физической оптики через $U(\vec{r}, 0)$ полагает выполнение условий:

- неравенство $\lambda/a \ll 1$ (a – размер апертуры): вместе с условием монохроматичности излучения позволяет пренебречь краевыми эффектами на апертуре, решать вместо векторной задачи скалярную и перейти от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца $\Delta U(\vec{r}, z) + k^2 U(\vec{r}, z) = 0$, где $k = 2\pi/\lambda$, с граничными условиями геометрической оптики Кирхгофа. При дополнительном условии излучения Зоммерфельда $\lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial U / \partial r - ikU) = 0$, обеспечивающем нужную скорость убывания поля на бесконечности за апертурой, оно имеет точное интегральное решение с помощью вспомогательной функции Грина. Для (1) взята первая функция Грина для плоской апертуры, дающая решение через поле на апертуре без учёта производной поля по нормали;

- условие параксиальности области $\vartheta \ll (\lambda/a)^{1/3}$: можно перейти от уравнения Гельмгольца к параболическому уравнению $2ik(\partial U / \partial z) + \Delta_{x,y} U = 0$ ($\Delta_{x,y}$ – поперечный лапласиан), точное решение которого называется приближением Френеля;

- условие на волновой параметр $D = \lambda z / \Sigma \gg 1$: определяет расстояние z от апертуры (область дифракции Фраунгофера), где приближение Френеля дополнительно упрощается.

Далее будем полагать, что падающая волна на апертуре плоская. Тогда, не уменьшая общности, функцию $U(\vec{r}, 0)$ можно считать действительной.

АФ при однородном ($U(\vec{r}, 0) = const$) поле на апертуре равна площади перекрытия двух сдвинутых относительно друг друга на ρ апертур. Площадь перекрытия нормирована на площадь апертуры. А $\bar{T}(\rho)$ – среднее АФ по углу направления сдвига. Т.е. АФ и $\bar{T}(\rho)$ – геометрические характеристики апертуры. Если поле неоднородно, то АФ и $\bar{T}(\rho)$ будут усреднёнными полем $U(\vec{r}, 0)$ характеристиками. Из (2) следует $\bar{T}(0) = 1$.

При близких к нулю $\Delta_1 = 2\pi\vartheta\rho_1 / \lambda$ из (1) следует

$$\varepsilon(\vartheta) \approx_{\Delta_1 \rightarrow 0} \pi \Sigma_{eff} \vartheta^2 / \lambda^2 = \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{\rho_1}{\lambda} \vartheta \right)^2, \quad (3)$$

где введена усреднённая полем площадь апертуры

$$\Sigma_{eff} = \frac{\left| \iint_{\Sigma} U(\vec{r}, 0) d^2\vec{r} \right|^2}{E_{\Sigma}} = 2\pi \int_0^{\infty} \bar{T}(\rho) \rho d\rho. \quad (4)$$

При однородном поле $\Sigma_{eff} = \Sigma$, при неоднородном $\Sigma_{eff} \leq \Sigma$. В (3) определена первая характерная длина

$$\rho_1 = \sqrt{\Sigma_{eff} / \pi}. \quad (5)$$

В [6] из разложения (1) в ряд по методу Виллиса [7] было показано, что асимптотическое приближение $\varepsilon(\vartheta)$ при больших $\Delta_2 = 2\pi\vartheta\rho_2 / \lambda$ имеет вид

$$\varepsilon(\vartheta) \approx_{\Delta_2 \rightarrow \infty} 1 - \frac{(2/\pi)}{(2\pi\rho_2\vartheta/\lambda)}, \quad (6)$$

где вторая характерная длина – ρ_2 определяется как

$$\rho_2 = 2E_{\Sigma} / \int_c |U|^2 dl. \quad (7)$$

В знаменателе (7) стоит интеграл по периметру апертуры. В случае однородного поля (7) переходит в

$$\rho_2 = 2\Sigma / P, \quad (8)$$

где P – периметр апертуры. Множители в (5,7) взяты так, что для $U(\vec{r}, 0) = const$ на круглой апертуре $\rho_{1,2}$ равны радиусу круга. При однородном поле

$$\rho_2 = 2\Sigma / P \leq \sqrt{\Sigma / \pi} = \rho_1 \quad (9)$$

и равенство имеет место лишь для круга. Тем более отношение (9) верно при неоднородном поле, когда даже для круга выполнено строгое неравенство.

Итак, (3) и (6) дают приближения (1) при малых и больших значениях величин

$$\Delta_i = 2\pi\vartheta\rho_i / \lambda. \quad (10)$$

В промежутке $\varepsilon(\vartheta)$ может иметь разный вид. Аналитических формул для $\varepsilon(\vartheta)$ получены единицы. Например, известная функция Релея для круга при однородном поле

$$\varepsilon_{circ}(\Delta) = 1 - J_0^2(\Delta) - J_1^2(\Delta), \quad (11)$$

где $J_{0,1}(x)$ – функции Бесселя порядков 0 и 1. В (11) аргумент (10) взят без индекса, т.к. в нём стоит радиус круга $\rho = \rho_{1,2}$. Приближения (3) и (6) хорошо описывают (11) при малых и больших Δ ; их совокупность, соединённая в точке пересечения, хорошо аппроксимирует всю функцию Релея (см. рис. 2 в [2]).

Численный расчёт четвертого интеграла (1–2) из-за осцилляций J_1 требует значительного времени и необходим и в астрономии [8], и в конструкциях некоторых лазеров [1]. Для многих задач расчёт (1) допустим приближённо. В [2] было показано, что при однородном поле и близких к 1 значениях параметра

$$\mu = \rho_1 / \rho_2 \quad (12)$$

(согласно (9), $\mu \geq 1$) неплохим приближением $\varepsilon(\vartheta)$ является (11) от Δ_2 (10) с ρ_2 из (8).

При неоднородном поле μ больше, чем при однородном. Когда ρ_2 (7) велико (поле по краям мало), то (6) «работает» лишь вблизи $\varepsilon(\vartheta) \approx 1$ и ρ_2 уже не определяет $\varepsilon(\vartheta)$ в промежуточной области значений.

Для этой ситуации в [2–3] было показано, что если поле на апертуре меняется плавно (зависимости типа Гаусса, экспоненты), то как приближение $\varepsilon(\vartheta)$ можно взять (11) от аргумента $\Delta_{2,eff} = 2\pi(\rho_{2,eff} / \lambda) \vartheta$, где $\rho_{2,eff}$ рассчитывается (8) с заменой Σ на Σ_{eff} , а P – на P_{eff} , получаемый как периметр отверстия внутри апертуры, равного по площади Σ_{eff} с границей по горизонтали рельефа амплитуды поля или по границе апертуры (где она обрезает горизонталь),

$$\rho_{2,eff} = 2\Sigma_{eff} / P_{eff}. \quad (13)$$

Оказалось также, что почти без потери точности приближения можно не считать P_{eff} для отверстия, равного точно Σ_{eff} (нередко это требует решения трансцендентных уравнений), а взять по той же схеме площадь и периметр отверстия, соответствующего амплитуде поля $1/e^2$ от максимального значения (где на границе поле больше, берётся граница апертуры).

Параметр (13) (и тем более его приближение «по уровню $1/e^2$ ») не следует из (1–2), получен феноменологически, и применимость его предложена из расчёта $\varepsilon(\vartheta)$ для разных апертур, в том числе в йодных фотодиссоционных лазерах с полями на апертурах типа Гаусса или экспоненты [1–2]. В [3] была сделана безуспешная попытка обосновать или улучшить выбор (13) для приближения типа (11). К тому же такое приближение вообще плохое, например, если поле в небольшой части апертуры («керне») велико, а в остальной, много большей части («периферии»), мало, а энергии в «керне» и на «периферии» сравнимы.

Здесь предложен иной, чем в [2–3], метод аппроксимации $\varepsilon(\vartheta)$ – на основе моделей $\bar{T}(\rho)$.

Если $F(y)$ – интегральное преобразование (ИП) $f(x)$ с осциллирующим ядром $G_{osc}(xy)$ (как (1))

$$F(y) = \int G_{osc}(xy) \cdot f(x) dx, \quad (14)$$

то осцилляции G_{osc} могут сгладить вклад f в F . И по сути $F(y)$ задаёт не точный вид $f(x)$, а набор её число-

вых характеристик (инвариантов). Тогда модель $f(x)$, даже хорошо её и не воспроизводящая, но сохраняющая эти инварианты, может дать хорошее приближение $F(y)$, зависящее от инвариантов.

Такой результат был получен в [9–10] в численных экспериментах по расчёту статистических характеристик узкополосного случайного процесса, что и вдохновило на аналогичный подход к аппроксимации $\epsilon(\vartheta)$, т.к. интеграл (1) по структуре похож на (14). Поскольку и ядра $G_{osc}(xy)$ в (1) другие, и у $f(x)$ другой смысл, подход здесь был не столько математическим, сколько физическим: выбор необходимых инвариантов делался из физического смысла $f(x)$.

В [9–10] $f(0)$ и $G_{osc}(0)$ в (14) равны абсолютным максимумам. Т.е. осцилляции G_{osc} обрезают хвост $f(x)$. В (1) $\bar{T}(0)$ – максимум, но $J_1(0)=0$, тем самым обрезается не хвост, а максимум $\bar{T}(\rho)$. Поэтому для аппроксимации $\epsilon(\vartheta)$ по методу [9–10] формула (1) на основе свойств функций Бесселя интегрированием по частям была преобразована к виду

$$\epsilon(\vartheta) = 1 - \int_0^\infty \Gamma(\rho) J_0\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda}\rho\right) d\rho, \quad (15)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка с уже нужным видом ядра (14) (максимум в нуле и убывание с ростом аргумента), а $\Gamma(\rho)$ определяется как

$$\Gamma(\rho) = -\bar{T}'(\rho). \quad (16)$$

При выводе (15) из (1) учтены равенства $J_0(0) = 1$;

$$\bar{T}(0) = 1; \bar{T}(\infty) = 0. \quad (17)$$

Численный расчёт $\epsilon(\vartheta)$ (если $\Gamma(\rho)$ не известны аналитически) делался не по (15), а по (1), т.к. иначе к расчёту тройного интеграла (2) добавляется отдельная задача численного расчёта производной $\bar{T}(\rho)$.

Функция $\Gamma(\rho)$ удовлетворяет условиям

$$\Gamma(0) = \frac{2}{\pi\rho_2}; \int_0^\infty \Gamma(\rho) d\rho = 1; \int_0^\infty \Gamma(\rho)\rho^2 d\rho = \frac{\Sigma_{eff}}{\pi}. \quad (18)$$

Третье равенство в (18) вытекает из (4), второе – из (16–17), а первое – из равенства $\bar{T}'(0) = -2/\pi\rho_2$, полученного в [6] для однородного поля на апертуре и обобщённого в [2] для неоднородного поля (см. (6)).

Из (16–17) следует связь моментов $\Gamma(\rho)$ и $\bar{T}(\rho)$

$$\int_0^\infty \Gamma(\rho)\rho^n d\rho = n \int_0^\infty \bar{T}(\rho)\rho^{n-1} d\rho. \quad (19)$$

Рассмотрим сначала случай однородного поля на апертуре, когда многие характеристики имеют ясную геометрическую интерпретацию.

2. Однородное поле на апертуре

Введём для удобства вместо (16) безразмерную функцию $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ от безразмерного аргумента

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi\rho_2}{2}\Gamma(\rho = \rho_2\zeta) = -\frac{\pi}{2}\bar{T}'(\rho = \rho_2\zeta), \quad (20)$$

где $\xi = \rho / \rho_2$, ρ_2 задано (8). Тогда (18) перейдут в

$$\tilde{\Gamma}(0) = 1; \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta) d\zeta = \pi / 2; \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta^2 d\zeta = \mu^2\pi / 2, \quad (21)$$

а выражение (15) через Δ_2 из (10) перейдёт в

$$\epsilon(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta) J_0(\Delta_2\zeta) d\zeta. \quad (22)$$

Если μ (12) известно и в (22) подставить модель $\tilde{\Gamma}_{mod}(\zeta)$, удовлетворяющую (21), то у полученной функции $\epsilon_{mod}(\Delta_2)$ с точной $\epsilon(\Delta_2)$ совпадут поведение $(\Delta_2\mu/2)^2$ (3) в начале координат и асимптотика $1 - (2/\pi)/\Delta_2$ (6) на бесконечности. Функция $\epsilon(\Delta_2)$ не убывает, стремится к единице и может иметь точки перегиба (тёмные кольца Фраунгофера на дифракционной картине). Если на графике с абсциссой Δ_2 начертить две функции (11) от $\Delta_1 = \mu\Delta_2$ и Δ_2 , то $\epsilon(\Delta_2)$ сначала пойдёт по первой кривой, а в конце перейдёт на вторую. Переход может быть разным – монотонным, с точками перегиба или почти горизонтальным перескоком вблизи верхнего «плато». На рис. 1 приведены 4 функции (20) для разных форм апертур с $\mu = 1,77$ (прямоугольной, кольцевой и двух зубчатых отверстий 3O), взятых из [2], дающих разного вида функции $\epsilon(\Delta_2)$ (см. рис. 2). Апертуры 3O – это шестерёнки с зубьями в форме кусков кольца, срезанных по радиусам и внешней окружности. Форма 3O обладает осью симметрии порядка n и определена тремя параметрами – отношением радиусов концентрических кругов d , числом одинаковых зубьев n и коэффициентом заполнения внешнего кольца зубьями η (долей кольца, занятой зубьями).

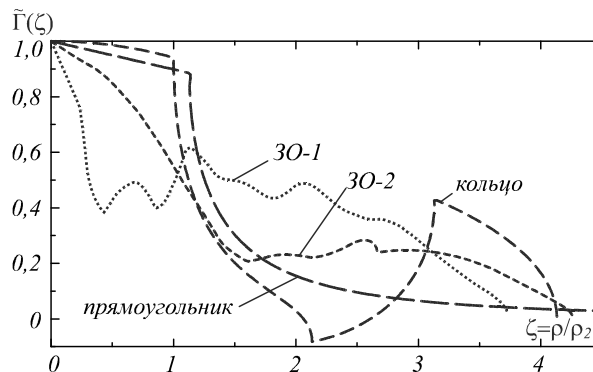


Рис. 1. Функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для четырёх разных апертур с $\mu = \rho_1/\rho_2 = 1,77$: 3O-1; 3O-2; кольцо; прямоугольник (кривая простирается до $\zeta = 8,8$)

Для численного расчёта $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ 3O была написана программа, использованная и для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ кольцевых апертур с неоднородными полями. Из полученных наборов (d, n, η) для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис. 1 были выбраны два с $\mu = 1,77$: 3O-1 (0,77; 10; 0,75) и 3O-2 (0,25; 3; 2/3). У прямоугольника $\mu = 1,77$ соответствует $a/b = 9,84$ ($\mu = (a+b)/\sqrt{\pi ab} \in [2/\sqrt{\pi} \approx 1,13; \infty)$), у кольца – отношению $d = 0,52$ ($\mu = \sqrt{(1+d)/(1-d)} \in [1; \infty)$).

Для кольца и прямоугольника $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ выражаются аналитически [11–13]. Нам понадобится $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для кольца

$$\tilde{\Gamma}_{ring}(\zeta) = \frac{\left\{ \sqrt{(\mu^2 + 1)^2 - \zeta^2}, \zeta \leq \mu^2 + 1 \right\} + \left\{ \sqrt{(\mu^2 - 1)^2 - \zeta^2}, \zeta \leq \mu^2 - 1 \right\} - \left\{ 2\sqrt{\mu^4 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} / \zeta, 1 \leq \zeta \leq \mu^2 \right\}}{2\mu^2} \quad (23)$$

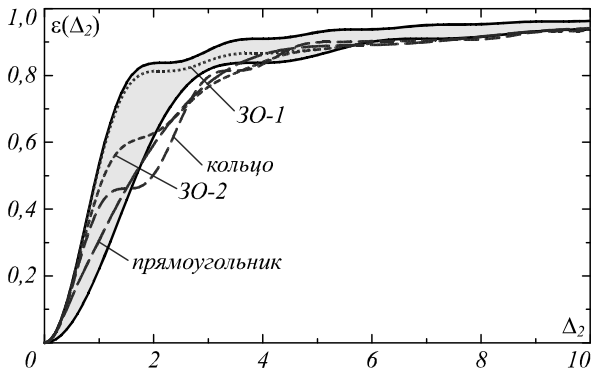


Рис. 2. Функции $\epsilon(\Delta_2)$ – штриховые кривые, соответствующие $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис. 1. Сплошными линиями изображены функции (11) от аргументов $\mu\Delta_2$ (левее) и Δ_2 (правее), область между которыми закрашена

Для приближения $\epsilon(\Delta_2)$ опробовался ряд моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, выбираемых из трёх соображений: возможность аналитического счёта (22) с $\tilde{\Gamma}_{mod}(\zeta)$ (или через интеграл от параметров, который можно табулировать); легкость расчёта параметров модели через характеристики апертуры, поля или $\bar{T}(\zeta)$; применимость модели и для неоднородного поля на апертуре.

Функций, аналитически интегрируемых в (22), не так много. В $\tilde{\Gamma}_{mod}(\zeta)$ были использованы линейная ((22) с ней дают функции Бесселя и Струве), функция

$$f(x) = \sqrt{k^2 - x^2} \quad (24)$$

вида $\tilde{\Gamma}_{circ}(\zeta) = \sqrt{1 - (\zeta/2)^2}$ круглой апертуры и двух первых слагаемых в (23) ((22) от (24) на интервале $[0, k]$ даёт (11)) и функция третьего слагаемого в (23)

$$f(x) = \sqrt{k^2 - x^2} \sqrt{x^2 - 1} / x. \quad (25)$$

Интеграл (22) от (25) на интервале $[1, k]$ аналитически не считается и зависит от k и ещё одного параметра.

Взятые модели $\tilde{\Gamma}_{mod}(\zeta)$ содержат параметры. В [11–13] рассмотрены несколько моделей с числом свободных параметров 1–3 (после выполнения (21)) и разные источники этих параметров. Здесь приведены результаты этого анализа и показаны лучшие модели с наиболее удачным выбором свободных параметров.

Первая группа $\tilde{\Gamma}_{mod}(\zeta)$ – кусочно-линейные модели с 1–3 свободными параметрами. Их анализ для примеров рис. 1 показал, что хорошее приближение $\epsilon(\Delta_2)$ дают однопараметрические прямоугольная и треугольная модели $\tilde{\Gamma}_{mod}^{rec,tri}(\zeta)$, несмотря на грубость приближения $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (рис. 3).

Параметры их вычисляются из квадратных уравнений (см. ниже). Модели с большим числом свободных параметров «проигрывают» моделям рис. 3 по нескольким пунктам: усложняются уравнения для

расчёта параметров из значений инвариантных характеристик отверстий; требуется больше таких характеристик; чаще случается, что рассчитанные параметры не отвечают необходимым требованиям. Это верно и при неоднородных полях на апертуре.

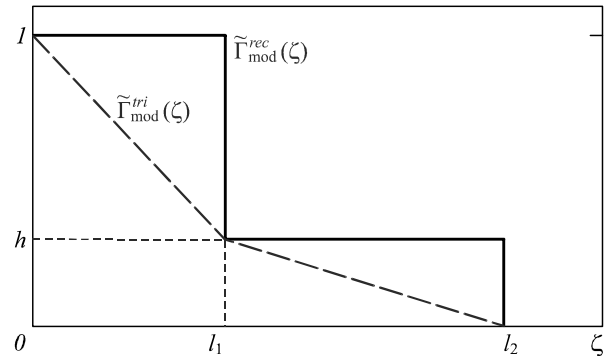


Рис. 3. Однопараметрические модели $\tilde{\Gamma}_{mod}^{rec,tri}(\zeta)$.

Значение $\tilde{\Gamma}_{mod}(0)$ и два из трёх параметров на графике определяются уравнениями (21), один параметр – свободный. По смыслу $0 < l_1 \leq l_2$, а h – любое

Конечно, больше параметров в модели – шире возможности аппроксимации. Но указанные недостатки сводят эти преимущества на нет. Потенциальные возможности моделей рис. 3 (через ручной подбор свободного параметра) позволяют ещё улучшить приближение $\epsilon(\Delta_2)$. А улучшения за счёт усложнения моделей при рассмотренных источниках параметров незначительны и не всегда наблюдаются.

Параметры моделей рис. 3 удобно считать через

$$a = l_1 + l_2, \quad (26)$$

полагая его свободным параметром. Тогда для модели $\tilde{\Gamma}_{mod}^{tri}(\zeta)$ рис. 3 из уравнений (21) имеем

$$b = l_1 l_2 = \frac{\pi(a^2 - 6\mu^2)}{\pi + a}; \quad h = \frac{\pi - l_1}{l_2}. \quad (27)$$

Для существования действительных положительных l_1, l_2 в (26–27) необходимо и достаточно, чтобы a отвечало условию (при $\mu \geq \pi/\sqrt{6} \approx 1,28$) [12–13]

$$a > \mu\sqrt{6}. \quad (28)$$

При $1 \leq \mu < \pi/\sqrt{6}$ условие на a другое (см. [12–13]), но значение $\mu \approx 1,28$ невелико даже при однородном поле, и все примеры здесь относятся к случаю $\mu \geq 1,28$. Величина $\mu\sqrt{6}$ в таблице названа a_{min} .

Параметр a (26) можно взять из разных характеристик отверстия. Рассмотрим некоторые возможности [11–13]. Например, из незадействованных в (21) моментов $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (т.е. $\bar{T}(\zeta)$ – см. (19)), а именно

$$I_1 = \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta) d\zeta; \quad I_3 = \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^3 d\zeta; \quad I_4 = \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^4 d\zeta. \quad (29)$$

Значения I_1 для рассмотренных апертур приведены в таблице, $I_{3,4}$ – в [11, 13]. Через момент I_1 параметр (26) для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ рис. 3 вычисляется формулой

$$a_{I_1} = 6\pi(\mu^2 - I_1) / (6I_1 - \pi^2). \tag{30}$$

Хотя (30) вполне удачен для исследованных апертур и полей, рассмотрим и другие варианты (26).

Если в (15) $J_0(x)$ разложить в ряд Тейлора в нуле до x^4 , то к (3) добавится следующий член

$$\varepsilon(\Delta_2) \approx (\Delta_2^2 \mu^2 / 4) - (\Delta_2^4 / 32\pi) I_4, \tag{31}$$

т.е. I_4 тоже можно взять источником (26). Согласно (31), это должно улучшить приближение $\varepsilon(\Delta_2)$ в начале координат, но поправка эта малозаметна. Замена a_{I_1} на a_{I_4} не улучшает приближение $\varepsilon(\Delta_2)$, хотя эти два варианта близки. Через I_4 для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ параметр a_{I_4} вычисляется из уравнения 4-й степени

$$a^4 - (6\mu^2 + A)a^2 - 2\pi Aa - \pi^2 = 0, \tag{32}$$

где $A = [6(5I_4 - 6\pi\mu^4)] / [(6\mu^2 - \pi^2)\pi]$, и должен удовлетворять (28).

Получить a можно и из условия $l_2 = \zeta_{\text{max}}$, где ζ_{max} – наибольшее ζ , для которого $\tilde{\Gamma}(\zeta) \neq 0$ (и $\bar{T}(\zeta) \neq 0$).

Оно равно $a_{\zeta} = (\zeta_{\text{max}} + \sqrt{\zeta_{\text{max}}^2 + D}) / 2$, где $D = 4\pi(\zeta_{\text{max}}^2 - 6\mu^2) / (\zeta_{\text{max}} - \pi)$. Для выполнения $a_{\zeta} \geq l_2$ надо $D \geq 0$. Вместе с (28) это ограничивает ζ_{max} :

$$\begin{cases} \zeta_{\text{max}} \geq \sqrt{6}\mu \\ 0 < \zeta_{\text{max}} < \pi \end{cases}, \tag{33}$$

где, как и в (28), предполагается $\mu \geq \pi / \sqrt{6}$. Противоположный вариант – см. в [13].

Значения ζ_{max} и a_{ζ} для рассмотренных примеров также приведены в таблице. Условиям (33) из апертур рис. 1 удовлетворяет только прямоугольник.

Табл. Характеристики $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для 7 апертур и полей на них и различные значения a (26) для треугольной модели рис. 3 (прочерки означают, что параметр не существует или не удовлетворяет условию (28))

	μ	I_1	ζ_{max}	\varkappa	a_{min}	a_{I_1}	a_{I_4}	a_{ζ}	a_{ε}	a_{ε}
Прямоугольник $a/b=9,84$	1,77	1,85	8,77	0,10	4,34	19,5	12,9	11,6	–	13-15
Кольцо $d=0,52$	1,77	2,00	4,13	0	4,34	10,2	7,36	–	–	7-9
ЗО-1	1,77	2,32	3,74	1,02	4,34	–	–	–	4,78	4,3-4,7
ЗО-2	1,77	2,12	4,27	0,31	4,34	6,62	5,91	–	–	6,5-7
Пример 1	3,37	3,61	20,8	0,75	8,25	12,4	12,1	23,6	10,5	12-13
Пример 2	5,34	4,35	17,9	0,77	13,1	28,0	28,7	19,5	16,9	20-22
Пример 3	12,0	10,1	34,3	–	29,5	50,4	63,4	35,2	<0	39-40

Для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ параметр (26) можно получить и из тангенса угла наклона в нуле $\tilde{\Gamma}(\zeta) \approx 1 - \varkappa\zeta + \dots$

$$\varkappa = -\tilde{\Gamma}'_{\zeta}(0) = (\pi / 2) \cdot \bar{T}'_{\zeta}(0). \tag{34}$$

Через (34) $a_{\varepsilon} = \sqrt{\pi(6\mu^2\varkappa - \pi) / (\pi\varkappa - 1)}$.

Ряд, полученный для (22) в [7] (и подробно исследованный в [14]), представлен лишь чётными производными $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и не содержит (34):

$$\varepsilon(\Delta_2) \approx 1 - \frac{2}{\pi\Delta_2} + \frac{\tilde{\Gamma}''_{\zeta}(0)}{\pi\Delta_2^3} + \dots \tag{35}$$

В (35) только два первых члена – асимптотическое разложение (22) на бесконечности (ср. (6)) и нет слагаемого вида Δ_2^{-2} , как, например, в асимптотике (11) [15]

$$\varepsilon_{\text{circ}}(\Delta) \approx 1 - \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{\cos 2\Delta}{\pi\Delta^2} - \frac{1 - \sin 2\Delta}{4\pi\Delta^3} + \dots$$

Формулы для расчёта \varkappa в произвольном случае нет. Согласно [3] неоднородность поля даёт вклады лишь в чётные производные $\bar{T}(\zeta)$ в нуле (т.е. в нечётные производные $\tilde{\Gamma}(\zeta)$). С учётом $\bar{T}'(0)$ из [2, 6] и части $\bar{T}''(0)$ от неоднородностей получим [12–13]

$$\begin{aligned} \bar{T}(\zeta) \approx & 1 - \zeta \frac{2}{\pi} + \\ & \zeta^2 \frac{\rho_2^2 \cdot \iint_{\Sigma} U^* \cdot \nabla_{\perp} U d^2 \vec{r}}{4E_{\Sigma}} + \dots \end{aligned} \tag{36}$$

В (36) в общем случае коэффициент при ζ^2 (задающий \varkappa) не полон – в нём есть вклад от неоднородности поля и нет от границы апертуры. Но для рассмотренных в работе примеров \varkappa считается. При однородном поле для апертур рис. 1: $\varkappa_{\text{пр}} = 1 / (\pi\mu^2)$;

$$\varkappa_{\text{зо}} = \frac{n(1-\eta + d^2\eta)}{\pi[1-\eta + d\eta + n(1-d)/\pi]^2}; \quad \varkappa_{\text{кол}} = 0. \text{ И даже}$$

при одинаковом μ они сильно отличаются. А при неоднородном поле для трёх рассмотренных далее примеров в силу радиальной симметрии полей и апертуры \varkappa даётся как раз третьим слагаемым (36), т.е.

$$\varkappa = \pi E_{\Sigma} \iint_{\Sigma} U^* \cdot \nabla_{\perp} U d^2 \vec{r} / (\oint_c |U|^2 dl)^2.$$

И \varkappa , и a_{ε} тоже приведены в таблице. Из рис. 1 только у ЗО-1 существует $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ через \varkappa (у прямоугольника и кольца не выполнено (28), а для ЗО-2 a_{ε} мнимое).

Из (22) $\varepsilon_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\Delta_2)$ для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ рис. 3 равна

$$\epsilon_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\Delta_2) = 1 - 2/[\pi(l_2 - l_1)] \times \left[\frac{l_1((1-h)l_2 - l_1)F(l_1\Delta_2) + l_2^2 h F(l_2\Delta_2) - ((1-h)l_2 - l_1)J_1(l_1\Delta_2) + l_2 h J_1(l_2\Delta_2)}{\Delta_2} \right], \quad (37)$$

где $F(x) = J_0(x) + (\pi/2)(J_1(x)H_0(x) - J_0(x)H_1(x))$; а J_i и H_i – функции Бесселя и Струве порядка i .

Похожие по структуре на (27–28, 30, 32–33, 37) выражения получаются и для прямоугольной модели $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{rec}}(\zeta)$ (рис. 3). Они приведены в [13].

Расчёт $\epsilon_{\text{mod}}^{\text{tri,rec}}(\Delta_2)$ для апертур рис. 1 при a из таблицы показал [11–13], что обе модели хорошо и близко по точности воспроизводят $\epsilon(\Delta_2)$, но $\epsilon_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\Delta_2)$ предпочтительней, т.к. (37) обычно монотонна, как и $\epsilon(\Delta_2)$, а $\epsilon_{\text{mod}}^{\text{rec}}(\Delta_2)$ имеет заметные локальные экстремумы. Для оценки того, насколько хорошо (37) может аппроксимировать точную $\epsilon(\Delta_2)$, (26) также подбирался вручную для наилучшего приближения $\epsilon(\Delta_2)$ (a_{\pm} в таблице). При a_{\pm} (37) отличалось от $\epsilon(\Delta_2)$ на всём интервале Δ_2 в пределах 10–15%. На рис. 4–5 показаны два худших примера – для кольцевой апертуры и 3О-1.

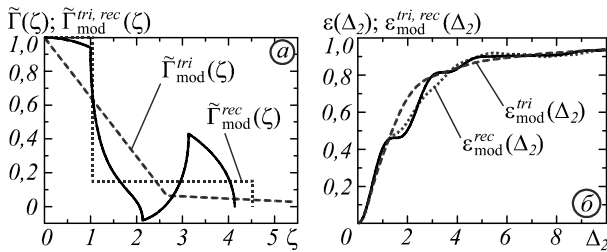


Рис. 4. Для кольцевой апертуры с $\mu=1,77$: (а) графики $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri,rec}}(\zeta)$ рис. 3 (штриховые линии) при $a=a_{\pm}$. У $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ на графике обрезан «хвост»; (б) графики $\epsilon(\Delta_2)$ и $\epsilon_{\text{mod}}^{\text{tri,rec}}(\Delta_2)$ для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri,rec}}(\zeta)$ из (а) (типы линий соответствуют)

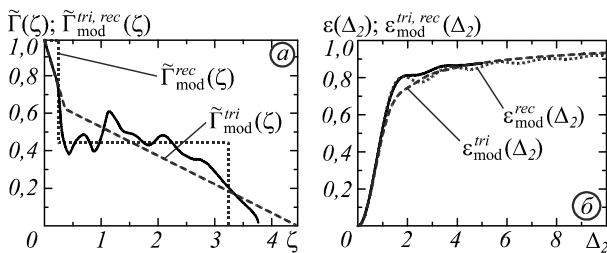


Рис. 5. Для 3О-1 с $\mu=1,77$: (а) графики $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{rec}}(\zeta)$ при $a=a_{\pm}$, $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri}}(\zeta)$ при $a=a_{\pm}$ (штриховые линии); (б) графики $\epsilon(\Delta_2)$ и $\epsilon_{\text{mod}}^{\text{tri,rec}}(\Delta_2)$ для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^{\text{tri,rec}}(\zeta)$ из (а) (типы линий соответствуют)

В [11–13] была рассмотрена ещё одна модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ на основе (23) для кольцевой апертуры – $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^r(\zeta)$. В (23) коэффициенты определяются μ (12), в модели они предполагались любыми (каждое слагаемое берётся на интервале, где оно действительно):

$$\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^r(\zeta) = \alpha\sqrt{a^2 - \zeta^2} + \beta\sqrt{b^2 - \zeta^2} + \gamma\sqrt{c^2 - \zeta^2}\sqrt{\zeta^2 - g^2} / \zeta. \quad (38)$$

В (38) 7 параметров с ограничениями по смыслу:

$$0 < a \leq b; 0 < g < c; c < b; \alpha, \beta > 0, \quad (39)$$

где связь a и b взята для определённости; второе неравенство очевидно; а два последних дают типичный вид $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\epsilon(\Delta_2)$. Возможно, условие $\alpha, \beta > 0$ в (39) можно убрать, как убрано требование $\gamma \leq 0$, соответствующее (23). Но поскольку и с (39) для всех примеров нашлись по несколько хороших решений, не отвечающих (39), варианты отбрасывались.

Учитывая (21), в (38) остаются 4 свободных параметра. Их поиск через I_i (29) приводит к системе, где в уравнениях сохранения нечётных моментов для $\tilde{\Gamma}_{\text{mod}}^r(\zeta)$ отношение неизвестных g/c входит в аргументы эллиптических интегралов. Чтобы избежать этого, модель (38–39) была упрощена наложением на g и c их связи, как в (23),

$$p = g/c = 1/\mu^2. \quad (40)$$

Тогда зависящие от p эллиптические интегралы в уравнениях сохранения $I_{1,3}$ стали числовыми коэффициентами в системе алгебраических уравнений на 3 остальных параметра. Для апертур рис. 1 было получено по 2–3 действительных решения модели (38–40) через $I_{1,3,4}$, даже для кольцевой апертуры. И все они, несмотря на различие соответствующих функций (38), дали близкие и хорошие аппроксимации $\epsilon(\Delta_2)$ (лучше, чем модели рис. 3 – см. [11]). Большинство этих решений приблизительно отвечали одному из двух равенств (не имеющих место в (23))

$$c = a; \quad (41)$$

$$c = b. \quad (42)$$

Поэтому в [11] была рассмотрена модель (38–41), а в [13] – модель (38–40, 42) (2 свободных параметра взяты из моментов $I_{1,3}$). А также две однопараметрические модели (38–40) ($b = \zeta_{\text{max}}$, выполнено одно из условий (41–42), оставшийся параметр взят из I_1). Для всех апертур рис. 1 эти двух- и однопараметрические модели имели по 1–2 решения и дали близкие и хорошие приближения $\epsilon(\Delta_2)$; причём точность аппроксимации ими оказалась лучше, чем с трёхпараметрической моделью (38–40). Даже для кольцевой апертуры, точная функция (23) которой не удовлетворяет ни (41), ни (42) (см. рис. 6). Ручным подбором параметров этих моделей (не через I_i) удалось добиться почти совпадения $\epsilon_{\text{mod}}^r(\Delta_2)$ с $\epsilon(\Delta_2)$.

Функция $\epsilon_{\text{mod}}^r(\Delta_2)$ состоит из двух функций вида (11) (получающихся из двух первых слагаемых в (38)) и двухпараметрического интеграла от функции вида (25) (из третьего слагаемого в (38)).

На рис. 6 показан пример аппроксимации $\epsilon(\Delta_2)$ функцией $\epsilon_{\text{mod}}^r(\Delta_2)$ двухпараметрических моделей (38–41) и (38–40, 42) с параметрами из $I_{1,3}$.

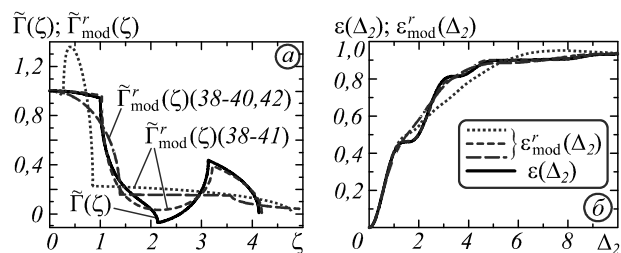


Рис. 6. Для кольцевой апертуры с $\mu=1,77$: (а) графики $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и двухпараметрических моделей $\tilde{\Gamma}_{mod}^r(\zeta)$ (38–41) (короткие и средние штрихи) и (38–40, 42) (длинные штрихи, «хвост» обрезан) со свободными параметрами из $I_{1,3}$; (б) графики $\epsilon(\Delta_2)$ и $\epsilon_{mod}^r(\Delta_2)$ для $\tilde{\Gamma}_{mod}^r(\zeta)$ из (а) (типы линий соответствуют)

Одно из приближений здесь – наихудшее из всех таких приближений для апертур рис. 1. Но и его относительная погрешность нигде не превышала 15 %.

3. Пространственно-неоднородное поле на апертуре

При неоднородном поле на апертуре возрастает μ (12), функции (11) от Δ_2 и $\mu\Delta_2$ сильнее разнесены (ср. рис. 2) и нет информации о $\epsilon(\Delta_2)$ в промежуточной области определения. Предложенное в [2–3] для этого случая приближение $\epsilon(\Delta_2)$ функцией (11) с некоторой феноменологической нормировкой аргумента (расчёт которой – отдельная задача) не совпадает ни с (3) при малых, ни с (6) при больших значениях аргумента и применимо лишь для плавных полей на апертуре типа Гаусса или экспоненты.

Используем здесь предложенные выше модели. Ограничимся кольцевой апертурой и тремя примерами полей, для которых методика [2–3] даёт плохую аппроксимацию. Поля спадают по радиусу и обладают, как и апертура, радиальной симметрией.

Пример 1. Отношение радиусов $d=0,2$; поле экспоненциально спадает от внутреннего радиуса r_1 к внешнему r_2 в $e^{10} \approx 2,2 \cdot 10^4$ раз.

Пример 2. Отношение радиусов $d=0,7$; поле экспоненциально спадает от внешнего радиуса r_2 к внутреннему r_1 в $e^{2,5} \approx 12,2$ раз.

Пример 3. Отношение радиусов $d=0,5$; поле спадает от r_1 к r_2 по закону

$$U\left(x = \frac{r}{r_2}\right) = \begin{cases} \sqrt{1-32(x-d)}, & d \leq r \leq d^*, \\ \delta = \sqrt{1-32(d^*-d)} = \sqrt{0,02}, & d^* \leq r \leq 1, \end{cases}$$

т.е. есть узкое «кольцо-кern» ($d^*=0,53125$), где U^2 падает линейно, и «периферия», где поле постоянно, а энергии E_1 в «кernе» и E_2 на «периферии» близки – $E_1/E_2 \approx 1,11$. Число $\delta^2=0,02$ близко $e^{-4} \approx 0,018$, которым в [2–3] оценён уровень U^2 эффективной границы апертуры при неоднородном поле. Приближение в [2–3] для таких полей было наихудшим.

Характеристики $\tilde{\Gamma}$ для **примеров 1–3** и параметры их моделей $\tilde{\Gamma}_{mod}^{tri}$ рис. 3 даны в таблице и в [11–13]. Сравнение для **примеров 1–3** $\epsilon_{mod}^{tri,rec}$ с точными ϵ

[11–13] показало, что и здесь ϵ_{mod}^{tri} лучше ϵ_{mod}^{rec} и вполне приемлема при $a = a_{I_1}$. Немного ей уступают (37) с $a = a_{I_4}, a_{\zeta}$, хуже с $a = a_{a_e}$ (наклон $\tilde{\Gamma}(0)$ не важен в моделировании ϵ) – см. рис. 7 для **примеров 2–3** при всех a из таблицы (у **примера 1** точность приближения выше).

Аргументы функций на рис. 7 и далее на рис. 8 нормированы не на (7), как на рис. 1–2, 4–6, а на (13), как в [2–3, 11–13].

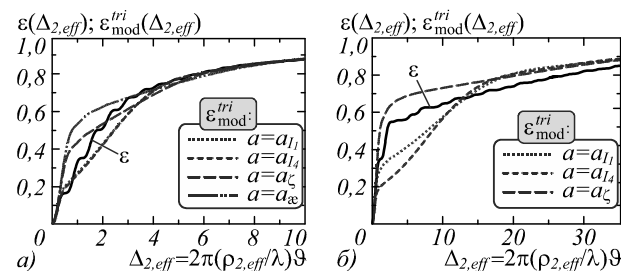


Рис. 7. Графики точных ϵ и ϵ_{mod}^{tri} (37) с параметрами из таблицы для **примера 2** (а) и **примера 3** (нет кривой с $a = a_{a_e}$) (б)

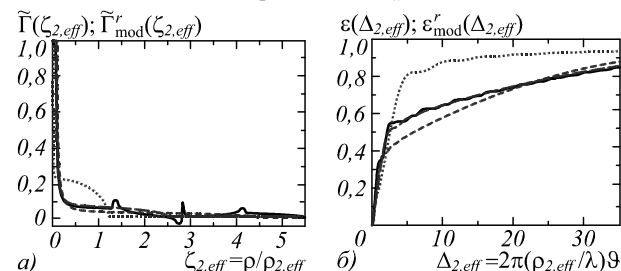


Рис. 8. Для **примера 3**: (а) графики точной $\tilde{\Gamma}$ (сплошная линия) и двухпараметрических моделей $\tilde{\Gamma}_{mod}^r$ (38–40) (штриховые линии, «хвосты» обрезаны): одна при $c = a$ (короткие штрихи) и 2 кривых при $c = b$ (средние и длинные штрихи); (б) графики точной ϵ и ϵ_{mod}^r для $\tilde{\Gamma}_{mod}^r$ из (а) (типы линий соответствуют)

Расчёты ϵ_{mod}^r для **примеров 1–3** (модели «кольца» $\tilde{\Gamma}_{mod}^r$) показали, что трёхпараметрические модели (через моменты $I_{1,3,4}$) неудачны – их везде было 2–4 неравноценных варианта, большинство которых не монотонны. Однопараметрические модели через I_1 отсутствуют для всех **примеров 1–3** как при (41), так и при (42). А двухпараметрические модели через $I_{1,3}$ существуют в 1–2 вариантах и при (41), и при (42) и по качеству близки ϵ_{mod}^{tri} (37). В [11] приведены их параметры и графики при (41), в [13] – при (42). Приближения при (42) оказались лучше, чем при (41), и для **примеров 1–2** точнее, чем для **примера 3**. На рис. 8 показаны три имеющихся варианта для **примера 3**: один при (41) (худший) и два при (42), один из которых близок к идеалу. Двухпараметрические модели (38–40, 41) и (38–40, 42) допускают большое разнообразие функций $\tilde{\Gamma}_{mod}^r$.

Итак, при плоском поле на апертуре однопараметрическая треугольная модель (37) и двухпараметри-

ческая модель «кольца» ϵ_{mod}^r при (39–40, 42) дают хорошие приближения $\epsilon(\Delta)$, если брать моменты $\tilde{\Gamma}$ для расчёта недостающих параметров.

В работе исключены случаи «мягких» апертур, определённых только полем, без экрана; они плохо описываются предложенной методикой. Параметр (7) тогда становится бесконечным и не может быть использован в (12, 18, 20–21). Из (6) вместо первого равенства (18) следует $\Gamma(0)=0$, т.е. отсутствует индивидуальность $\Gamma(0)$, а значит, специфичность поведения ϵ при больших значениях аргумента.

Расчёты в [13] $\epsilon(\Delta)$ для таких радиально несимметричных полей, спадающих в плоскости постоянства фазы от центра по закону Гаусса или экспоненты с разными коэффициентами в перпендикулярных осях, показали, что при одинаковых I_1 функции $\epsilon(\Delta)$ могут заметно отличаться, т.е. в принципе не могут хорошо аппроксимироваться моделями с I_1 в качестве источника недостающего параметра модели.

Заключение

Функция $\epsilon(\vartheta)$ есть интегральное преобразование $\Gamma(\rho)$ (16) – производной от $\bar{T}(\rho)$ с обратным знаком, с ядром в виде функции Бесселя порядка 0. Вблизи нуля $\epsilon(\vartheta)$ определяется вторым моментом $\Gamma(\rho)$ (3), а при больших значениях аргумента [2, 6] – величиной $\Gamma(0)$ (6) (см. (18)). Обе эти характеристики $\Gamma(\rho)$ задаются геометрией апертуры – площадью и периметром, усреднёнными по распределению поля на апертуре; при однородном поле – просто площадью и периметром. Однако этого недостаточно для представления $\epsilon(\vartheta)$ во всей области определения. Так же как площадь и периметр (с усреднением или без) не отражают разнообразия апертур и полей на них.

Предположив, что $\epsilon(\vartheta)$ между (3) и (6) в основном определяется ещё одной-двумя характеристиками апертуры и поля на ней, удалось получить хорошие аппроксимации для $\epsilon(\vartheta)$ путём замены $\Gamma(\rho)$ моделями, удовлетворяющими (18) и сохраняющими эти дополнительные характеристики.

В качестве последних можно взять моменты $\Gamma(\rho)$ или ρ_{max} , если μ (12) не велико. А в качестве модели $\Gamma(\rho)$ – линейные функции и функции, входящие в $\Gamma(\rho)$ кольцевой апертуры при однородном поле. Тогда для аппроксимации $\epsilon(\vartheta)$ с относительной точностью 10–15% достаточно задействовать 1–2 момента $I_{1,3}$. Учёт их большего количества не улучшает точность приближения, ухудшая его по другим показателям: отсутствуют решения на параметры модели, $\epsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ приобретает «нефизические» локальные экстремумы и т.д. Характерно, что хорошее приближение $\epsilon(\vartheta)$ не требует того же от модели $\Gamma(\rho)$, которая лишь «носитель» инвариантных характеристик.

За пределами анализа осталось обоснование выбора I_n и ρ_{max} как дополнительных инвариантных характеристик апертуры и поля на ней.

Литература

1. **Борович, Б.Л.** Сильноточные излучающие разряды и газозовые лазеры с оптической накачкой / Б.Л. Борович, В.С. Зуев, В.А. Катулин, Л.Д. Михеев, Ф.А. Николаев, О.Ю. Носач, В.Б. Розанов. Итоги науки и техники, сер.: Радиотехника. – 1978. – Т. 15. – С. 300.
2. **Sizova, I.M.** Approximate scaling relationships of light diffraction by apertures with complicated shapes / I.M. Sizova // Applied Optics. – 1992. – Vol. 31, Issue 28. – P. 5930-5936.
3. **Sizova, I.M.** Similarity diffracted in the far field by apertures of complicated shape / I.M. Sizova // Journal of Soviet Laser Research. – 1992. – Vol. 13, Issue 1. – P. 25-45.
4. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970.
5. **Пятахин, М.В.** Дифракция плоской электромагнитной волны на круглой диафрагме / М.В. Пятахин, А.Ф. Сучков. – М.: Препринт ФИАН, 1985. – № 254. – 53 с.
6. **Clark, P.P.** Asymptotic approximation to the encircled energy function for arbitrary aperture shapes / P.P. Clark, J.W. Howard, E.R. Freniere // Applied Optics. – 1984. – Vol. 23, Issue 2. – P. 353-357.
7. **Willis, H.F.** A formula for expanding an integral as a series / H.F. Willis // Philosophical Magazine. – 1948. – Vol. 39. – P. 455-459.
8. **Harvey, J.E.** Diffraction effects of telescope secondary mirror spiders on various image-quality criteria / J.E. Harvey, C. Ftaclas // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, Issue 28. – P. 6337-6349.
9. **Орлов, Е.П.** Подobie статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть I. Компактные спектры / Е.П. Орлов, И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2010. – № 14. – 40 с.
10. **Орлов, Е.П.** Подobie статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть II. Некомпактные диахромные спектры / Е.П. Орлов, И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2011. – № 19. – 105 с.
11. **Сизова, И.М.** Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы / И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2014. – № 16. – 60 с.
12. **Сизова, И.М.** Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы. Ещё одна модель / И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2015. – № 2. – 32 с.
13. **Сизова, И.М.** Аппроксимация функции потока энергии в дальней зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах сложной формы / И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2015. – № 5. – 33 с.
14. **MacKinnon, R.F.** The asymptotic expansions of Hankel transforms and related integrals / R.F. MacKinnon // Mathematics of Computation. – 1972. – Vol. 26, Issue 118. – P. 515-527.
15. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: «Наука». Главная редакция физ-мат литературы, 1979. – Гл. 9.

References

- [1] Borovich BL, Zuev VS, Katulin VA, Mikheev LD, Nikolaev FA, Nosach OYu, Rozanov VB. High-current emitting discharges and optically pumped gas lasers [In Russian]. Progress in Science and Technology, Radio Engineering Series 1978; 15: 300.
- [2] Sizova IM. Approximate scaling relationships of light diffraction by apertures with complicated shapes. Appl Opt 1992; 31(28): 5930-6.

- [3] Sizova IM. Similarity diffracted in the far field by apertures of complicated shape. *J of Sov Laser Res* 1992; 13(1): 25-45.
- [4] Born M, Wolf E. *Principles of Optics*. New York: Macmillan; 1959.
- [5] Piatakhin MV, Suchkov AF. Plane electromagnetic wave diffraction by the circular diaphragm [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 1985; 254.
- [6] Clark PP, Howard JW, Freniere ER. Asymptotic approximation to the encircled energy function for arbitrary aperture shapes. *Appl Opt* 1984; 23(2): 353-7.
- [7] Willis HF. A formula for expanding an integral as a series. *Philosophical Magazine* 1948; 39: 455-9.
- [8] Harvey JE, Ftaclas C. Diffraction effects of telescope secondary mirror spiders on various image-quality criteria. *Appl Opt* 1995; 34(28): 6337-49.
- [9] Orlov EP, Sizova IM. The similarity of statistical properties of narrow-band random processes with arbitrary spectra. Part I. Compact spectra [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2010; 14.
- [10] Orlov EP, Sizova IM. The similarity of statistical properties of narrow-band random processes with arbitrary spectra. Part II. Noncompact diachronic spectra [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2011: 18.
- [11] Sizova IM. On the approximation of some integrals in the theory of light diffraction by apertures with complicated shapes [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2014: 16.
- [12] Sizova IM. On the approximation of some integrals in the theory of light diffraction by apertures with complicated shapes. One more model [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2015: 2.
- [13] Sizova IM. Approximation of encircled energy function in the far-field Fraunhofer zone under the diffraction of plane light wave on plane apertures of complicated shapes [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2015: 5.
- [14] MacKinnon RF. The asymptotic expansions of Hankel transforms and related integrals. *Mathematics of Computation* 1972; 26(118): 515-27.
- [15] Abramovitz L, Stegun IA (eds). *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards: Applied Mathematical Series-55 1964; Chap 9.

APPROXIMATION OF THE ENCIRCLED ENERGY FUNCTION FOR THE FAR-FIELD DIFFRACTION OF A PLANE LIGHT WAVE BY PLANAR COMPLEX-SHAPED APERTURES

I.M. Sizova

*P.N. Lebedev Physical Institute,
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Abstract

A method for approximating the encircled energy in a definite solid angle in the Fraunhofer region by the simulation of the optical transfer function derivative is proposed. The selection of free model parameters allow one to obtain a valid expansion of the encircled energy at the origin of the angular coordinate and at infinity, providing a good approximation in the intermediate domain.

Keywords: apertures, diffraction, diffraction theory.

Citation: Sizova IM. Approximation of the encircled energy function for the far-field diffraction of a plane light wave by planar complex-shaped apertures. *Computer Optics* 2015; 39(5): 635-43. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-5-635-43.

Сведения об авторе

Сизова Ирина Михайловна, 1954 года рождения, в 1977 году окончила физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности 0104 «Физика», в 1980 году окончила аспирантуру физического факультета МГУ, кандидат физ.-мат. наук, работает научным сотрудником в Отделении квантовой радиофизики (ОКРФ) Физического института им. Н.П. Лебедева (ФИАН) РАН, Москва. Область научных интересов: процессы в лазерных средах, дифракция, атмосферная оптика.

E-mail: sizova@sci.lebedev.ru.

Irina Mikhailovna Sizova (b. 1954) graduated from Physical department of M.V. Lomonosov MSU in 1977 and post graduate school of MSU in 1980, majoring in Radiophysics, Quantum Radiophysics. Currently she works as the scientific worker at the P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences (LPI) in Moscow. Research interests are processes in laser media, diffraction and atmospheric optics.

*Поступила в редакцию 15 июля 2015 г.
Окончательный вариант – 28 октября 2015 г.*