

АНАЛИЗ ДАННЫХ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СПЕКТРАМИ

Е.П. Орлов, И.М. Сизова

Физический институт им. Н.П. Лебедева РАН, Москва, Россия

Аннотация

Предложен метод аналитического представления статистических характеристик узкополосных случайных Гауссовых процессов с произвольными спектрами. Метод не доказан строго, но проверен в большом количестве численных расчётов.

Ключевые слова: когерентная и статистическая оптика, Гауссов случайный процесс, подобие, аналитическое представление.

Цитирование: Орлов, Е.П. Аналитическое представление статистических характеристик случайных процессов с произвольными спектрами / Е.П. Орлов, И.М. Сизова // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 4. – С. 560-571. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-4-560-571.

Введение

Чувствительность приёмных устройств ограничена их шумами [1]. Это относится и к оптическим квантовым усилителям [2–3], спектры шумов которых отличает свойство узкополосности. Эти спектры разнообразны, и важен поиск аналитических методов расчёта статистических характеристик случайных процессов с произвольными спектрами.

В настоящей работе показано, что статистические характеристики узкополосных стационарных случайных Гауссовых процессов обладают свойством подобия, специфика которого зависит от класса, к которому принадлежит спектр. Выделены и подробно изучены два класса спектров – монохромные, не обязательно одногорбые и бесструктурные, но чья индивидуальность почти не проявляется в характеристиках, и диахромные, типичный вид которых – двугорбый, хотя сюда могут относиться и спектры другого вида. На основе подобия развит метод аналитического представления статистических характеристик процессов с диахромными спектрами через характеристики процессов с монохромными спектрами, описываемые в силу подобия безразмерными универсальными функциями. Обсуждается аппроксимация характеристик для спектров, промежуточных между монохромными и диахромными. Предложена дальнейшая классификация спектров по степени полихромности и аналитическое представление характеристик таких спектров через монохромные универсальные функции. Предложенный метод не доказан строго, но проверен в большом количестве численных расчётов.

Здесь изложены результаты препринтов [4–8] вместе с необходимыми обобщениями.

1. Исходные соотношения

Рассмотрим стационарный случайный узкополосный процесс $\xi(t)$ с Гауссовой статистикой и спектральной плотностью $G(\omega)$ [4]. В силу узкополосности ($\Delta\omega \ll \omega_0$) представим его как колебание на несущей частоте ω_0 со случайной комплексной огибающей $A(t)$

$$\xi(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} \quad (1)$$

При изучении процесса (1) необходимо исследовать такие его статистические характеристики [9], как коэффициент корреляции

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle}{\langle \xi^2(t) \rangle} = \frac{\int_0^\infty G(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega}{\int_0^\infty G(\omega)d\omega} = ; \quad (2) \\ &= r(\tau)\cos(\omega_0\tau) + v(\tau)\sin(\omega_0\tau) \end{aligned}$$

коэффициент корреляции мгновенной интенсивности $I(t) = \xi^2(t)$ (при Гауссовской статистике он равен квадрату (2)),

$$\gamma^2(\tau) = \frac{\langle \xi^2(t)\xi^2(t+\tau) \rangle - \langle \xi^2(t) \rangle^2}{\langle \xi^4(t) \rangle - \langle \xi^2(t) \rangle^2} ; \quad (3)$$

спектр флуктуаций на выходе квадратичного детектора – фурье-образ (3), состоящий из низкочастотной $\Gamma_0(\omega)$ (вблизи нуля частоты) и высокочастотной $\Gamma_{2\omega_0}(\omega)$ (вблизи $\pm 2\omega_0$) частей

$$\Gamma(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \gamma^2(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \Gamma_0(\omega) + \Gamma_{2\omega_0}(\omega) ; \quad (4)$$

корреляционную функцию флуктуаций интенсивности на выходе «идеального» интегратора»

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \tau_s) &= \frac{\langle I_{\tau_s}(t)I_{\tau_s}(t+\tau) \rangle - \langle I_{\tau_s}(t) \rangle^2}{2\langle I_{\tau_s}(t) \rangle^2} = \\ &= \tau_s^{-2} \int_0^{\tau_s} \int_0^{\tau_s} \gamma^2(t'-t''+\tau)dt'dt'' = \quad (5) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \text{sinc}^2(\omega\tau_s/2) \cdot \Gamma(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = \\ &= \tau_s^{-2} \int_0^{\tau_s} (\tau_s - t) (\gamma^2(t+\tau) + \gamma^2(t-\tau)) dt. \end{aligned}$$

Угловые скобки в (2–3, 5) означают усреднение по ансамблю реализаций $\xi(t)$ (полагаем $\langle \xi(t) \rangle = 0$), τ – временной интервал между двумя моментами времени наблюдения процесса, $\text{sinc } x = \sin x/x$, $I_{\tau_s}(t)$ – скользящее среднее $I(t)$ по промежутку времени τ_s

$$I_{\tau_s}(t) = \tau_s^{-1} \int_0^{\tau_s} \xi^2(t+t')dt' . \quad (6)$$

В силу узкополосности статистические характеристики (2–5) можно выразить [9] с помощью коэффициента корреляции огибающей $A(t)$ (1), а случайный процесс описывать не $G(\omega)$, а полученной из нее смещением на ω_0 функцией $S(\Omega) = G(\omega_0 + \Omega)$, где $\Omega = \omega - \omega_0$, – по-

ложительно определенной, локализованной вблизи $\Omega=0$, интегрируемой с квадратом функцией (т.е. имеющей конечные интегралы от нее и от ее квадрата), которую будем далее называть просто спектром процесса,

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\langle A(t)A^*(t+\tau) \rangle}{\langle |A(t)|^2 \rangle} \approx \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)d\Omega} = r(\tau) + iv(\tau). \quad (7)$$

Бесконечные пределы интегрирования оправданы в (7) узкополосностью $\xi(t)$. Тогда $S(\Omega) / \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)d\Omega$ – фурье-трансформанта $\gamma_0(\tau)$ и наоборот. Для $S(\Omega)$ нечетных $\gamma_0(\tau)$ комплексна. Но нам понадобится не $\gamma_0(\tau)$, а четная функция $|\gamma_0(\tau)| = \sqrt{r^2(\tau) + v^2(\tau)}$.

Фурье-образ $|\gamma_0(\tau)|^2$ – это $\Gamma_0(\omega)$ (4)

$$\Gamma_0(\Omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(\tau)|^2 e^{i\Omega\tau} d\tau}{4\pi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)S(\Omega + \omega)d\omega}{2\left(\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)d\Omega\right)^2}. \quad (8)$$

Функция $\Gamma_0(\Omega)$, как и $|\gamma_0(\tau)|$, четная. Высокочастотную часть (4) рассматривать не будем.

Когда $\tau_s \ll 1/\omega_0$ ($\tau_s \rightarrow 0$), то в (6) $I_{\tau_s} \approx \xi^2(t)$ и (5) переходит в коэффициент корреляции (3). С ростом τ_s при данном τ происходит быстрое (за время $\approx 1/\omega_0$) падение $\Phi(\tau, \tau_s)$ от $\gamma^2(\tau)$ до $|\gamma_0(\tau)|^2/2$ (при $\tau=0$ – от 1 до 1/2) с последующим плавным изменением в масштабе времён $\tau_s, \tau \gg 1/\omega_0$. Тогда $\Phi(\tau, \tau_s)$ (5) приближенно равна [4, 9]

$$\Phi(\tau, \tau_s) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\Omega\tau_s/2) \cdot \Gamma_0(\Omega) \exp(i\Omega\tau) d\Omega \approx 0,5\tau_s^{-2} \int_0^{\tau_s} (\tau_s - t) \left(|\gamma_0(t+\tau)|^2 + |\gamma_0(t-\tau)|^2 \right) dt. \quad (9)$$

Замена $\Gamma(\omega)$ в (5) на $\Gamma_0(\Omega)$ в (9) означает отбрасывание $\Gamma_{2\omega_0}(\omega)$ (4) в силу $\text{sinc}(\omega_0\tau_s/2) \ll 1$. А замена $\gamma(\tau)^2$ в (5) на $|\gamma_0(\tau)|^2/2$ в (9) – пренебрежение быстро осциллирующими и затухающими членами при $\tau_s, \tau \gg 1/\omega_0$. Полагая далее $\tau_s, \tau \gg 1/\omega_0$, имеем (5) в виде (9) с $\Phi(\tau, 0) \approx |\gamma_0(\tau)|^2/2$ и $\Phi(0, 0) \approx 1/2$. При $\tau=0$ (9) дает дисперсию флуктуаций (6)

$$\Phi(0, \tau_s) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\Omega\tau_s/2) \cdot \Gamma_0(\Omega) d\Omega = \tau_s^{-2} \int_0^{\tau_s} (\tau_s - t) |\gamma_0(t)|^2 dt. \quad (10)$$

Из (9–10) следует, что (9) выражается через (10)

$$\Phi(\tau, \tau_s) = \frac{1}{2\tau_s^2} \left((\tau_s + \tau)^2 \Phi(0, \tau_s + \tau) - 2\tau^2 \Phi(0, \tau) + (\tau_s - \tau)^2 \Phi(0, \tau_s - \tau) \right).$$

Функции (7,10) безразмерны $\gamma_0(0) = 1$, $\Phi(0, 0) \approx 1/2$, а (8) имеет размерность времени. С ее помощью введем время корреляции процесса (1)

$$\tau_c = 2\pi\Gamma_0(0) = \int_0^{\infty} |\gamma_0(\tau)|^2 d\tau = \pi \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\Omega) d\Omega / \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) d\Omega \right)^2, \quad (11)$$

совпадающее с одним из его определений в [9]. Нормированная на (11) функция (8) также безразмерна

$$\tilde{\Gamma}_0(\Omega) = 2\pi\Gamma_0(\Omega) / \tau_c, \tilde{\Gamma}_0(0) = 1. \quad (12)$$

Для функций (7,10,12), объектов нашего дальнейшего анализа, имеют место соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(\tau)|^2 d\tau = 2\tau_c; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0(\omega) d\omega = \pi / \tau_c; \quad (13)$$

$$\Phi(0, \tau_s) \xrightarrow{\tau_s \rightarrow \infty} \tau_c / \tau_s.$$

Первые два соотношения (13) следуют из (10–11), а асимптотику $\Phi(0, \tau_s)$ можно получить, вынеся $\Gamma_0(\Omega)$ из-под интеграла в первом равенстве (10) при $\tau_s \rightarrow \infty$ [3] или применив к этому равенству разложение функции $\text{sinc}(x)$ по методу Виллиса [10].

Из (13) видно, что (11) определяет характерные временные и частотные масштабы (7,10,12). Однако роль (11) куда более существенна, чем масштаб. Определение τ_c (11) наиболее адекватно природе рассматриваемых процессов. В численных экспериментах [4–8] было показано существование таких классов спектров $S(\Omega)$, что для пары случайных процессов со спектрами из одного класса отношение их τ_c есть коэффициент приближённого подобия одноимённых функций (7,10,12). То есть, если и аргументы (7,10,12) нормировать на (11), то полученные функции при различных $S(\Omega)$ мало отличны друг от друга и с хорошей точностью описываются универсальными функциями, аналитические представления которых можно получить (и не одним способом), рассчитав (7,10,12) для некоторых $S(\Omega)$.

Нормируем временные аргументы (7,10) на (11), вводя $\xi = \tau / \tau_c$ и $\eta = \tau / \tau_c$, а частотный аргумент в (12) и $S(\Omega)$ – на обратную величину, вводя $\chi = \Omega\tau_c$. Саму $S(\Omega)$ тоже нормируем. Тогда вместо (7,10,12) и $S(\Omega)$ получим безразмерные по обеим осям функции

$$S^{\text{sn}}(\chi) = 2S(\chi / \tau_c) / \int_{-\infty}^{\infty} S(\chi / \tau_c) d\chi; \quad (14)$$

$$|\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)| = |\gamma_0(\xi\tau_c)| = |r(\xi\tau_c) + iv(\xi\tau_c)|; \quad (15a)$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{\text{sn}}(\chi) = 2\pi\Gamma_0(\chi / \tau_c) / \tau_c; \quad (15b)$$

$$\Phi^{\text{sn}}(\eta) = \Phi(0, \eta\tau_c). \quad (15c)$$

Все функции (15) чётные. Назовем (14) собственно нормированной функцией, т.к. она получается нормировкой $S(\Omega)$ по осям на величины, вычисляемые через $S(\Omega)$. Индекс «sn» у функций (15) означает, что и они нормированы с помощью τ_c , получаемого в (11) из того же спектра $S(\Omega)$. Из (14) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi = 2, \int_{-\infty}^{\infty} (S^{\text{sn}}(\chi))^2 d\chi = 4 / \pi. \quad (16)$$

Если $S^{\text{sn}}(\chi)$ подставить в (11), то получится 1 и повторная процедура нормировки (14) с учетом (16) не изменит $S^{\text{sn}}(\chi)$. То же будет, если для $S(\Omega)$ уже выполнено (16). Т.е. (16) – необходимые и достаточные условия собственно нормированности $S(\Omega)$.

В новых переменных (7,10,12) примут вид

$$|\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)| = (1/2) \left| \int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{sn}}(\chi) e^{-i\xi\chi} d\chi \right|, \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_0^{\text{sn}}(\chi) &= (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)|^2 e^{i\chi\xi} d\xi = \\ &= (\pi/4) \int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{sn}}(x) S^{\text{sn}}(x+\chi) dx \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{sn}}(\eta) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0^{\text{sn}}(\chi) \text{sinc}^2(\eta\chi/2) d\chi \\ &= \eta^{-2} \int_0^\eta (\eta-\xi) |\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned} \quad (17c)$$

Далее изучим совпадение одноимённых характеристик (17) для моно- и диахромных спектров (14), выделенных предложенными ниже критериями.

2. Монохромные спектры

В расчётах (17) для разных $S^{\text{sn}}(\chi)$ (14): четных, нечетных, односторонних и с экстремумами – выделились спектры, названные нами монохромными. Их выделяют два критерия протяженности по оси абсцисс.

Первый ограничивает размер «ядра» спектра (14), определяемого шириной центральной его части, содержащей 50 % всей площади под кривой $S^{\text{sn}}(\chi)$ при условии равенства площадей оставшихся частей, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\chi_{\text{left}}} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi : \int_{\chi_{\text{left}}}^{\chi_{\text{right}}} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi : \int_{\chi_{\text{right}}}^{\infty} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi = 1 : 2 : 1, \quad (18)$$

$$s_{0,5} = \chi_{\text{right}} - \chi_{\text{left}} \leq \pi/2.$$

Максимальное значение (18) для $S_{0,5}$ точно равно полуширине $S^{\text{sn}}(\chi)$ прямоугольной формы. Исследования показали необходимость (18) для отнесения спектра к классу монохромных.

Второй критерий схожим образом ограничивает размер основной части спектра (14), где теперь содержится 90 % площади под кривой $S^{\text{sn}}(\chi)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\chi'_{\text{left}}} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi : \int_{\chi'_{\text{left}}}^{\chi'_{\text{right}}} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi : \int_{\chi'_{\text{right}}}^{\infty} S^{\text{sn}}(\chi) d\chi = 1 : 18 : 1, \quad (19)$$

$$s_{0,9} = \chi'_{\text{right}} - \chi'_{\text{left}} \leq \pi.$$

Критерий (19) выступает как достаточное условие монохромности спектра, и его нередко можно ослабить до $s_{0,9} \leq (1,25 \div 1,5)\pi$. В (18–19) не фигурируют особенности форм спектров.

Критерии (18–19) независимы, т.е. спектры могут удовлетворять или не удовлетворив обоим или только одному из них. Выполнение (18–19) обсуждалось в [4,7–8] для многих спектров: симметричных и несимметричных односторонних и состоящих из отдельных частей. Часть этих данных приведена в табл. 1.

Табл. 1. Выполнение критериев (18–19) для некоторых спектров $S^{\text{sn}}(\chi)$

Форма собственно нормированного спектра $S^{\text{sn}}(\chi)$ и его обозначение	$s_{0,5} / (\pi/2)$	$s_{0,9} / \pi$	
Гауссова $S_G(\chi) = (2\sqrt{2}/\pi) \cdot \exp(-2\chi^2/\pi)$	0,76	0,925	
Параболическая $S_p(\chi) = (2,5/\pi)(1 - (5\chi/3\pi)^2), \chi \leq 0,6\pi$	0,83	0,875	
Экспоненциальная симметричная $S_e(\chi) = (4/\pi) \cdot \exp(-4 \chi /\pi)$	0,69	1,15	
Пол-экспоненциальная $S_{\text{he}}(\chi) = (4/\pi) \cdot \exp(-2\chi/\pi), \chi \geq 0$ [7]	1,1	1,51	
Прямоугольная $S_r(\chi) = 2/\pi, \chi \leq \pi/2$	1	0,9	
Треугольная равнобедренная $S_t(\chi) = (3/\pi)(1 - 1,5 \chi /\pi), \chi \leq 2\pi/3$	0,78	0,91	
Прямоугольно-треугольная $S_{\text{rt}}(\chi) = (3/\pi)(1 - 3\chi/4\pi), 0 \leq \chi \leq 4\pi/3$ [7]	0,98	1	
Лоренцева симметричная $S_L(\chi) = (4/\pi)/(1 + 4\chi^2)$	0,64	2,01	
Пол-лоренцева $S_{\text{hL}}(\chi) = (4/\pi)/(1 + \chi^2), \chi \geq 0$ [7]	1,27	4,02	
Состоящая из суммы трех экспонент $S_{3e}(\chi)$ [7]	штрихпунктирная линия 1 на рис.1	0,75	1,17
	штрихпунктирная линия 2 на рис.1	0,95	0,99

Для спектров табл. 1 почти все характеристики (17) считаются аналитически, что облегчает анализ их свойств для произвольных монохромных спектров. Для симметричных $S^{\text{sn}}(\chi)$ табл.1 функции (17) даны в табл. 2, остальные приведены в [6–7]. В табл. 2 фигурируют специальные функции:

$$\text{si } x = \int_0^x \text{sinc } t dt, \quad \text{cin } x = \int_0^x [(1 - \cos t)/t] dt,$$

$$\text{erf } x = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-t^2) dt \text{ – интегральные синус, косинус и интеграл ошибок.}$$

На рис. 1 показаны семь монохромных спектров из табл. 1 (5 четных, используемых далее, и 2 несимметричных, состоящих из трех экспонент, с несколькими экстремумами). Отвечающие им одноимённые функции (17) близки друг к другу.

Степень совпадения функций (17a–c) монохромных спектров разная. Так, $|\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)|$ близки у главного

максимума при $|\xi| \leq \pi/2$, где $|\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)|^2 \geq 0,1$, «хвосты» же сильно разнятся. Несмотря на близость $|\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)|$, ненулевые четные члены их разложения в ряд Тейлора в точке $\xi=0$ не совпадают даже для четных $S^{\text{sn}}(\chi)$ табл. 1 [5]. Характеристики $\tilde{\Gamma}_0^{\text{sn}}(\chi)$ и $\Phi^{\text{sn}}(\eta)$ выражаются (17b–c) через $|\gamma_0^{\text{sn}}(\xi)|^2$. Функции $\tilde{\Gamma}_0^{\text{sn}}(\chi)$ группируются в узкую полосу. Лучшее совпадение наблюдается у функций $\Phi^{\text{sn}}(\eta)$. Для оценки часто незаметных для глаза отличий $\Phi^{\text{sn}}(\eta)$ в [6] была использована теория нечетких множеств. Отличия Φ^{sn} оказались порядка единиц процентов во всей области определения. И при этом у $\Phi^{\text{sn}}(\eta)$ из табл. 2 не совпадают как ненулевые члены разложения в ряд Тейлора при $\eta=0$, так и следующие за первым (13) члены асимптотического разложения при $\eta \rightarrow \infty$ [5].

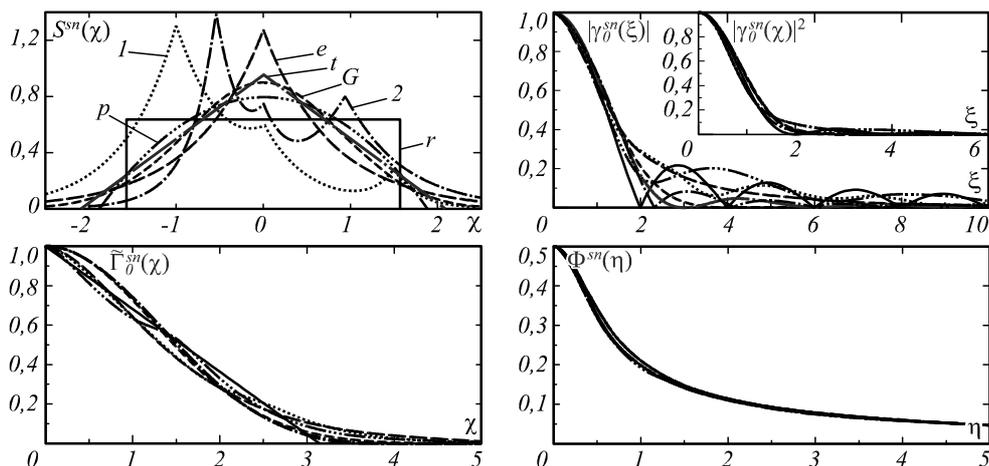


Рис. 1. Графики монохромных $S^{sn}(\chi)$ (5 четных, 2 состоящих из трех экспонент) и функций (17) для них. Соответствие вида линий спектру показано буквами, совпадающими с индексам у $S^{sn}(\chi)$ в табл. 1-2

Табл.2. Характеристики $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ и $\Phi^{sn}(\eta)$ для некоторых собственно нормированных спектров $S^{sn}(\chi)$

Спектр	$ \gamma_0^{sn}(\xi) $	$\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$	$\Phi^{sn}(\eta)$
$S_G(\chi)$	$\gamma_0^G = e^{-\xi^2\pi/8}$	$\tilde{\Gamma}_0^G = e^{-\chi^2/\pi}$	$\Phi_G = (2/\pi\eta^2) \left((\pi\eta/2) \cdot \text{erf}(\sqrt{\pi}\eta/2) + e^{-\eta^2\pi/4} - 1 \right)$
$S_e(\chi)$	$\gamma_0^e = 1/(1+(\pi\xi/4)^2)$	$\tilde{\Gamma}_0^e = (1+4 \chi /\pi)e^{-4 \chi /\pi}$	$\Phi_e = 2 \arctg(\pi\eta/4) / (\pi\eta)$
$S_p(\chi)$	$ \gamma_0^p = \frac{ \sin z - z \cos z }{z^3/3}$, $z = 3\pi \xi /5$	$\tilde{\Gamma}_0^p = (1-z)^3(1+3z+z^2)$, $z = 5 \chi /6\pi \leq 1$	$\Phi_p = \frac{6+5z^2-3,75z^4+z(z^2-6)\sin z + (z^4-2z^2-6)\cos z + z^5 \text{si}(z)}{(15z^6/36)}$, $z = 1, 2\pi\eta$
$S_t(\chi)$	$\gamma_0^t = \text{sinc}^2(\pi\xi/3)$	$\tilde{\Gamma}_0^t = \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}z^2(2-z), & 0 \leq z \leq 1 \\ (2-z)^3/4, & 1 < z \leq 2 \end{cases}$ $z = 1, 5 \chi /\pi$	$\Phi_t = \frac{(1-\cos z) \left(-1 - 2\cos z + 2\text{sinc} z + (1/4)\text{sinc}^2(z/2) \right) + z(2\text{si}(2z) - \text{si}(z)) - 3(\text{cin}(2z) - \text{cin}(z))}{(3z^2/4)}$, $z = 2\pi\eta/3$
$S_r(\chi)$	$ \gamma_0^r = \text{sinc}(\pi\xi/2) $	$\tilde{\Gamma}_0^r = (1- \chi /\pi), \chi \leq \pi$	$\Phi_r = 2(-2\sin^2(\pi\eta/2) + \pi\eta \cdot \text{si}(\pi\eta) - \text{cin}(\pi\eta)) / (\pi\eta)^2$
$S_L(\chi)$	$\gamma_0^L = e^{- \xi /2}$	$\tilde{\Gamma}_0^L = 1/(1+\chi^2)$	$\Phi_L = (\eta - 1 + e^{- \eta }) / \eta $

Совпадение $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ и $\Phi^{sn}(\eta)$, выражаемых через $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ – фурье-образ монохромных $\Phi^{sn}(\eta)$, означает, что вид (17b-c) определяется фурье-компонентами $\Phi^{sn}(\eta)$ с $|\gamma_0^{sn}(\xi)| \geq 0,3$, где фурье-образ $\Phi^{sn}(\eta)$ (17a) монотонен. Т.е. в монохромных спектрах нет разнесённых по частоте компонент, коррелирующих друг с другом и дающих заметные дополнительные максимумы в коэффициенте корреляции, почему спектры и названы монохромными. Случайные процессы с этими спектрами тоже будем называть монохромными.

Учитывая совпадение одноимённых характеристик (17a-c) случайных процессов с монохромными спектрами, приравняем их безразмерным универсальным функциям $U_\gamma(\xi)$, $U_\Gamma(\chi)$ и $U_\Phi(\eta)$, в качестве аналитического представления которых можно использовать, например, функции из табл. 2. Для $U_\gamma(\xi)$ возьмем три представления – $\gamma_0^G(\xi)$, $\gamma_0^e(\xi)$ и $\gamma_0^t(\xi)$:

$$U_\gamma(\xi) \approx e^{-\pi\xi^2/8} \approx (1+(\pi\xi/4)^2)^{-1} \approx \text{sinc}^2(\pi\xi/3). \quad (20)$$

Функция $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$, в отличие от $\gamma_0^{sn}(\xi)$, не зависит от положения нуля χ в $S^{sn}(\chi)$. Поэтому не зависят и остальные функции (17). Если у несимметричного $S^{sn}(\chi)$ взять четную часть $S_{ev}(\chi)$, то, согласно (20), $\text{Re} \gamma_0^{sn}(\xi) \approx U_\gamma(\xi/\rho)$, где ρ – параметр симметрии $S^{sn}(\chi)$, равный доле интеграла от $S_{ev}^2(\chi)$ в интеграле от $(S^{sn}(\chi))^2$ и зависящий от положения нуля χ . В [7] показано, что при любом выборе этого положения $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ близок именно $U_\gamma(\xi)$, а не $U_\gamma(\xi/\rho)$.

Как представления $U_\Gamma(\chi)$ удобно взять из табл. 2 почти совпадающие $\tilde{\Gamma}_0^G(\chi)$, $\tilde{\Gamma}_0^e(\chi)$, $\tilde{\Gamma}_0^t(\chi)$; пригодятся далее и несколько отличные от них $\tilde{\Gamma}_0^c(\chi)$ и $\tilde{\Gamma}_0^r(\chi)$:

$$U_\Gamma(\chi) \approx \tilde{\Gamma}_0^G(\chi) \approx \tilde{\Gamma}_0^e(\chi) \approx \tilde{\Gamma}_0^t(\chi) \approx \tilde{\Gamma}_0^c(\chi) \approx \tilde{\Gamma}_0^r(\chi). \quad (21)$$

Для $U_\Phi(\eta)$ подойдет любая из первых пяти почти совпадающих функций табл. 2, но из-за громоздкости формул трех последних удобно взять $\Phi_G(\eta)$, $\Phi_e(\eta)$:

$$U_\Phi(\eta) \approx \Phi_e(\eta) \approx \Phi_G(\eta). \quad (22)$$

Найденное в [5] приближение $\Phi_G(\eta)$ в виде рациональной дроби тоже подходит как $U_\Phi(\eta)$:

$$U_\Phi(\eta) \approx \frac{24(11-3\pi) + 16\pi\eta + 3\pi^2\eta^2}{48(11-3\pi) + 32\pi\eta + 22\pi\eta^2 + 3\pi^2\eta^3}. \quad (23)$$

При нарушении критериев (18–19) для одnogорбых спектров типа S_L , S_{hL} , S_{he} (табл. 1) подобие функций (17) всё же имеет место, но с меньшей точностью, и сохраняется характерный вид (17) [7]. Для спектров же из отдельных частей (двух-, трехгорбые и т.д.), содержащих более 5% площади под кривой $S^{sn}(\chi)$, это уже не так: здесь при нарушении (18–19), как показано далее, вид (17a–c) даже качественно отличен от (20–23). Для одnogорбых спектров выполнение (19) обычно влечет и (18). Но в общем случае для монохромности (19) недостаточно. К спектрам, у которых выполнено (19), а (18) нет, относятся, например, двугорбые спектры с резким спадом по краям и в центре (см. рис. 5 и примеры в [8]): они не монохромны и для них (17a–c) качественно отличны от (20–23).

Критерии (18–19) выведены из многих примеров. Возможно, можно брать в них интегралы от $(S^{sn}(\chi))^2$. В сделанных расчётах это не дало отличий в отборе спектров, для которых хороши приближения (20–23).

Если (18–19) выполнены, то (7, 10, 12) определяются лишь временем корреляции τ_c (11). И наоборот, в случае монохромных спектров τ_c – вся информация, извлекаемая о спектре из функций (7, 10, 12). Структура спектра не выявляется.

3. Диахромные спектры

Из случайных узкополосных процессов с немонохромными спектрами выделим класс процессов и отвечающих им спектров, названных нами диахромными [8]. Их можно представить как совокупность двух монохромных процессов на различных несущих частотах, что отражено наличием в спектре двух частей

$$S^{sn}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi). \quad (24)$$

Части $S_{1,2}$ в (24) полагаются неперекрывающимися.

К диахромным относятся многие процессы с двугорбыми спектрами, но не все и не только они. Для любой пары характеристик таких процессов тоже имеет место подобие с коэффициентом подобия, равным отношению τ_c (11) процессов. Значит, и здесь (17) представимы безразмерными универсальными функциями. Но в отличие от (20–22), почти не зависящих от формы спектра, теперь эти функции зависят от трех безразмерных параметров спектра: нормированного на τ_c частотного расстояния δ между $S_1(\chi)$ и $S_2(\chi)$, и параметров λ , κ , характеризующих «веса» $S_{1,2}(\chi)$ и $S_{1,2}^2(\chi)$ (см. спектры далее на рис. 4–6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) d\chi = 2\lambda; \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\chi) d\chi = 2(1-\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1^2(\chi) d\chi = \frac{4}{\pi} \kappa; \int_{-\infty}^{\infty} S_2^2(\chi) d\chi = \frac{4}{\pi} (1-\kappa), 0 \leq \kappa \leq 1. \quad (26)$$

Параметры λ и κ можно получить и из ненормированного спектра $S(\Omega)$ как доли интегралов от $S_{1,2}(\Omega)$ и $S_{1,2}^2(\Omega)$ в интегралах от $S(\Omega)$ и $S^2(\Omega)$.

Как и монохромные, диахромные спектры тоже выделены критериями. При взаимодействии с приборами процессы с такими спектрами проявляют себя как совокупность разнесённых по частоте на расстояние δ коррелирующих друг с другом двух монохромных процессов. Их вклад определяется λ и κ .

Между параметрами λ , κ , τ_c (11) процесса со спектром $S(\Omega)$ и $\tau_{c1,2}$ (11) процессов со спектрами $S_{1,2}(\Omega)$, соответственно, имеется связь

$$\begin{aligned} \tau_{c1} &= (\kappa/\lambda^2)\tau_c; \tau_{c2} = ((1-\kappa)/(1-\lambda^2))\tau_c; \\ \tau_c &= \lambda^2\tau_{c1} + (1-\lambda)^2\tau_{c2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует представление $S_{1,2}(\chi)$ и всего $S^{sn}(\chi)$ в (24) через собственно-нормированные формы $S_{1,2}^{sn}(\chi_{1,2} = \Omega\tau_{c1,2})$ (14) частей $S_{1,2}(\chi)$ спектра (24):

$$S^{sn}(\chi) = \frac{\kappa}{\lambda} S_1^{sn}\left(\frac{\kappa}{\lambda^2}\chi\right) + \frac{1-\kappa}{1-\lambda} S_2^{sn}\left(\frac{1-\kappa}{(1-\lambda)^2}\chi\right). \quad (28)$$

Чтобы процесс был диахромным необходимо, чтобы в (28) его собственно нормированные части $S_{1,2}^{sn}(\chi_{1,2})$ были монохромны, т.е. удовлетворяли (18–19) по переменным $\chi_{1,2}$, а $S_{1,2}(\chi)$ в (24) – соразмерны, что сводится к ограничениям на λ и κ [6, 8]

$$\lambda^2/\kappa < 1; (1-\lambda)^2/(1-\kappa) < 1 \Rightarrow \lambda^2 < \kappa < 2\lambda - \lambda^2. \quad (29)$$

Условие (29) взято по максимуму из полученных в расчетах ограничений для разных видов $S_{1,2}$. Поэтому оно достаточно, но не всегда необходимо: и вне (29) часто выполняются выведенные далее соотношения. Для $S_{1,2}(\chi)$ в (24) (29) обеспечивает выполнение (18–19) еще и по координате χ . На δ (его смысл обсуждается ниже) накладывается ограничение

$$\delta \geq (0,5-1)\pi\sigma \quad (30)$$

из условия отсутствия пересечения в спектрах $S_{1,2}(\chi)$ прямоугольной и треугольной форм [8]. Здесь

$$\sigma = \lambda^2/\kappa + (1-\lambda)^2/(1-\kappa) = \tau_c(1/\tau_{c1} + 1/\tau_{c2}) \geq 1. \quad (31)$$

Область λ и κ (29) показана на рис. 2.

Зеркальная перестановка $S_{1,2}(\chi)$ меняет λ , κ на $1-\lambda$, $1-\kappa$, но не меняет функций (17). Далее почти везде $\lambda \geq 1/2$.

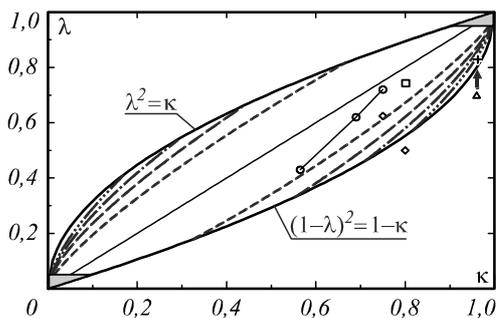


Рис. 2. Область диахромности (29). Внутри нее $1 \leq \sigma \leq 2$. Вдоль диагонали $\lambda = \kappa$ (тонкая сплошная линия) $\sigma = 1$. На штриховых линиях $\lambda = \kappa \pm \sqrt{\kappa(1-\kappa)(\sigma_0 - 1)}$ значение $\sigma = \sigma_0$, а между ними $\sigma < \sigma_0$. По возрастанию длины штрихов $\sigma_0 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4$. Затемненные куски в углах $\{0, 0\}$ и $\{1, 1\}$, где $\lambda < 0,05$ и $1-\lambda < 0,05$, при любых δ согласно (19) отвечают монохромному спектру. Их надо исключить из области диахромности. Точки разного вида соответствуют спектрам на следующих рисунках

Подставив (28) в (17а), получим для $|\gamma_0^{sn}(\xi)|^2$ [8]

$$|\gamma_0^{sn}|^2 = \lambda^2 \left| \gamma_{01}^{sn} \left(\frac{\lambda^2 \xi}{\kappa} \right) \right|^2 + (1-\lambda)^2 \left| \gamma_{02}^{sn} \left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{1-\kappa} \right) \right|^2 + 2\lambda(1-\lambda) \tilde{\gamma}_{01}^{sn} \left(\frac{\lambda^2 \xi}{\kappa \rho_1} \right) \tilde{\gamma}_{02}^{sn} \left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{(1-\kappa) \rho_2} \right) \cos(\delta \xi) + \Sigma(\xi)$$

где δ – расстояние между произвольными (пока) центрами $S_{1,2}(\chi)$; $|\gamma_{0i}^{sn}|$, $\tilde{\gamma}_{0i}^{sn}$ – функции (17а) для спектров $S_i^{sn}(\chi_i)$ и их четных частей при отсчете χ от упомянутых центров ($\tilde{\gamma}_{0i}^{sn}$ действительны; ρ_i – параметры симметрии $S_i^{sn}(\chi_i)$). Выраженная через мнимые и действительные части (17а) функция

$$\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi) \approx \frac{\kappa \cdot U_\Gamma(\kappa \chi / \lambda^2) + (1-\kappa) \cdot U_\Gamma((1-\kappa)\chi / (1-\lambda)^2) + 2\lambda(1-\lambda) [U_\Gamma(2(\chi-\delta)/\sigma) + U_\Gamma(2(\chi+\delta)/\sigma)] / \sigma}{1 + 4\lambda(1-\lambda) \cdot U_\Gamma(2\delta/\sigma) / \sigma} \quad (34)$$

Знаменатель (34) нужен, чтобы $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(0) = 1$. Если $U_\Gamma = \Gamma_0^r$, то $U_\Gamma(\chi \geq 2\delta/\sigma) = 0$ и при $\chi = 0$ в (34) квадратная скобка равна нулю, а знаменатель – единице. Для других представлений (21) $U_\Gamma(2\delta/\sigma) \neq 0$, и в знаменатель (34) надо ввести второе слагаемое.

$$\Phi^{sn}(\eta) \approx \lambda^2 U_\Phi(\lambda^2 \eta / \kappa) + (1-\lambda)^2 U_\Phi((1-\lambda)^2 \eta / (1-\kappa)) + \lambda(1-\lambda) \left\{ (1 + 2\delta / (\pi\sigma))^2 U_\Phi(\eta(\sigma/2 + \delta/\pi)) + (1 - 2\delta / (\pi\sigma))^2 U_\Phi(\eta(\sigma/2 - \delta/\pi)) - 2(2\delta / \pi\sigma)^2 U_\Phi(\delta\eta/\pi) \right\} \quad (35)$$

удовлетворяющее начальному условию $\Phi^{sn}(0) = 1/2$.

Формулы (33–35) и есть аналитические представления универсальных функций (17) диахромных случайных процессов. Они получены не для конкретного спектра, а из подобия характеристик монохромных процессов и использования разных представлений описывающих их универсальных функций. Так, (33) получен из (17а) в предположении симметричности и монохромности $S_{1,2}(\chi)$; (34) – из (17b, 33) при подста-

$\Sigma = 2v_1(\xi)v_2(\xi)\cos(\delta\xi) + 2[r_1(\xi)v_2(\xi) - v_1(\xi)r_2(\xi)]\sin(\delta\xi)$ и $\tilde{\gamma}_{0i}^{sn}$, ρ_i зависят от выбора центров $S_{1,2}(\chi)$ и δ .

Если $S_{1,2}(\chi)$ симметричны (пусть различны по величине и форме) и δ – расстояние между их центрами, то $\Sigma(\xi) = 0$ и $\rho_{1,2} = 1$. При предложенном далее выборе δ для любых $S_{1,2}(\chi)$ параметры $\rho_{1,2}$ близки своим максимумам (когда, по-видимому, $\rho_i \geq 0,8$) [7]. Положив в (32) $\Sigma(\xi) = 0$, $\rho_{1,2} = 1$ и для монохромных $S_{1,2}^{sn}(\chi_{1,2})$ заменив $|\gamma_{0i}^{sn}|$ и $\tilde{\gamma}_{0i}^{sn}$ на U_γ (20), получим

$$|\gamma_0^{sn}(\xi)|^2 \approx \lambda^2 U_\gamma^2 \left(\frac{\lambda^2 \xi}{\kappa} \right) + (1-\lambda)^2 U_\gamma^2 \left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{1-\kappa} \right) + 2\lambda(1-\lambda) U_\gamma \left(\frac{\lambda^2 \xi}{\kappa} \right) \cdot U_\gamma \left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{1-\kappa} \right) \cos(\delta \xi) \quad (33)$$

выраженное через универсальные функции процессов с монохромными спектрами и удовлетворяющее граничному условию $|\gamma_0^{sn}(0)| = 1$. Приближение (33) – искомое аналитическое представление $|\gamma_0^{sn}(\xi)|^2$ и подходит для всех рассмотренных диахромных спектров.

Для вывода аналитического представления $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ подставим в (17b) $|\gamma_0^{sn}(\xi)|^2$ в виде (33), используя разные U_γ (20). Два первых слагаемых $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ при любых S_i^{sn} точно равны их $\tilde{\Gamma}_{0i}^{sn}$. Для монохромных S_i^{sn} заменим их на U_Γ (21). Третье слагаемое в $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ выражается через (21), если в третьем слагаемом (33) $U_\gamma \approx \gamma_0^c \approx \gamma_0^e$. Так, при $U_\gamma = \gamma_0^e$, как показано в [8],

Получим $\Phi^{sn}(\eta)$, подставив (34) в (17c). Два первых слагаемых (34) интегрируются точно при любых $S_{1,2}$. А третье выразится через $U_\Phi = \Phi_\Gamma$ при $U_\Gamma = \Gamma_0^r$ и единице в знаменателе. Полагая все U_Φ (22-23) равными, для $\Phi^{sn}(\eta)$ диахромных процессов имеем

новке в (33) $U_\gamma = \gamma_0^e$; (35) – из (17c, 34) при подстановке в (34) $U_\Gamma = \tilde{\Gamma}_0^r$. Функции (33–35) четные.

В [6, 8] показано, что δ в (33–35) есть расстояние между точками деления интегралов от $S_{1,2}(\chi)$ пополам (для симметричных $S_{1,2}$ – между их центрами):

$$\delta = \chi_c^{(2)} - \chi_c^{(1)} : \int_{-\infty}^{\chi_c^{(1)}} S_1(\chi) d\chi = \int_{\chi_c^{(1)}}^0 S_1(\chi) d\chi; \int_0^{\chi_c^{(2)}} S_2(\chi) d\chi = \int_{\chi_c^{(2)}}^{\infty} S_2(\chi) d\chi, \quad (36)$$

где $\chi=0$ – точка деления спектра (24) на $S_{1,2}(\chi)$. В [8] для $S_{1,2}(\chi)$ треугольной и экспоненциальной неравнобедренных форм и некоторых других диахромных спектров вместо (36) опробовался еще один параметр, определяемый аналогично (36), но с $S_{1,2}^2(\chi)$ под интегралами. При δ из (36) совпадение точных функций (17) с (33–35) оказалось чуть лучше. Поэтому далее будем полагать выбор δ согласно (36).

Погрешности приближений (33–35) для функций (17) диахромных спектров обусловлены подстановками $\Sigma(\xi)=0, \rho_{1,2}=1$ при переходе от (32) к (33) для несимметричных $S_{1,2}(\chi)$ и малыми отличиями разных представлений (20–23) для U_γ, U_Γ и U_Φ , меняемых при выводе (33–35).

Отличия представлений (20–23) влияют и на сами функции (33–35). Расчеты показали, что в пограничных по критериям (29–30) областях λ, κ, δ это влияние может быть заметным, но для диахромных спектров малое. В расчетах в основном для простоты в (33–35) брались $U_{\gamma,\Gamma,\Phi}$ для $S_e(\chi)$ табл. 1, хотя это не лучший выбор, поскольку есть принципиальные ограничения на $U_{\gamma,\Gamma,\Phi}$ в (33–35), т.к. (33–35) должны отвечать равенствам (13), переходящим для (17a–c) в

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0^{sn}(\xi)|^2 d\xi = 2; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi) d\chi = \pi; \Phi^{sn}(\eta) \rightarrow \frac{1}{\eta} \quad (37)$$

Из первого равенства и (33) следует условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_\gamma(\lambda^2 \xi / \kappa) U_\gamma((1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa)) \cos(\delta \xi) d\xi = 0, \quad (38)$$

не выполнимое, например, для $U_\gamma = \gamma_0^G$ и $U_\gamma = \gamma_0^e$. Из монохромных спектров табл. 1 (38) выполнимо для $U_\gamma = \gamma_0^r, \gamma_0^i, \gamma_0^p$ при $\delta \geq \pi\sigma; 2\pi\sigma/3; 3\pi\sigma/5$, соответственно [11–12], что совпадает с требованием отсутствия перекрытия $S_{1,2}(\chi)$ соответствующего вида. Из рис. 1 и табл. 2, следует, что, пожалуй, лучшая функция из этих трех $U_\gamma = \gamma_0^i(\xi)$. Ее выбор в (33) требует $\delta \geq 0,67\pi\sigma$, что выше нижней границы критерия (30).

Второе равенство в (37) требует равенства единице знаменателя (34) ($U_\Gamma(2\delta/\sigma)=0$), т.к. интеграл от числителя равен π при любом U_Γ . Из табл. 2 видно, что и тут подходят $U_\Gamma = \tilde{\Gamma}_0^r; \tilde{\Gamma}_0^i; \tilde{\Gamma}_0^p$ при тех же ограничениях на δ . Третье равенство в (37) требует для (35) ограничения $\delta \geq \pi\sigma/2$.

В функциях (33–35) асимметрия $S_{1,2}(\chi)$ не учтена, а влияние ее на точность аппроксимации (17) для диахромных спектров больше, чем для монохромных. В начале координат в (33–35) роль асимметрии $S_{1,2}$ мала, как и у монохромных спектров, т.к. в первых двух слагаемых в (33–35) сделана лишь замена (17a–c) на (20–23) для монохромных $S_{1,2}^{sn}$. Асимметрия влияет (и заметно) на вторичные экстремумы $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$: их появление обязано перекрестным интегралам S_1 с S_2 и отражено в третьих слагаемых (33–34),

где вклад асимметрии $S_{1,2}$ обусловлен и ею самой (параметрами $\rho_{1,2}$), и взаимной ориентацией $S_{1,2}$. При выборе центров $S_{1,2}$ по правилу (36) поправка на $\rho_{1,2} < 1$ невелика и в принципе учитываема. А ориентация $S_{1,2}$ в (33–34) никак не учтена, т.к. отражение S_1 или S_2 относительно вертикальных осей через их центры не меняет $\lambda, \kappa, \delta, \rho_i$. Точные же $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ при этом могут меняться [4]. На $\Phi^{sn}(\eta)$ ориентация $S_{1,2}$ влияет мало, и (35) хорошо аппроксимирует (17c).

На рис. 3 показано отличие функций (33–35) от (20–22) при двух наборах λ, κ, δ , отвечающих критериям (29–30). Видно, что теперь максимум $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ при $\xi=0$ уже, чем у монохромных спектров, и есть минимум и второй максимум в области $|\gamma_0^{sn}(\xi)| > 0,3$; λ, κ определяют их размеры, δ – положение по оси абсцисс: $\xi_{\min} \approx \pi/\delta; \xi_{\max} \approx 2\pi/\delta$. У $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ первый максимум тоже сужается и при $\chi_{\max} \approx \delta$ появляется второй. Т.е. для диахромных спектров фурье-образ $S^{sn}(\chi)$ уже не монотонен в области $|\gamma_0^{sn}(\xi)| > 0,3$, что означает, что случайный процесс здесь состоит из двух разнесённых по частоте процессов, при определённых значениях τ коррелирующих друг с другом.

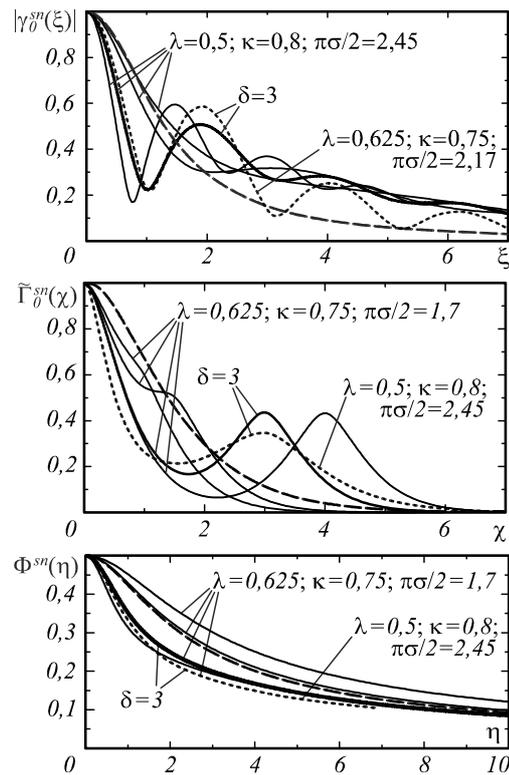


Рис. 3. Отличие функций (33–35) от (20–22) для двух наборов λ, κ (ромбики на рис. 2). Сплошные линии – (33–35) для одного из наборов при $\delta=1; 1,5; 3; 4$ (с ростом δ кривые вблизи начала координат смещаются справа налево, более толстая линия – $\delta=3$); пунктирные линии – (33–35) при $\delta=3$ для другого набора λ, κ . Штриховые линии – функции (20–22) монохромного спектра $S_e(\chi)$

В [6, 8] для симметричных и несимметричных двугорбых спектров с симметричными и несимметричными частями (прямоугольной, треугольной, Гауссовой, несимметричной экспоненциальной и др. форм), для спектров, состоящих из трех частей, и одnogорбых немонахромных спектров численно было показано, что (33–35) действительно хорошо аппроксимируют (17) диахромных процессов, т.е. являются аналитическими представлениями описывающих их универсальных функций в переменных ξ, χ, η с параметрами λ, κ, δ . Характерный вид функций (33, 34) показан на рис. 4 для двух процессов со спектрами в виде двух неравновбедренных треугольников.

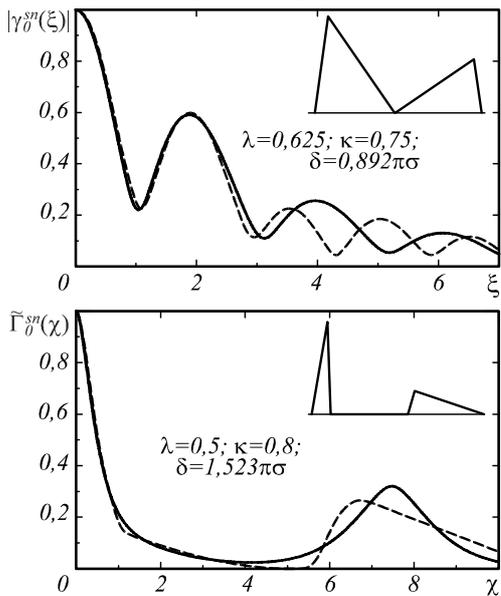


Рис. 4. Сравнение для спектров из двух неравновбедренных треугольников точных $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ (штриховые линии) с (33–34) (сплошные линии)

Важный вопрос – аппроксимация функций (17) для промежуточных спектров между моно- и диахромными. Есть два варианта перехода диахромного спектра в монохромный: сближение $S_{1,2}(\chi)$ (уменьшение δ) до выполнения критериев монохромности (18–19) и уменьшение веса одной из $S_{1,2}(\lambda, \kappa \ll 1$ или $1 - \lambda, 1 - \kappa \ll 1$). Рассмотрим оба варианта.

При $\delta < \pi/2$ применять (33–35) нельзя, а на границе $\delta \approx (\pi/2 + \pi)\sigma$ надо брать или (33–35), или (20–22), не переходящие друг в друга при формально допустимом $\delta < \pi/2$, но близкие в этой области. В [8] проанализировано много промежуточных спектров – диахромных, почти монохромных, удовлетворяющих (18–19) или только одному из критериев. Для них точные (17a–c) близки и одноимённым функциями (20–22) монохромных спектров, и (33–35) диахромных спектров. При этом почти совпадают (22) и (35) для $\Phi_{sn}(\eta)$, расхождение же (20–21) и (33–34) для $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$ заметнее. Обычно (33–34) здесь лучше, что показывает рис. 5, хотя точность обоих приближений ((33–34) и (20–21)) обычно хуже, чем (20–21) при выполнении (18–19) и (33–34) при $\delta > \pi\sigma$.

В [6] для симметричных ($\lambda = \kappa = 0,5$) спектров с $S_{1,2}$ прямоугольной, симметричной и асимметричной Гауссовой и экспоненциальной форм получены точные выражения для (17), зависящие от расстояния s между максимумами $S_{1,2}$. При больших s они совпадают с (33–35), если s выразить через δ (36), а при $s \rightarrow 0$ переходят в (20–22). При этом δ уменьшается до $\delta \approx \pi/2$, сохраняя это значение вплоть до $s = 0$.

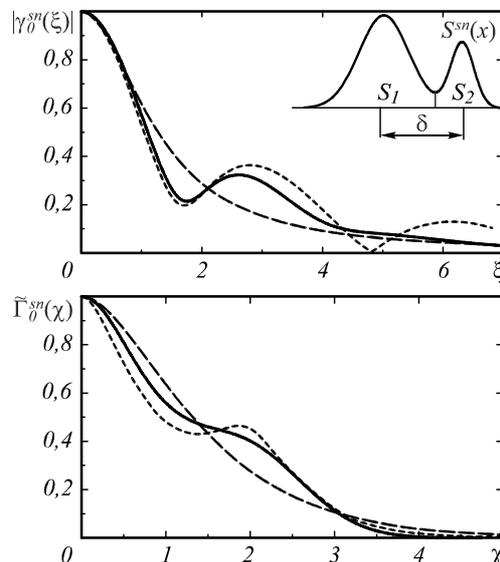


Рис. 5. Функции (17a–б) для почти диахромного спектра из двух симметричных гауссоид (квадратик на рис. 2), близкого по критериям (18–19) классу монохромных спектров: $s_{0,5} = 1,08(\pi/2)$; $s_{0,9} = \pi$; $\lambda = 0,743$; $\kappa = 0,8$; $\delta = 0,61\pi\sigma$. Сплошные линии – точные функции. Штриховые с длинными штрихами – (20–21); с короткими штрихами – (33–34). Функции (22, 35) и точные $\Phi^{sn}(\eta)$ не приведены, т.к. почти сливаются

Переход спектра от диа- к монохромному, когда одна часть спектра много меньше другой, тоже исследован в [8]. Если $S_2(\chi) = \beta S_1(\pm(\chi - \delta))$ ($\beta \ll 1$), т.е. формы $S_{1,2}$ одинаковы, то из (33–35) следует (20–22). Для произвольных спектров это получается численно. На рис. 2 области этого перехода затемнены.

Набор λ, κ, δ может отвечать разным спектрам. Двугорбые спектры $S^{sn}(\chi)$ (14) при равных λ, κ, δ близко локализованы по χ , а горбы близки по размерам, т.е. λ, κ, δ отражают основные черты таких спектров [6, 8]. На рис. 6 показан пример разных по структуре диахромных S^{sn} с равными λ, κ, δ : два двугорбых (горбы прямоугольной и треугольной неравновбедренной форм) и одnogорбый, полученный из спектра поллоренцевой формы S_{hL} (табл. 1) отрезанием «хвоста» с площадью 15% от площади под кривой S_{hL} . Оставшаяся часть S_{hL} нормирована по (14) и разделена на $S_{1,2}$ в $\chi_0 = 2,71$ (70% и 15% площади под кривой S_{hL} – максимальные монохромные куски S_{hL}). Центры $S_{1,2}$ спектров совмещены в точках 0,84 и 3,73 соответственно. Аппроксимация (17) всего спектра S_{hL} обсуждается дальше (рис. 8).

Любой спектр можно по-разному разбить на две части; и λ, κ, δ зависят от этого деления.

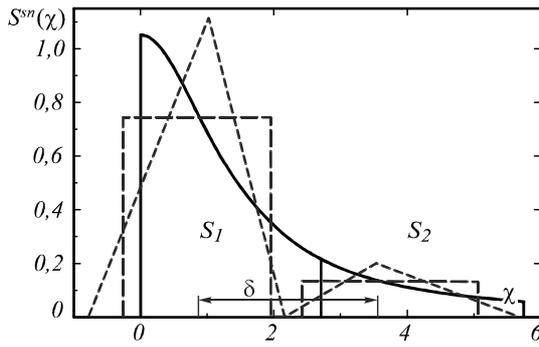


Рис. 6. Три диахромных спектра с $\lambda = 0,823$, $\kappa = 0,963$ и $\delta = 0,6\pi\sigma$ – крестик на рис. 2 (указан стрелкой). Сплошная кривая – обрезанный $S_{hl}(\chi)$ из табл. 1 (не монохромный: $s_{0,5} = 1,07(\pi/2)$; $s_{0,9} = 1,38\pi$). Штриховые линии – спектры из двух частей разных форм

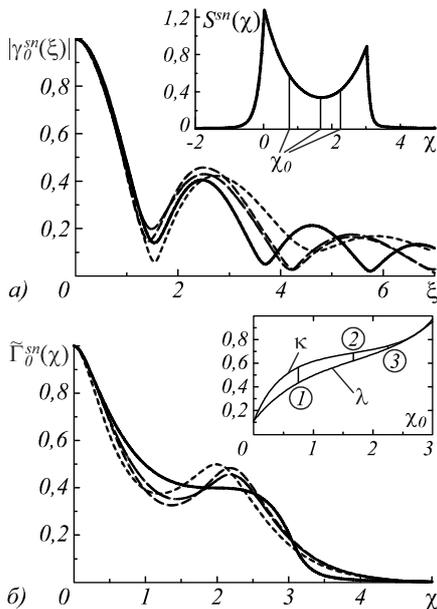


Рис. 7. Точные функции (17а, б) спектра (сплошные линии) и функции (33–34) для трех разбиений спектра (кружки на рис. 2, соединенные прямыми), отвечающих условиям (29–30): $\chi_0 = s/4 \Rightarrow \{\lambda, \kappa, \delta\} = \{0,43; 0,565; 0,6\pi\sigma\}$; $\chi_0 = \chi_{min} = 1,67 \approx s/2 \Rightarrow \{0,62; 0,69; 0,69\pi\sigma\}$; $\chi_0 = 3s/4 \Rightarrow \{0,72; 0,75; 0,71\pi\sigma\}$, где $s = 3$ – расстояние между максимумами спектра (штриховые линии; длина штрихов возрастает с увеличением χ_0). Вверху справа – зависимости λ и κ от χ_0 в диапазоне от левого максимума спектра до правого

А точные функции (17) не зависят. Поскольку вид (33–35) определяется λ , κ , δ (рис. 3) и для диахромных спектров с одинаковыми λ , κ , δ имеет место подобие одноимённых функций (17), то во множестве λ , κ , δ должны быть подмножества, для которых (33–35) как функции, соответственно, ξ , χ , η почти инвариантны.

Эта ситуация исследована в [8] при разных диахромных спектрах и показана на рис. 7 на примере различного разбиения спектра – суммы двух спектров асимметричной экспоненциальной формы. Для трех точек разбиения λ и κ удовлетворяют критерию диахромности (29), а δ лежит в пограничной области

(30). Для них (слева направо) λ возрастает в 1,67 раз ($1 - \lambda$ падает в 2,05 раз), κ – в 1,33 раза ($1 - \kappa$ падает в 1,71 раза). А $\delta/\pi\sigma$ возрастает в 1,47 раз (δ – в 1,11 раз). Пример рис. 7 показывает, что если λ , κ , δ удовлетворяют (29–30), то (33–35) почти инвариантны к их изменению при смещении точки разбиения спектра в интервале, где диахромность сохраняется.

Нарушение критериев (29–30) увеличивает и расхождение функций (33–35) с (17) и зависимость (33–35) от выбора $S_{1,2}$. Все же и тогда (33–35) применимы как оценочные функции, отражающие основные черты точных функций (17). Нередко (33–35) хорошо аппроксимируют (17) и для недиахромных спектров.

Вероятно, получить универсальные функции характеристик (17) процессов с диахромными спектрами можно и иначе, полагая разбиение $S^{sn}(\chi)$ на $S_{1,2}$ с перекрытием, допуская $\delta \rightarrow 0$ и плавный переход к универсальным функциям монохромных спектров.

4. О возможности обобщения на случай более сложных спектров

Можно ли обобщить предлагаемый метод аналитического представления характеристик (17) случайных процессов на случай процессов с произвольными спектрами? Способ построения (17) диахромных процессов через функции монохромных легко обобщается на «полихромные»: можно так же строить универсальные функции для (17) с три- и более «хромными» спектрами, разбивая спектр на 3 и более неперекрывающиеся монохромные части S_i . Эта возможность основана на том, что (17) сводятся к расчету интегралов от всех пар сочетаний частей спектра, самих с собой и перекрестных (для $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ пары возникают из-за модуля комплексной функции). Такие приближения характеристик (17) процесса с n -хромным спектром будут иметь вид

$$|\gamma_0^{sn}(\xi)|^2 \approx \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j U_\gamma \left(\frac{\lambda_i^2 \xi}{\kappa_i} \right) U_\gamma \left(\frac{\lambda_j^2 \xi}{\kappa_j} \right) \cos(\delta_{ij} \xi), \quad (39)$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi) \approx \frac{\sum_{i,j=1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j}{\sigma_{ij}} \left[U_\Gamma \left(\frac{\chi + \delta_{ij}}{\sigma_{ij}/2} \right) + U_\Gamma \left(\frac{\chi - \delta_{ij}}{\sigma_{ij}/2} \right) \right]}{2 \sum_{i,j=1}^n (\lambda_i \lambda_j / \sigma_{ij}) U_\Gamma(2|\delta_{ij}|/\sigma_{ij})}, \quad (40)$$

$$\Phi^{sn}(\eta) \approx \sum_{i,j=1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\pi \sigma_{ij})^2} \left[z_{ij}^2 U_\Phi(\eta z_{ij}/2\pi) - (-2\delta_{ij})^2 U_\Phi(\eta \delta_{ij}/\pi) \right], \quad (41)$$

где λ_i и κ_i – «веса» интегралов от $S_i(\chi)$ и $S_i^2(\chi)$: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ и $\sum_{i=1}^n \kappa_i = 1$; $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$ – разность координат центров $S_i(\chi)$ и $S_j(\chi)$ ($\delta_{ii} = 0$); $\sigma_{ij} = \lambda_i^2 / \kappa_i + \lambda_j^2 / \kappa_j$; $z_{ij} = \pi \sigma_{ij} + 2\delta_{ij}$. Функции (39–41) при $n = 2$ совпадают с (33–35), а при $n = 1$ – с (20–22). Как и в (33–35), выбор λ_i , κ_i и $S_i(\chi)$ в (39–41) неоднозначен и часто могут быть приемлемы описания с разными n .

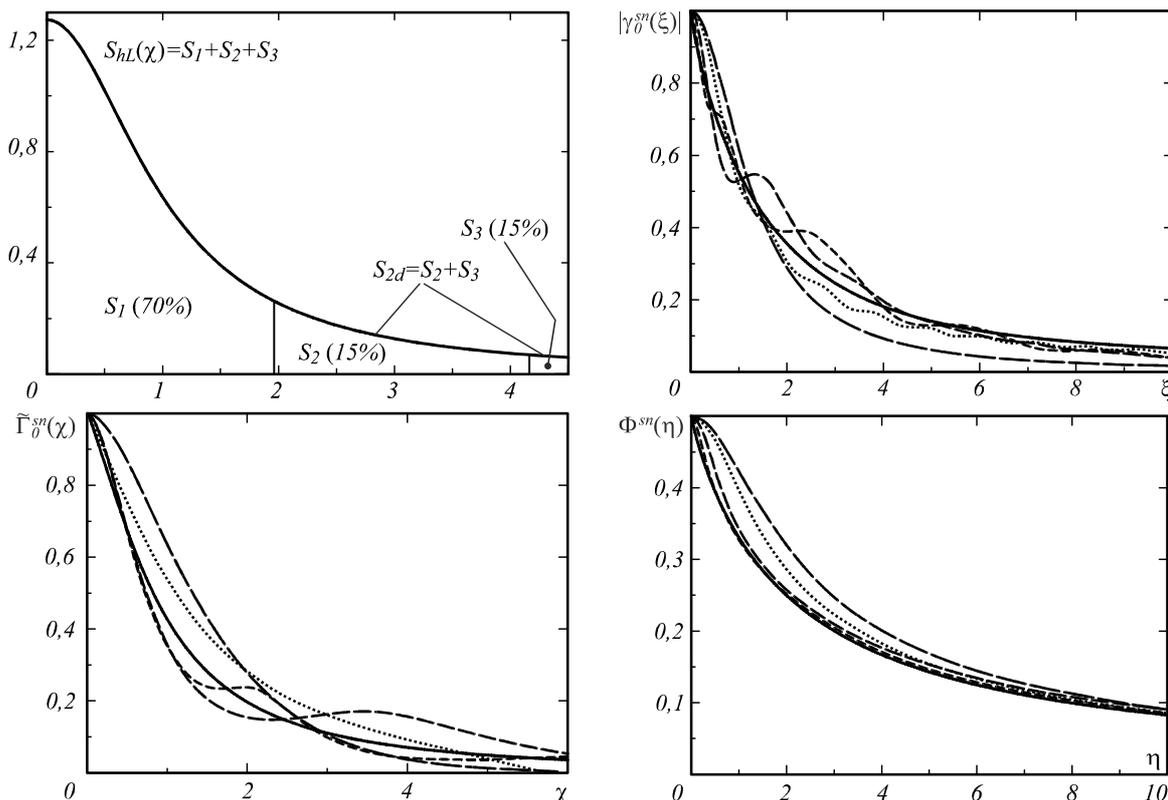


Рис.8. Функции (17) для спектра $S_{hL}(\chi)$ и их аппроксимации. Сплошные линии – точные функции; с длинными штрихами – (20–22) монохромного спектра; со средними штрихами (39–41) при $n = 2$ ($\lambda = 0,7$; $\kappa = 0,96$; $\delta = 0,43\pi\sigma$); с короткими штрихами – (39–41) при $n = 3$ с ($\lambda_{1,2,3} = 0,7$; $\lambda_{2,3} = 0,15$; $\kappa_{1,2,3} = 0,9575$; $0,037$; $0,0055$, $\delta_{12} = 0,6\pi\sigma_{12}$; $\delta_{13} = 0,54\pi\sigma_{13}$; $\delta_{23} = 0,43\pi\sigma_{23}$; пунктир – точные функции обрезанного спектра $S_{hL}(\chi)$ с рис. 6

Вид полихромного спектра может соответствовать термину n -горбый (иметь n максимумов), а может и нет. По аналогии с диахромными спектрами критерием n -хромности спектра можно положить совокупность критериев монохромности (18–19) всех собственно-нормированных частей $S_i^{sn}(\chi_i)$, условия соразмерности частей $\lambda_i^2 / \kappa_i \leq 1$ и условия на δ_{ij} ($i \neq j$), аналогичное (30): $|\delta_{ij}| \geq (0,5 - 1)\pi\sigma_{ij}$. Из-за условия на $|\delta_{ij}|$, как и в (33–35), в (39–41) нет функционального перехода от n -хромности к $(n-1)$ -хромности. Многие спектры можно классифицировать, как n -хромный разными способами.

С помощью (39–41) был сделан ряд расчётов для полихромных спектров, состоящих из двух или трех частей прямоугольной или прямоугольно-треугольной форм, считая $|\delta_{ij}|$ по правилу (36) [8]. Почти везде (39–41) при $n=3; 4$ дали лучшее приближение, если выполнены вышеупомянутые критерии полихромности. Однако улучшение это невелико, и диахромное приближение уже приемлемо, если за S_1 брать монохромную часть спектра с наибольшим λ_1 . В основном это относится к $|\gamma_0^{sn}(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0^{sn}(\chi)$; диахромное приближение $\Phi^{sn}(\eta)$ во всех случаях было хорошее. А расчёт именно $\Phi^{sn}(\eta)$ наиболее труден. Наверное, для n -горбых спектров с большими $|\delta_{ij}|$ различия с диахромным приближением заметнее. Для промежуточных спектров проявляется зависимость (39–41) от используемых в них представлений (20–22).

На рис. 8 дан пример аппроксимации (17) с помощью (39–41) для спектра пол-лоренцевой формы S_{hL} (табл. 1). Этот немонохромный спектр не разбиваем на конечное число монохромных кусков, т.к. «хвост» никогда не будет монохромным. Для диахромного приближения (33–35) из S_{hL} отделялась слева наибольшая монохромная часть S_1 с $\lambda_1 = 0,7$ (S_{2d} – оставшаяся немонохромная часть). И это дало неплохое приближение. Для (39–41) с $n=3$ к S_1 из S_{2d} отделялась вторая наибольшая монохромная часть S_2 с $\lambda_2 = 0,15$. И хотя оставшаяся S_3 с $\lambda_3 = 0,15$ не удовлетворяет ни одному условию (18–19), приближения (39–41) оказались хороши. При $\lambda_1 = 0,7$ точнее трихромное приближение (39–41) получается именно с $\lambda_2 = 0,15$. Если S_3 вообще отрезать от спектра (рис.6), то функции (17) полученного диахромного спектра заметно отличны и от функций (17) для S_{hL} , и от их трихромного приближения (пунктир на рис. 8).

Заключение

В работе предложен метод, позволяющий с хорошей точностью для узкополосных случайных Гауссовых процессов с различными спектрами получать в аналитическом виде их статистические характеристики – коэффициент корреляции, спектр флуктуаций квадратичного детектирования, корреляционную функцию интенсивности. Он основан на обнаруженном свойстве подобия одноимённых статистических

характеристик, что позволяет аппроксимировать их универсальными безразмерными функциями.

Предложенный метод не доказан строго, но проверен множеством расчётов, в которых выявлено подобие характеристик процессов с двумя классами спектров, названных монохромными и диахромными. Установлены критерии принадлежности спектров к этим классам. Для ряда монохромных спектров получены аналитические выражения безразмерных нормированных характеристик, которые можно считать аналитическими представлениями упомянутых универсальных функций. Показано, что универсальные функции диахромных спектров можно выразить через универсальные функции монохромных спектров. Обнаружено, что нередко диахромное приближение удовлетворительно, даже когда критерии диахромности не выполнены.

Для произвольных спектров обсуждается возможность обобщения предложенного метода: дальнейшая классификация спектров по степени полихромности и представление статистических характеристик процессов с такими спектрами через универсальные функции монохромных спектров. На ряде примеров показана перспективность такого обобщения.

Литература

1. **Баскаков, С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с. – ISBN 5-06-003843-2.
2. **Ареки, Ф.** Квантовые флуктуации излучения лазера / Ф. Ареки, М. Скалли, Г. Хакен, В. Вайдлих. – пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 234 с. – ISBN 978-00-1279147-0.
3. **Кутаев, Ю.Ф.** Лазерное приемное устройство с квантовым пределом чувствительности в ближнем ИК диапазоне / Ю.Ф. Кутаев, С.К. Манкевич, О.Ю. Носач, Е.П. Орлов // Квантовая электроника. – 2000. – Т. 30, № 9. – С. 833-838.
4. **Orlov, E.P.** On the similarity of the statistical characteristics of spontaneous radiation of a quantum amplifier at different gain factor / E.P. Orlov, I.M. Sizova // Journal of Russian Laser Research. – 2002. – Vol. 23, Issue 4. – P. 299-331. – DOI: 10.1023/A:1016329509944.
5. **Орлов, Е.П.** О времени корреляции квантового шума оптического усилителя с точки зрения свойства подобия его статистических характеристик / Е.П. Орлов, И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2002. – № 29. – 112 с.
6. **Орлов, Е.П.** О подобии и универсальных функциях статистических характеристик случайных процессов / Е.П. Орлов, И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2008. – № 21. – 50 с.
7. **Орлов, Е.П.** Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть I. Компактные спектры / Е.П. Орлов, И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2010. – № 14. – 40 с.
8. **Орлов, Е.П.** Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть II. Некомпактные диахромные спектры / Е.П. Орлов, И.М. Сизова. – М.: Препринт ФИАН, 2011. – № 19. – 105 с.
9. **Ахманов, С.А.** Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. – М.: Наука, 1981. – 640 с.
10. **Willis, H.F.** A formula for expanding an integral as a series / H.F. Willis // Philosophical Magazine. – 1948. – Vol. 39. – P. 455-459. – DOI: 10.1080/14786444808521694.
11. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Том 1/ Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
12. **Градштейн, И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматлит, 1971. – 1108 с.

Сведения об авторах

Орлов Евгений Прохорович, 1946 года рождения, в 1972 году окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности 0104 «Физика», кандидат физ.-мат наук, работает старшим научным сотрудником в Отделении квантовой радиофизики (ОКРФ) Физического института им. Н.П. Лебедева (ФИАН) РАН, Москва. Область научных интересов: нелинейная и статистическая оптика, лазерная локация, лазерная межпланетная и межзвездная связь, безопасность атомных реакторов, евклидова интерпретация релятивизма. E-mail: eorlov@sci.lebedev.ru.

Сизова Ирина Михайловна, 1954 года рождения, в 1977 году окончила физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности 0104 «Физика», в 1980 году окончила аспирантуру физического факультета МГУ, кандидат физ.-мат наук, работает научным сотрудником в Отделении квантовой радиофизики (ОКРФ) Физического института им. Н.П. Лебедева (ФИАН) РАН, Москва. Область научных интересов: процессы в лазерных средах, дифракция, атмосферная оптика. E-mail: sizova@sci.lebedev.ru.

ГРНТИ: 27.43.15

Поступила в редакцию 24 апреля 2016 г. Окончательный вариант – 22 августа 2016 г.

ANALYTICAL REPRESENTATION OF THE STATISTICAL PROPERTIES OF RANDOM PROCESSES WITH ARBITRARY SPECTRA

E.P. Orlov, I.M. Sizova

P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract

A method of analytical representation of the statistical properties of narrow-band Gaussian random processes with arbitrary spectra is proposed. Although the method is not rigorously proven it is verified in a large number of computing experiments.

Keywords: coherent and statistical optics, Gaussian random process, similarity, analytical representation.

Citation: Orlov EP, Sizova IM. Analytical representation of the statistical properties of random processes with arbitrary spectra. *Computer Optics* 2016; 40(4): 560-571. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-4-560-571.

References

- [1] Baskakov SI. Radio technical chains and signals [In Russian]. Moscow: "Visshaia Shkola" Publisher; 2000.
- [2] Arecchi FT, Scully MO, Haken H, Weidlich W. Quantum fluctuations of laser radiation. In book: Glauber RJ, ed. *Quantum Optics*. New York: Academic Press; 1969: 4.
- [3] Kutaev YuF, Mankevich SK, Nosach OYu, Orlov EP. Laser receiver with a quantum detection limit in the near-IR range. *Quantum Electronics* 2000; 30(9): 833-388. DOI: 10.1070/QE2000v030n09ABEH001819.
- [4] Orlov EP, Sizova IM. On the similarity of the statistical characteristics of spontaneous radiation of a quantum amplifier at different gain factor. *Journal of Russian Laser Research* 2002; 23(4): 299-331. DOI: 10.1023/A:1016329509944.
- [5] Orlov EP, Sizova IM. On the correlation time of an optical amplifier quantum noise from the position of its statistical characteristic similarity [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2002; 29.
- [6] Orlov EP, Sizova IM. On the similarity and universal functions of random process statistical characteristics [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2008; 21.
- [7] Orlov EP, Sizova IM. The similarity of statistical properties of narrow-band random processes with arbitrary spectra. Part I. Compact spectra [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2010; 14.
- [8] Orlov EP, Sizova IM. The similarity of statistical properties of narrow-band random processes with arbitrary spectra. Part II. Noncompact diachromic spectra [In Russian]. Moscow: FIAN Preprint; 2011; 19.
- [9] Akhmanov SA, D'yakov YuE, Chirkin AS. Introduction to Statistical Optics and Radiophysics [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1981.
- [10] Willis HF. A formula for expanding an integral as a series. *Philosophical Magazine* 1948; 39: 455-459. DOI: 10.1080/14786444808521694.
- [11] Prudnikov AP, Brichkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 1. Simple functions [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1981.
- [12] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Tables of integrals, sums, series and products [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 1971.

Authors' information

Evgeny Prochorovich Orlov (b. 1946) graduated from Physical department of M.V. Lomonosov MSU in 1972, majoring in Physics. Currently he works as the senior researcher at the P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences (LPI) in Moscow. Research interests are nonlinear and statistical optics, laser interplanetary and interstellar communication, safety of nuclear reactors, Euclidean interpretation of relativity. E-mail: eorlov@sci.lebedev.ru.

Irina Mikhailovna Sizova (b. 1954) graduated from Physical department of M.V. Lomonosov MSU in 1977 and post graduate school of MSU in 1980, majoring in Radiophysics, Quantum Radiophysics. Currently she works as the scientific worker at the P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences (LPI) in Moscow. Research interests are processes in laser media, diffraction and atmospheric optics. E-mail: sizova@sci.lebedev.ru.

Received April 24, 2016. The final version – August 22, 2016.