

## ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ФОКАЛЬНОГО ПЯТНА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ЛИНЗЫ

С.И. Харитонов<sup>1,2</sup>, С.Г. Волотовский<sup>1</sup>, С.Н. Хонина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

### Аннотация

Работа посвящена исследованию функции рассеяния точки гармонической дифракционной линзы, освещаемой немонахроматическим излучением, с использованием гибридного геометрооптического и волнового подхода.

**Ключевые слова:** геометрическая оптика, гармоническая дифракционная линза, функция рассеяния точки, хроматизм.

**Цитирование:** Харитонов, С.И. Геометрооптический расчёт фокального пятна гармонической дифракционной линзы / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 331-337. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.

### Введение

Дифракционные оптические элементы (ДОЭ) применяются для миниатюризации и облегчения оптических систем. Кроме того, они позволяют сформировать световые пучки с такими свойствами, которые невозможно получить с помощью классических элементов рефракционной оптики. Однако ДОЭ характеризуются существенной хроматической аберрацией, которая может как негативно, так и позитивно сказываться в системах формирования изображений [1–5].

Классические линзы и зеркала сложно использовать в некоторых устройствах из-за большого размера. Кроме того, формирование сложных комплексных распределений лазерных полей невозможно выполнить с помощью классических рефракционных элементов. Однако эта задача очень хорошо решается с помощью средств дифракционной оптики. ДОЭ, учитывающие волновую природу света, успешно выполняют преобразование лазерного излучения в практически произвольное амплитудно-фазовое распределение [6, 7].

Основное свойство ДОЭ – использование явления дифракции для изменения направления распространения световых лучей. Дифракционные элементы разбивают световой луч на множество лучей, каждый из которых перенаправляется под разными углами. Для разных длин волн будет разным угол дифракции, что и является причиной хроматического дисперсионного эффекта [8, 9]. Негативное влияние такого эффекта сказывается как в изображающих [1, 2, 4], так и фокусирующих [10, 11] системах, содержащих ДОЭ. Для компенсации хроматизма ДОЭ часто предлагают использовать гибридные системы, т.е. сочетание рефракционных и дифракционных элементов, обладающих противоположным хроматизмом [8, 9, 12, 13].

Некоторые ДОЭ могут сочетать в себе свойства как дифракционных, так и рефракционных линз. Примером могут служить так называемые гармонические дифракционные элементы, где дифракционные и рефракционные свойства линзы зависят от приведения фазы к различным интервалам [14–16]. Гармоническим интервалом называется приведение фазы к уровню  $2\pi N$ . Очевидно, чем больше значение  $N$ , тем

ближе свойства гармонического ДОЭ к рефракционному элементу. Однако изготовление таких элементов сталкивается с технологическими сложностями, так как в этом случае требуется глубокое травление. Поэтому желательно найти некоторый компромисс между необходимостью увеличения гармонического интервала с целью преодоления хроматизма и возможностями технологического процесса изготовления оптического элемента.

В данной работе выполнено исследование функции рассеяния точки гармонической дифракционной линзы, освещаемой немонахроматическим излучением с использованием гибридного геометрооптического и волнового подхода.

### 1. Расчёт пятна рассеяния для точки, лежащей на оптической оси

Рассмотрим непараксиальную дифракционную линзу, функция эйконала которой имеет вид

$$\Phi(r) = -\sqrt{f^2 + r^2}, \quad (1)$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $r$  – полярная координата точки на апертуре.

Пусть на эту линзу падает плоский пучок немонахроматического света с длинами волн в интервале  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ . Оценим размеры функции рассеяния точки в зависимости от длины волны.

Будем считать, что дифракционный элемент изготовлен в виде гармонической линзы [14–16] с высотой рельефа  $\lambda_0 N$  для базовой длины волны  $\lambda_0$ . Такой оптический элемент можно локально представить в виде дифракционной решётки с периодом [17]:

$$d = (\lambda_0 N) / (d\Phi(r) / dr), \quad (2)$$

где  $N$  – порядок гармоничности.

Луч, падающий параллельно оптической оси, при падении на эту дифракционную решётку отклоняется. Наклон луча  $\alpha$  к оптической оси равен

$$\alpha(\lambda) = m(\lambda/d), \quad (3)$$

где  $m$  – порядок дифракции.

Подставляя выражение (2) в (3), получаем

$$\alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \frac{d\varphi(r)}{dr}. \quad (4)$$

Пусть луч исходит из точки  $r$ , тогда в фокальной плоскости зависимость радиальной координаты прихода  $r_{m,N}$  луча от координаты входа  $r$  имеет вид (см. Приложение А):

$$r_{m,N}(\lambda) = r - \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \left( \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 \right) + \frac{f^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} f. \quad (5)$$

Теперь найдём выражение для интенсивности, исходя из закона сохранения энергии. Закон сохранения энергии по лучевым трубкам имеет вид

$$I_{m,N}(\rho) \rho(r, \lambda) d\rho = I_0(r) r dr, \quad (6)$$

где  $\rho$  – координата прихода луча.

Таким образом, интенсивность в точке прихода:

$$I_{m,N}(\rho) = I_0(r) (r/\rho(r, \lambda)) (d\rho/dr). \quad (7)$$

В интегральной форме выражение (7) можно записать следующим образом:

$$I_{m,N}(\rho, \lambda) = \int_0^R \frac{I_0(r)}{r_{m,N}(r, \lambda)} \delta(\rho - r_{m,N}(r, \lambda)) r dr. \quad (8)$$

Пусть  $P(\lambda)$  – спектральная плотность падающего света, тогда распределение энергии в пятне в дифракционном порядке с номером  $m$  выражается следующим образом

$$I_{m,N}(\rho) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^R \frac{P(\lambda) I_0(r)}{r_{m,N}(r, \lambda)} \delta(\rho - r_{m,N}(r, \lambda)) r dr d\lambda. \quad (9)$$

Для получения общего выражения для интенсивности необходимо провести суммирование по всем порядкам

$$I(\rho) = \sum_{m=-N}^N \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^R C_{m,N}(\lambda) \frac{P(\lambda) I_0(r)}{r_{m,N}(r, \lambda)} \times \delta(\rho - r_{m,N}(r, \lambda)) r dr d\lambda, \quad (10)$$

где  $C_{m,N}(\lambda)$  – доля энергии в дифракционном порядке с номером  $m$ .

В реальных расчётах выражение для функции Дирака заменяется её конечной аппроксимацией

$$\delta(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma}) \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad (11)$$

параметр  $\sigma$  выбирается в зависимости от размера детектора  $b\sigma = \Delta$ , где  $\Delta$  – размер детектора.

### 2. Расчёт пятна рассеяния для внеосевой точки

Рассмотрим изображение внеосевой точки с координатами  $(u, v)$ . В этом случае выражение для распределения интенсивности пятна рассеяния выражается формулой

$$I(x, y) = \int I_0(\xi, \eta) \delta[x - x(\xi, \eta), y - y(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (12)$$

где  $I_0(\xi, \eta)$  – интенсивность, формируемая внеосевой точкой на линзе,  $(\xi, \eta)$  – декартовы координаты на линзе,  $(x, y)$  – декартовы координаты в точке наблюдения;  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  – лучевое соответствие между точками на линзе и точками в плоскости наблюдения.

### Расчёт функции лучевого соответствия

Пусть на дифракционную линзу в точке с координатами  $(\xi, \eta)$  падает луч с направляющим вектором  $s_0$ . После прохождения ДОО направление луча будет:

$$\begin{aligned} s_x(\xi, \eta) &= s_{0x}(\xi, \eta) + \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ s_y(\xi, \eta) &= s_{0y}(\xi, \eta) + \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \\ s_z(\xi, \eta) &= \sqrt{1 - s_x^2(\xi, \eta) - s_y^2(\xi, \eta)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\varphi(\xi, \eta)$  – функция эйконала ДОО. Для непараксиальной дифракционной линзы она имеет вид

$$\varphi(\xi, \eta) = -\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + F_L^2}, \quad (14)$$

где  $F_L$  – фокусное расстояние линзы дифракционной линзы.

Координаты прихода луча в плоскость наблюдения имеют вид

$$x = \xi + s_x L, \quad y = \eta + s_y L, \quad F = s_z L, \quad (15)$$

где  $L$  – расстояние от точки выхода луча до точки прихода луча в плоскости наблюдения,  $F$  – расстояние от линзы до точки наблюдения.

Таким образом, лучевое соответствие между точками на линзе и точками в плоскости наблюдения имеет следующий вид:

$$x(\xi, \eta) = \xi + (s_x/s_z)F, \quad y(\xi, \eta) = \eta + (s_y/s_z)F. \quad (16)$$

Направление падающего луча на линзу

$$s_{0x}(\xi, \eta) = \frac{\xi - u}{\sqrt{(\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + F_0^2}}, \quad (17)$$

$$s_{0y}(\xi, \eta) = \frac{\eta - v}{\sqrt{(\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + F_0^2}},$$

где  $F_0$  – расстояние от точки с координатами  $u, v$  до линзы.

Интенсивность на входе определяется выражением

$$I_0(\xi, \eta, \lambda) = \frac{P(u, v, \lambda) F_0}{\left[ \sqrt{(\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + F_0^2} \right]^3}, \quad (18)$$

где  $P(u, v, \lambda)$  – определяет яркость точки.

В результате получаем выражение для функции рассеяния точки

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \sum_{m=-N}^N \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{-R}^R C_{m,N}(\lambda) \times \\ &\times \frac{P(u, v, \lambda) F_0}{\left[ \sqrt{(\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + F_0^2} \right]^3} \times \\ &\times \delta[x - x(\xi, \eta, \lambda), y - y(\xi, \eta, \lambda)] d\xi d\eta d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Для уменьшения вычислительной трудоёмкости сделаем замену переменных

$$\theta = (\lambda/\lambda_0)(m/N), \quad \lambda = \lambda_0 \theta(N/m). \quad (20)$$

Тогда

$$I(x, y) = \sum_{m=-N}^N \lambda_0 \left(\frac{N}{m}\right) \times \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{-R}^R \frac{C_{m,N} \left[ \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right] P \left( u, v, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) \cdot \theta \cdot F_0}{\left[ \sqrt{(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + F_0} \right]^3} \times (21)$$

$$\times \delta \left[ x - x \left( \xi, \eta, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right), y - y \left( \xi, \eta, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) \right] \times d\xi d\eta d\theta.$$

Функции лучевого соответствия:

$$x \left( \xi, \eta, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) = X(\xi, \eta, \theta) = \xi + \frac{s_x(\xi, \eta, \theta)}{s_z(\xi, \eta, \theta)} F, \quad (22)$$

$$y \left( \xi, \eta, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) = Y(\xi, \eta, \theta) = \eta + \frac{s_y(\xi, \eta, \theta)}{s_z(\xi, \eta, \theta)} F,$$

$$s_x(\xi, \eta, \theta) = s_{0x}(\xi, \eta) + \theta \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$s_y(\xi, \eta, \theta) = s_{0y}(\xi, \eta) + \theta \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad (23)$$

$$s_z(\xi, \eta, \theta) = \sqrt{1 - s_x^2(\xi, \eta, \theta) - s_y^2(\xi, \eta, \theta)}.$$

Коэффициенты дифракции на ДОО в рамках скалярной теории (см. Приложение Б):

$$C_{m,N} \left( \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) = R_{m,N}(\theta) = -SINC^2 \left[ \pi m \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) \right]. \quad (24)$$

Тогда интеграл (21) равен

$$I(x, y) = \sum_{m=-N}^N \lambda_0 \left(\frac{N}{m}\right) \times \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{-R}^R \frac{R_{m,N}(\theta) P \left( u, v, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) \cdot \theta \cdot F_0}{\left[ \sqrt{(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + F_0} \right]^3} \times (25)$$

$$\times \delta \left[ x - X(\xi, \eta, \theta), y - Y(\xi, \eta, \theta) \right] d\xi d\eta d\theta.$$

После упрощений и с учетом набора гармонических длин волн (см. Приложение Б) получаем:

$$I(x, y) = \frac{\lambda_0 F_0}{\left[ \sqrt{(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + F_0} \right]^3} \times \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} \left(\frac{N}{m}\right) \int_{-R}^R \frac{R_{m,N}(\theta) P \left( u, v, \lambda_0 \theta \left(\frac{N}{m}\right) \right) \cdot \theta \cdot F_0}{\left[ \sqrt{(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + F_0} \right]^3} \times (26)$$

$$\times \delta \left[ x - X(\xi, \eta, \theta), y - Y(\xi, \eta, \theta) \right] d\xi d\eta d\theta,$$

где  $\theta_{\min} = (\lambda_{\min}/\lambda_0)(m_{\min}/N)$ ,  $\theta_{\max} = (\lambda_{\max}/\lambda_0)(m_{\max}/N)$ .

### 3. Результаты численного моделирования

Для расчета функции рассеяния осевой и внеосевых точек гармонической непараксиальной дифракционной линзой были выбраны следующие парамет-

ры: фокусное расстояние линзы – 27 мм, диаметр линзы – 10 мм, базовая длина волны –  $\lambda_0 = 550$  нм,  $N = 10$ , расстояние от объекта до линзы – 50 м, расстояние от линзы до плоскости изображения – 27 мм.

Рассматривалось изображение линзой (14) точечных объектов на оси и под углами  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  и  $15^\circ$  для диапазона длин волн  $\lambda_{14} = 392 \text{ нм} \leq \lambda \leq \lambda_5 = 1100 \text{ нм}$ .

Также для сравнения были рассчитаны аналогичные функции рассеяния точек для параболической линзы, эйконал которой имеет вид:

$$\phi(\xi, \eta) = -(\xi^2 + \eta^2 / 2F_L^2). \quad (27)$$

На рис. 1 показаны сравнительные графики горизонтальных сечений в центральной части полихроматических (в указанном выше диапазоне длин волн) функций рассеяния точек, находящихся под разными углами к оптической оси (точечная линия соответствует сферической линзе, а сплошная линия – параболической линзе). На рис. 2–4 также показаны соответствующие изображения функций рассеяния точек, из которых видно, что для внеосевых точек наблюдается функция рассеяния в виде комы. При этом в горизонтальном направлении искажения больше, чем в вертикальном. Таким образом, оценки размера функции рассеяния точки по горизонтальному сечению являются оценками сверху.

Как видно из рис. 1, для осевой точки размер по уровню полуспада интенсивности минимальный и составляет 4 мкм (при размере дифракционного предела 1,5 мкм), а для внеосевых точек – 19 мкм (при  $5^\circ$ ), 84 мкм (при  $10^\circ$ ), 172 мкм (при  $15^\circ$ ). Это соответствует угловому разрешению  $29''$  для осевых точек,  $2,3'$  для точек под углом  $5^\circ$ ,  $10,3'$  для точек под углом  $10^\circ$  и  $20,6'$  для точек под углом  $15^\circ$  (следует отметить, что  $1'$  на расстоянии 1 км до объекта соответствует 0,3 м). Таким образом, наблюдается сложная зависимость разрешения оптической системы от угла наблюдения объекта.

На рис. 2 показаны изображения функций рассеяния осевой точки сферической линзы (первая строка) и параболической линзы (вторая строка) для выборочных длин волн и усредненной по длинам волн.

На рис. 3 и 4 показаны аналогичные изображения для внеосевой точки, расположенной под углом  $5^\circ$  и  $10^\circ$  соответственно.

Из сравнения действия сферической и параболической линз (рис. 1–4) следует, что сферическая линза имеет более гладкую функцию рассеяния точки, что приводит к меньшим хроматическим эффектам для изображений внеосевых точек.

### Заключение

В работе для исследования функции рассеяния точки гармонической дифракционной линзы при освещении немонахроматическим излучением был использован гибридный луче-волновой подход. В отличие от обычного лучевого метода в рассмотренном подходе учитывается дифракционная структура оптического элемента, но в то же время, в отличие от полностью волнового метода (интегралов Кирхгофа,

Рэлея–Зоммерфельда), рассмотренный подход требует меньших вычислительных ресурсов.

Расчёты функций рассеяния точки, расположенной под различными углами к оптической оси, показали, что в непараксиальном случае наблюдается сложная зависимость разрешения оптической системы от угла наблюдения объекта.

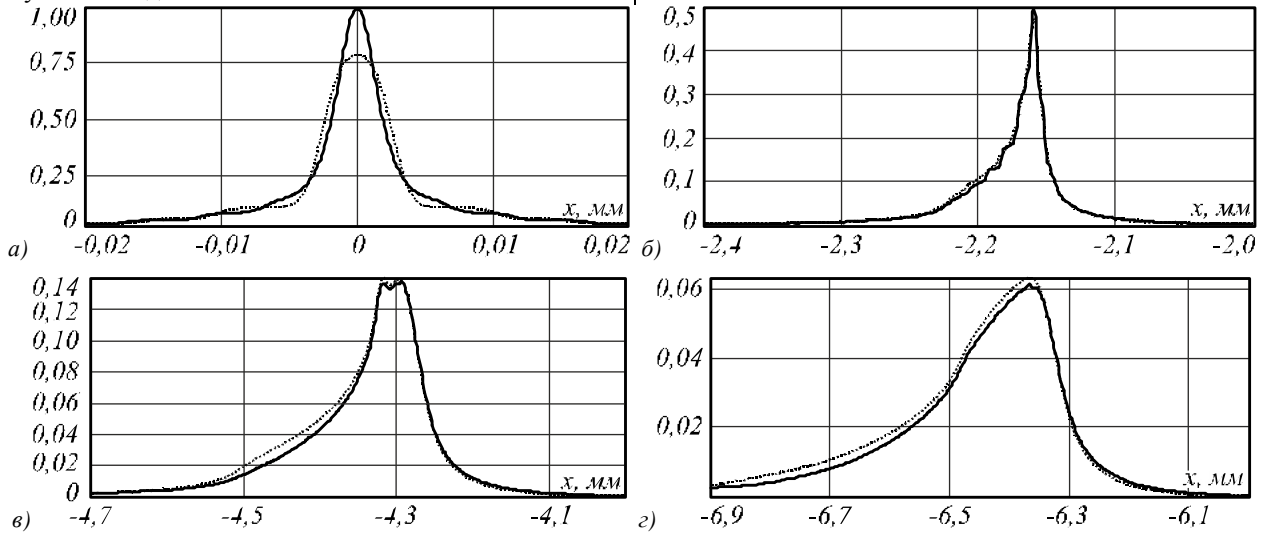


Рис. 1. Графики горизонтальных сечений в центральной части (точечная линия соответствует сферической линзе, а сплошная линия – параболической линзе), полихроматической функции рассеяния точки, находящейся к оптической оси под углом: 0°(а), 5° (б), 10° (в) и 15° (г)

Сравнение рассчитанных функций рассеяния точки в непараксиальном режиме сферической и параболической линз показало, что сферическая линза имеет более гладкую функцию рассеяния точки, что может быть полезно для алгоритмов восстановления изображений.

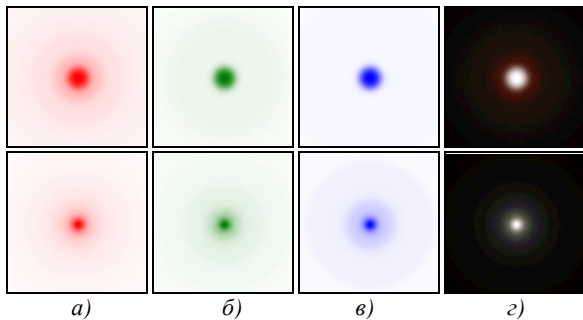


Рис. 2. Изображения (размер 37мкм×37 мкм) функций рассеяния осевой точки сферической линзы (первая строка) и параболической линзы (вторая строка) для выборочных длин волн а) 1100 нм, б) 550 нм, в) 392 нм и г) усредненной по длинам волн

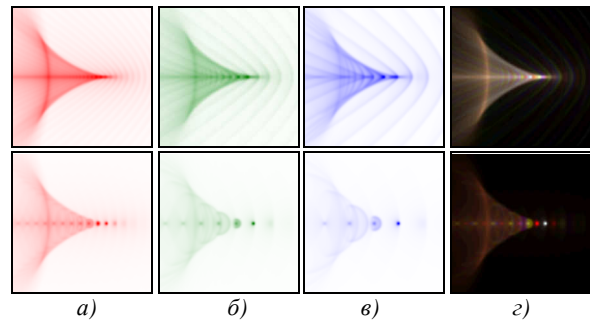


Рис. 4. Изображения (размер 275 мкм × 275 мкм) функций рассеяния внеосевой точки, расположенной под углом 10°, сферической линзы (первая строка) и параболической линзы (вторая строка) для выборочных длин волн а) 1100 нм, б) 550 нм, в) 392 нм и г) усредненной по длинам волн

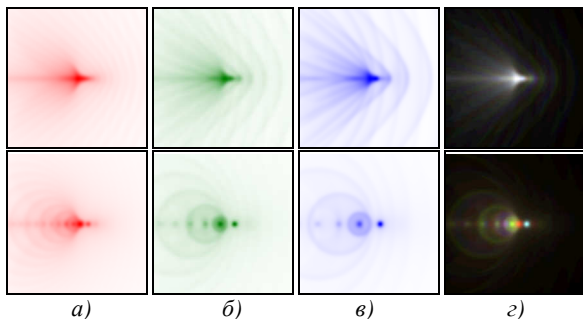


Рис. 3. Изображения (размер 125 мкм×125 мкм) функций рассеяния внеосевой точки, расположенной под углом 5°, сферической линзы (первая строка) и параболической линзы (вторая строка) для выборочных длин волн а) 1100 нм, б) 550 нм, в) 392 нм и г) усредненной по длинам волн

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант №14-31-00014).

**Литература**

1. **Бобров, С.Т.** Оптика дифракционных элементов и систем / С.Т. Бобров, Г.И. Грейсух, Ю.Г. Туркевич. – Л.: Машиностроение, 1986. – 223 с.
2. **Грейсух, Г.И.** Сравнительный анализ хроматизма дифракционных и рефракционных линз / Г.И. Грейсух, Е.Г. Ежов, С.А. Степанов // Компьютерная оптика. – 2005. – Вып. 28. – С. 60-65.
3. **Казанский, Н.Л.** Моделирование работы гиперспектрометра, основанного на схеме Оффнера, в рамках геометрической оптики / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов,

А.В. Карсаков, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 271-280.

4. **Казанский, Н.Л.** Формирование изображений дифракционной многоуровневой линзой / Н.Л. Казанский, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов, С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 425-434.
5. **Карпеев, С.В.** Исследование дифракционной решётки на выпуклой поверхности как диспергирующего элемента / С.В. Карпеев, С.Н. Хонина, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 2. – С. 211-217.
6. Дифракционная компьютерная оптика / Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соيفер, С.Н. Хонина; под ред. В.А. Соифера. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
7. Дифракционная нанофотоника / А.В. Гаврилов, Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, П.Н. Дьяченко, А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, Д.В. Нестеренко, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соифер, С.Н. Хонина, Я.О. Шуюпова; под ред. В.А. Соифера. – М.: Физматлит, 2011. – 680 с.
8. **Aieta, F.** Multiwavelength achromatic metasurfaces by dispersive phase compensation / F. Aieta, M.A. Kats, P. Genevet, F. Capasso // Science. – 2015. – Vol. 347(6228). – P. 1342-1345.
9. **Swanson, G.J.** Binary optics technology: the theory and design of multi-level diffractive optical elements / G.J. Swanson // M.I.T. Lincoln Laboratory Technical Report. – 1989. – Vol. 854. – AD-A213-404 (47 p.).
10. **Алфёров, С.В.** О возможности управления лазерной аблацией при острой фокусировке фемтосекундного излучения / С.В. Алфёров, С.В. Карпеев, С.Н. Хонина, К.Н. Тукмаков, О.Ю. Моисеев, С.А. Шуляпов, К.А. Иванов, А.Б. Савельев-Трофимов // Квантовая электроника. – 2014. – Т. 44, № 11. – С. 1061-1065.
11. **Карпеев, С.В.** Исследование влияния широкополосного излучения на распределение интенсивности, формируемое дифракционным оптическим элементом / С.В. Карпеев, С.В. Алфёров, С.Н. Хонина, С.И. Кудряшов // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 689-694.
12. **Davidson, N.** Analytic design of hybrid diffractive-refractive achromats / N. Davidson, A.A. Friesem, E. Hasman // Applied Optics. – 1993. – Vol. 32, Issue 25. – P. 4770-4774.
13. **Fang, Y.C.** Extended optimization of chromatic aberrations via a hybrid Taguchi-genetic algorithm for zoom optics with a diffractive optical element / Y.C. Fang, T.-K. Liu, C.-M. Tsai, J.-H. Chou, H.-C. Lin, W.T. Lin // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11(4). – 045706 (14pp).
14. **Sweeney, D.W.** Harmonic diffractive lenses / D.W. Sweeney, G.E. Sommargen // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, Issue 14. – P. 2469-2475.
15. **Rossi, M.** Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements / M. Rossi, R.E. Kunz, H.P. Herzig // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, Issue 26. – P. 5996-6007.
16. **Sales, T.R.M.** Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses / T.R.M. Sales, G.M. Morris // Applied Optics. – 1997. – Vol. 36, Issue 1. – P. 253-257.
17. **Харитонов, С.И.** Моделирование отражения электромагнитных волн от дифракционных решёток, нанесённых на произвольную поверхность / С.И. Харитонов, Н.Л. Казанский, Л.Л. Досколович, Ю.С. Стрелков // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 2. – С. 194-202. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-194-202.

**Приложение А. Расчёт точки прихода луча**

Пусть луч исходит из точки  $r$ , тогда в фокальной плоскости радиальная координата точки прихода луча

$$r_{m,N} = r + \alpha(\lambda)L, \tag{A1}$$

где  $L = \sqrt{(r - r_{m,N})^2 + f^2}$ . (A2)

Подставляя в (A1) вид  $\alpha(\lambda)$  из (4), взяв предварительно производную от функции эйконала (1), получим:

$$r_{m,N} = r - \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \frac{r \sqrt{(r - r_{m,N})^2 + f^2}}{\sqrt{r^2 + f^2}}. \tag{A3}$$

Производя преобразования:

$$(r - r_{m,N})^2 \frac{r^2 + f^2}{r^2} = \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 \left( (r - r_{m,N})^2 + f^2 \right), \tag{A4}$$

$$(r - r_{m,N})^2 \left( \frac{r^2 + f^2}{r^2} - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 \right) = \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 f^2, \tag{A5}$$

$$(r - r_{m,N})^2 \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 \right] + \frac{f^2}{r^2} \right\} = \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 f^2, \tag{A6}$$

окончательно получим:

$$r - r_{m,N} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) f \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{m}{N} \right) \right)^2 \right] + \frac{f^2}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{A7}$$

**Приложение Б. Расчёт коэффициентов дифракции на ДОО в рамках скалярной теории**

Высота рельефа для ДОО в общем случае выражается формулой

$$h(x) = \frac{\lambda_0 N}{n-1} H \left( \frac{\text{mod}_{2\pi N} k_0 \varphi(x)}{2\pi N} \right), \tag{B1}$$

где  $H(x)$  – функция нелинейного предьсказания, определённая на интервале  $[0, 1]$ . Значение функции лежит также в этом интервале. В простейшем случае  $H(x) = x$ .

Комплексная амплитуда поля в плоскости, прилегающей к данному ДОО, при освещении излучением с длиной волны  $\lambda$  будет иметь вид

$$\exp \left[ i \frac{\lambda_0}{\lambda} 2\pi N \cdot H \left( \frac{\text{mod}_{2\pi N} k_0 \varphi(x)}{2\pi N} \right) \right]. \tag{B2}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$G(x) = \exp \left[ i(\lambda_0/\lambda) 2\pi N \cdot H(x) \right] \tag{B3}$$

и разложим её в ряд Фурье

$$G(x) = \sum_m T_m \exp(2\pi i m x). \tag{B4}$$

Коэффициенты Фурье имеют вид

$$T_m = \int_0^1 \exp(-2\pi i m x) \exp \left[ i(\lambda_0/\lambda) 2\pi N \cdot H(x) \right] dx. \tag{B5}$$

В простейшем случае

$$T_m = \int_0^1 \exp(-2\pi i m x) \exp[i(\lambda_0/\lambda)2\pi N x] dx. \quad (\text{Б6})$$

После взятия интеграла (Б6) и преобразований:

$$\begin{aligned} T_m &= \int_0^1 \exp[2\pi i((\lambda_0 N/\lambda) - m)x] dx = \\ &= \frac{(\exp[2\pi i((\lambda_0 N/\lambda) - m)] - 1)}{2\pi i((\lambda_0 N/\lambda) - m)} = \\ &= \exp[\pi i((\lambda_0 N/\lambda) - m)] \times \\ &\times \frac{(\exp[\pi i(\frac{\lambda_0 N}{\lambda} - m)] - \exp[-\pi i(\frac{\lambda_0 N}{\lambda} - m)])}{2\pi i((\lambda_0 N/\lambda) - m)}. \end{aligned} \quad (\text{Б7})$$

В результате получаем

$$T_m = \exp\left[\pi i\left(\frac{\lambda_0 N}{\lambda} - m\right)\right] \text{SINC}\left[\pi\left(\frac{\lambda_0 N}{\lambda} - m\right)\right]. \quad (\text{Б8})$$

Обозначим

$$C_{m,N} = |T_m|^2. \quad (\text{Б9})$$

Окончательно получаем выражение для коэффициентов дифракции

$$C_{m,N}(\lambda) = \text{SINC}^2\left[\pi m((\lambda_0 N/\lambda m) - 1)\right]. \quad (\text{Б10})$$

Это выражение принимает максимальное значение при

$$\lambda_0 N = \lambda m. \quad (\text{Б11})$$

Выражение (Б11) позволяет рассчитать набор длин волн, при которых линза будет формировать изображение так же хорошо, как и для базовой длины волны.

Например, пусть  $\lambda_0 = 550$  нм,  $N = 10$ .

Рассчитаем длины волн, которые принадлежат видимому диапазону и для которых осуществляется фокусировка точно в фокальной точке. Эти «гармонические» длины волн занумерованы в соответствии с дифракционными порядками:

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= 1100 \text{ нм}, \lambda_6 = 917 \text{ нм}, \lambda_7 = 786 \text{ нм}, \lambda_8 = 687 \text{ нм}, \\ \lambda_9 &= 611 \text{ нм}, \lambda_{10} = 550 \text{ нм}, \lambda_{11} = 500 \text{ нм}, \lambda_{12} = 458 \text{ нм}, \\ \lambda_{13} &= 423 \text{ нм}, \lambda_{14} = 392 \text{ нм}, \lambda_{15} = 367 \text{ нм}. \end{aligned}$$

#### Сведения об авторах

**Харитонов Сергей Иванович**, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонova 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Волотовский Сергей Геннадьевич**, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

ГРНТИ: 29.31.15, 29.31.29.

Поступила в редакцию 25 мая 2016 г. Окончательный вариант – 22 июня 2016 г.

#### GEOMETRIC-OPTICAL CALCULATION OF THE FOCAL SPOT OF A HARMONIC DIFFRACTIVE LENS

S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, S.G. Volotovskiy<sup>1</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Image Processing Systems Institute of RAS, – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

<sup>2</sup> Samara National Research University, Samara, Russia

#### Abstract

The work is devoted to the study of the point spread function of a harmonic diffractive lens illuminated by non-monochromatic radiation using a hybrid geometrical and wave optics approach.

**Keywords:** geometric optics, harmonic diffractive lens, point spread function, chromaticism.

*Citation:* Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Geometric-optical calculation of the focal spot of a harmonic diffractive lens. *Computer Optics* 2016; 40(3): 331-7. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.

### References

- [1] Bobrov ST, Greysukh GI, Turkevich YuG. Optics of diffractive elements and systems [In Russian]. Leningrad: Mashinostroenie; 1986.
- [2] Greysukh GI, Ezhov EG, Stepanov SA. Comparative analysis of the chromatism of diffractive and refractive lenses [in Russian]. *Computer Optics* 2005; 28: 60-65.
- [3] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Karsakov AV, Khonina SN. Modeling action of a hyperspectrometer based on the Offner scheme within geometric optics. *Computer Optics* 2014; 38(2): 271-280.
- [4] Kazanskiy NL, Khonina SN, Skidanov RV, Morozov AA, Kharitonov SI, Volotovskiy SG. Formation of images using multi-level diffractive lens. *Computer Optics* 2014; 38(3): 425-434.
- [5] Karpeev SV, Khonina SN, Kharitonov SI. Study of the diffraction grating on the convex surface as a dispersive element. *Computer Optics* 2015; 39(2): 211-217.
- [6] Golovashkin DL, Kotlyar VV, Soifer VA (ed.), Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Pavelyev VS, Khonina SN, Skidanov RV. *Computer Design of Diffractive Optics*. Cambridge Inter Scien Pub Ltd & Woodhead Pub Ltd; 2012.
- [7] Gavrilov AV, Golovashkin DL, Doskolovich LL, Dyachenko PN, Khonina SN, Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Nesterenko DV, Pavelyev VS, Shuyupova YO, Skidanov RV, Soifer VA (ed.). *Diffractive Nanophotonics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor&Francis Group, CISP; 2014.
- [8] Aieta F, Kats MA, Genevet P, Capasso F. Multiwavelength achromatic metasurfaces by dispersive phase compensation. *Science* 2015; 347(6228): 1342-1345.
- [9] Swanson GJ. Binary optics technology: the theory and design of multi-level diffractive optical elements. Technical Report 1989; 854: AD-A213-404.
- [10] Alferov SV, Karpeev SV, Khonina SN, Tukmakov KN, Moiseev OYu, Shulyapov SA, Ivanov KA, Savel'ev-Trofimov AB. On the possibility of controlling laser ablation by tightly focused femtosecond radiation. *Quantum Electronics* 2014; 44(11): 1061-1065.
- [11] Karpeev SV, Alferov SV, Khonina SN, Kudryashov SI. Study of the broadband radiation intensity distribution formed by diffractive optical elements. *Computer Optics* 2014; 38(4): 689-694.
- [12] Davidson N, Friesem AA, Hasman E. Analytic design of hybrid diffractive-refractive achromats. *Applied Optics* 1993; 32(25): 4770-4774.
- [13] Fang YC, Liu T-K, Tsai C-M, Chou J-H, Lin H-C, Lin WT. Extended optimization of chromatic aberrations via a hybrid Taguchi-genetic algorithm for zoom optics with a diffractive optical element. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 2009; 11(4): 045706.
- [14] Sweeney DW, Sommargen GE. Harmonic diffractive lenses. *Applied Optics* 1995; 34(14): 2469-2475.
- [15] Rossi M, Kunz RE, Herzig HP. Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements. *Applied Optics* 1995; 34(26): 5996-6007.
- [16] Sales TRM, Morris GM. Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses. *Applied Optics* 1997; 36(1): 253-257.
- [17] Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Doskolovich LL, Strelkov YS. Modeling the reflection of the electromagnetic waves at a diffraction grating generated on a curved surface. *Computer Optics* 2016; 40(2): 194-202. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-194-202.

### Authors' information

**Sergey Ivanovich Kharitonov** (b.1961), Senior Researcher of Diffractive Optics laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from the Physics department of Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation Focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of S.I. Kharitonov's scientific papers include 87 articles, 5 patents. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Sergey Gemadjevich Volotovskiy** (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics”, works as the leading programmer in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

---

*Received May 25, 2016. The final version – June 22, 2016.*

---