

## ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКИ

А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Получено простое замкнутое выражение для нормированного орбитального углового момента (на единицу мощности) произвольного параксиального светового пучка эллиптической формы, прошедшего через эллиптическую спиральную фазовую пластинку, повернутую на произвольный угол вокруг оптической оси. При этом эллиптичности пучка и спиральной фазовой пластинки могут отличаться. Показано, что если эллиптический пучок освещает эллиптическую спиральную фазовую пластинку, то нормированный орбитальный угловой момент выходного пучка максимален (минимален), когда пучок и спиральная фазовая пластинка ориентированы параллельно (ортогонально). Результаты могут быть использованы в оптических ловушках, например, для непрерывного изменения орбитального углового момента, передаваемого частице, путём поворота спиральной фазовой пластинки вокруг оптической оси.

**Ключевые слова:** эллиптический лазерный пучок, эллиптическая спиральная фазовая пластинка, орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Ковалёв, А.А. Орбитальный угловой момент лазерного пучка с эллиптической симметрией после прохождения эллиптической спиральной фазовой пластинки / А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 606-613. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-4-606-613.

### Введение

В работе [1], наряду с плотностью орбитального углового момента (ОУМ) светового поля, даётся определение общего (интегрального) ОУМ, т.е. ОУМ, интегрированного по некоторому объёму или по некоторой плоскости, поперечной направлению распространения. Известны работы о различных световых пучках, в которых изучается их интегральный ОУМ [2–9]. Для чего надо изучать интегральный ОУМ пучка? Во-первых, когда световой пучок используется для вращения несферической микрочастицы, желателен согласовать форму освещающего пучка и форму частицы. В этом случае общий ОУМ характеризует момент, действующий на частицу в целом. Кроме того, большое значение ОУМ может быть получено с помощью спиральной фазовой пластинки с большим топологическим зарядом, которая не проста в изготовлении. Поэтому изучались безвихревые пучки с большим интегральным ОУМ [2, 3], формируемые цилиндрической линзой. Во-вторых, если размер вращаемых частиц много меньше размера пучка, то общий ОУМ влияет на ОУМ в области захвата и тем самым характеризует некоторую среднюю скорость неравномерного движения частиц вокруг оптической оси. В-третьих, когда такой пучок используется в качестве носителя информации в беспроводной оптической связи, он искажается средой, например, атмосферой или водой. Однако некоторые интегральные характеристики пучка (например, полный ОУМ) остаются стабильными. Поэтому регистрирование этих интегральных характеристик может оказаться единственным способом декодирования искажённого сигнала.

Интегральный ОУМ был обобщён несколькими способами. Например, в работе [4] расширяется определе-

ние ОУМ для когерентных пучков на случай частично-когерентного света. В работе [5] изучается ОУМ затухающих полей. В [5] показано, что нормированный ОУМ (интегральный ОУМ на единицу мощности) затухающей бездифракционной моды Бесселя пропорционален не только топологическому заряду, но также и множителю, зависящему от волнового числа и скорости спада амплитуды затухающего света. В работе [6] изучается поперечный линейный момент и интегральный ОУМ в случайной среде. В [6] приведены примеры, показывающие, что оптические вихри не являются необходимыми для наличия ОУМ, и наоборот, что наличие оптических вихрей не гарантирует ненулевой ОУМ. Показано, что если в среде имеются случайные неоднородности, то ОУМ сохраняется в среднем, но его флуктуации возрастают с пройденным расстоянием, хотя это возрастание и слабее для пучков с вращательной симметрией. В [7] представлена аналитическая процедура для конструирования оптического пучка с заданным значением интегрального ОУМ, сохраняя при этом возможность формировать поперечное распределение интенсивности без изменения ОУМ. В работах [8, 9] интегральный ОУМ раскладывается на две составляющие – вихревой ОУМ и асимметричный ОУМ. В [8] получена формула для эллиптической моды Лагерра–Гаусса, из которой видно, что он возрастает с увеличением эллиптичности. В некоторых наших работах также изучается интегральный ОУМ для некоторых лазерных пучков, включая пучки эллиптической формы [10, 11]. Обычно для формирования лазерных пучков используется пространственный модулятор света или дифракционный оптический элемент. Для нормального освещения модулятора в оптической схеме используются делители

пучка (например, как в [12, 13]), что приводит к потерям части энергии, исходящей из лазера. Для разделения пучка, падающего на экран модулятора, и пучка, отражённого от него, можно использовать наклонное освещение (например, как в [14, 15]). В этом случае фазовая маска или фазовый оптический элемент действуют так, как если бы они были немного растянутыми, т.е. эллиптическими. Освещающий пучок также может иметь эллиптическую форму. Такой пучок может быть использован, например, для захвата микрочастиц и перемещения их по эллиптической траектории или для захвата и вращения единичного протяжённого микрообъекта. Однако скорость частиц зависит от ОУМ пучка и потому возникает вопрос, влияет ли растяжение освещающего пучка или оптического элемента (или фазы на модуляторе) на ОУМ, и если влияет, то каким образом.

В данной работе исследуется ОУМ пучка с эллиптической симметрией (полученного, например, из круглого пучка с помощью цилиндрических линз), прошедшего через спиральную фазовую пластинку (СФП), которая также эллиптическая и повернута на некоторый угол вокруг оптической оси. Получено аналитическое выражение для полного ОУМ такого пучка. На основе этого выражения теоретически доказано, что ни прохождение круглого пучка через эллиптическую СФП, ни освещение круглой СФП эллиптическим пучком не влияет на нормированный ОУМ, вносимый СФП, т.е. он остаётся равным топологическому заряду. Также показано, что экстремальные значения нормированного ОУМ получаются, когда СФП ориентирована параллельно или перпендикулярно эллипсу освещающего пучка. Получены также верхняя и нижняя граница ОУМ.

**1. Орбитальный угловой момент эллиптического пучка после прохождения через эллиптическую спиральную фазовую пластинку**

Традиционный вихревой лазерный пучок имеет комплексную амплитуду, состоящую из двух компонент: вихревой (угловой) фазовый множитель и некоторая радиальная функция с вращательной симметрией:

$$E(r, \varphi) = G(r) \exp(im\varphi), \tag{1}$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты в некоторой плоскости, перпендикулярной направлению распространения,  $\exp(im\varphi)$  – вихревой множитель и  $G(r)$  – радиальная функция,  $m$  – топологический заряд вихря. Хорошо известно, что нормированный ОУМ такого пучка (т.е. общий ОУМ, делённый на мощность пучка) равен его топологическому заряду  $m$ , независимо от формы пучка, определяемой функцией  $G(r)$ .

Теперь предположим, что пучок с эллиптически-симметричным распределением интенсивности (но с произвольной фазой) проходит через СФП, которая также эллиптическая и повернута на некоторый угол. Комплексная амплитуда выходного пучка имеет вид:

$$E(x, y) = A(r') \exp(i\Psi), \tag{2}$$

где  $(x, y)$  – декартовы координаты в поперечной плоскости,  $A(r')$  – радиальное распределение амплитуды

пучка, а  $\Psi(x, y)$  – его фаза после прохождения эллиптической СФП:

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(x, y) + m\varphi'', \tag{3}$$

где  $\Psi_0(x, y)$  – некоторая произвольная фаза освещающего излучения, и

$$r' = \sqrt{\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2}}, \tag{4}$$

$$\varphi'' = \arg\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{b_x} + i \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{b_y}\right), \tag{5}$$

где  $a_x$  и  $a_y$  – положительные числа, определяющие эллиптичность освещающего излучения,  $b_x$  и  $b_y$  – также положительные числа, определяющие эллиптичность СФП, а  $\alpha$  – её угол поворота (рис. 1).

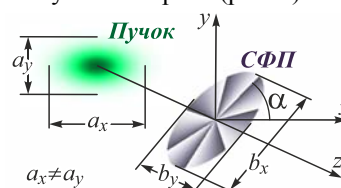


Рис. 1. Прохождение эллиптического пучка через эллиптическую повернутую СФП

Перейдём к полярным координатам  $(r, \varphi)$  ( $x=r \cos \varphi$ ,  $y=r \sin \varphi$ ), в которых плотность продольной составляющей ОУМ пучка равна

$$j_z(r, \varphi) = \text{Im} \left\{ E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} \right\}, \tag{6}$$

где  $\text{Im}\{\dots\}$  – мнимая часть комплексного числа.

Тогда плотность ОУМ пучка (2) имеет вид:

$$j_z(r, \varphi) = A^2(r') \left[ \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} + m \frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi} \right]. \tag{7}$$

Согласно (7), общий ОУМ пучка (т.е. интеграл от плотности ОУМ (7) по всей поперечной плоскости) равен сумме ОУМ  $J_{z0}$  освещающего пучка и ОУМ  $\Delta J_z$ , добавленного эллиптической СФП (далее будем называть его СФП-индуцированный ОУМ):

$$J_z = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} j_z(r, \varphi) r dr d\varphi = J_{z0} + \Delta J_z = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} r dr d\varphi + m \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A^2 \frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi} r dr d\varphi. \tag{8}$$

Вывод формулы для нормированного СФП-индуцированного ОУМ приведён в Приложении А. Здесь запишем только окончательное выражение:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = \frac{m}{\gamma \cos^2 \alpha + \gamma^{-1} \sin^2 \alpha}, \tag{9}$$

где  $W$  – мощность пучка (формула (А.3) в Приложении А),

$$\gamma = \frac{a_x b_y + a_y b_x}{a_x b_x + a_y b_y}.$$

Формула (9) – основной результат данной работы. Легко видеть, что для круглого вихря, когда  $a_x = a_y$  и  $b_x = b_y$ , получается известное тождество:  $\Delta J_z / W = m$ .

Производная знаменателя в (9) по углу поворота СФП  $\alpha$  равна нулю при  $\alpha = \pi p / 2$ , где  $p$  – произвольное целое число. Поэтому экстремальные значения нормированного ОУМ достигаются, когда СФП параллельна или ортогональна эллиптическому поперечному сечению интенсивности падающего пучка. Если  $(a_y - a_x)(b_y - b_x) > 0$ , то нормированный ОУМ максимален при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$  и минимален при  $\alpha = \pi/2$  или  $\alpha = 3\pi/2$ . И наоборот, если  $(a_y - a_x) \times (b_y - b_x) < 0$ , то нормированный ОУМ максимален при  $\alpha = \pi/2$  или  $\alpha = 3\pi/2$  и минимален при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ . Таким образом, ОУМ максимален, когда и освещающий пучок, и СФП «вытянуты» в одном направлении, и минимален, когда эти направления ортогональны.

Возрастание и убывание нормированного СФП-индуцированного ОУМ, когда СФП направлена параллельно или ортогонально пучку, объяснимо. В первом случае наибольший градиент фазы СФП (а потому и наибольшая азимутальная составляющая вектора Пойнтинга пучка на выходе СФП) находится в области, наиболее удалённой от оптической оси (точка А на рис. 2а). Прибегая к аналогии с механикой, в точках с большим плечом прикладывается большая азимутальная сила. Напротив, во втором случае наибольший градиент фазы находится в области, ближайшей к оптической оси (точка D на рис. 2б), в то время как в самой дальней области градиент фазы слабый (точка С на рис. 2б). По аналогии с механикой, максимальная азимутальная сила прикладывается в точках с малым плечом, в то время как в точках с большим плечом прикладываемая сила минимальна.

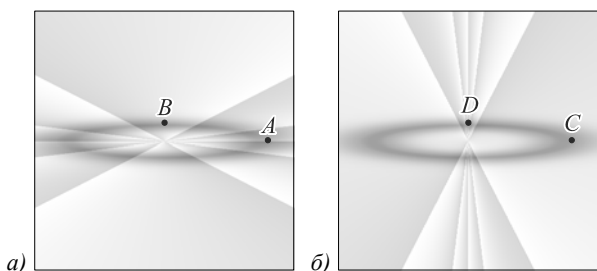


Рис. 2. Эллиптическая интенсивность, наложенная на фазу эллиптической СФП, ориентированной параллельно (а) и перпендикулярно (б) интенсивности. В точке А сильный градиент фазы сочетается с большим плечом, а в точке В слабый градиент фазы сочетается с малым плечом. В точке С слабый градиент фазы сочетается с большим плечом, в то время как в точке D большой градиент фазы сочетается с малым плечом

Пусть и СФП, и пучок вытянуты в одном направлении, для определённости вдоль оси  $x$ , т.е.  $\alpha_x > \alpha_y$ ,  $b_x > b_y$  и  $\alpha = 0$ . Тогда в (9)  $\gamma < 1$  и нормированный СФП-индуцированный ОУМ увеличивается:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = m/\gamma = m \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a_x b_y + a_y b_x} \tag{10}$$

При повороте СФП на угол  $\alpha = \pi/2$  нормированный ОУМ уменьшается:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = m\gamma = m \frac{a_x b_y + a_y b_x}{a_x b_x + a_y b_y} \tag{11}$$

Для углов  $\alpha$  между 0 и  $\pi/2$  нормированный СФП-индуцированный ОУМ  $\Delta J_z$  принимает значения в интервале, верхняя и нижняя границы которого определяются уравнениями (10) и (11). В частности, если СФП повернута на угол

$$\alpha_{\text{circ}} = \arccos[(a_y - a_x)(b_y - b_x)/(a_y + a_x)/(b_y + b_x)]/2,$$

то нормированный СФП-индуцированный ОУМ  $\Delta J_z$  равен топологическому заряду  $m$ , т.е. эллиптическая СФП действует как круглая.

На рис. 3 показана зависимость ОУМ эллиптического пучка ( $a_x = 2, a_y = 1$ ) после прохождения через эллиптическую СФП ( $b_x = 3, b_y = 1$ ) с топологическим зарядом  $m = 5$  от угла поворота СФП  $\alpha$ .

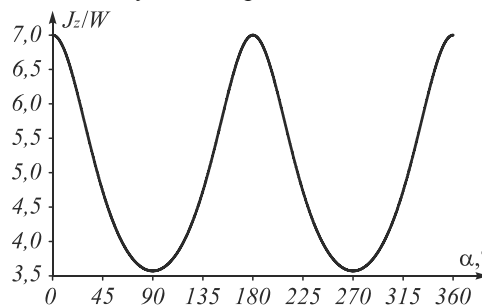


Рис. 3. Зависимость нормированного ОУМ эллиптического пучка ( $a_x = 2, a_y = 1$ ) после прохождения через эллиптическую СФП ( $b_x = 3, b_y = 1$ ) с топологическим зарядом  $m = 5$  от угла поворота СФП  $\alpha$

При параллельном расположении освещающего пучка и СФП ОУМ (10) возрастает с эллиптичностью СФП ( $b_x/b_y$ ), так как

$$\Delta J_z / W = m [a_x (b_x / b_y) + a_y] / [a_y (b_x / b_y) + a_x],$$

а это отношение растёт, поскольку  $a_x > a_y$ . В пределе, когда  $b_x/b_y \rightarrow \infty$ , нормированный ОУМ стремится к  $\Delta J_z / W = m a_x / a_y$ , т.е. эллиптичность освещающего пучка определяет максимальный ОУМ, который можно добавить пучку эллиптической СФП. Точно так же можно показать, что минимальный ОУМ равен  $\Delta J_z / W = m a_y / a_x$  и достигается при условии  $b_x/b_y \rightarrow \infty$ , но когда СФП перпендикулярна пучку.

Далее рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Эллиптичность интенсивности пучка и эллиптичность СФП совпадают (т.е.  $b_x = a_x, b_y = a_y, \alpha = 0$ ). Этот случай возникает при поперечном сужении/растяжении круглого оптического вихря. Согласно (9), нормированный ОУМ такого эллиптического вихря равен

$$\frac{J_z}{W} = \frac{m}{2} \left( \frac{a_x}{a_y} + \frac{a_y}{a_x} \right) \tag{12}$$

Эта формула была получена в [8] для эллиптической моды Лагерра-Гаусса порядка (0, 1), а в [16] – для эллиптического Гауссова пучка.

Если СФП повернуть на угол  $\alpha = \pi/2$ , то нормированный ОУМ уменьшится и станет равен

$$\frac{\Delta J_z}{W} = 2m \left( \frac{a_y}{a_x} + \frac{a_x}{a_y} \right)^{-1}. \tag{13}$$

2. Радиально-симметричный вихревой пучок с топологическим зарядом  $n$  (т.е.  $J_{z0}/W = n$ ) проходит через эллиптическую СФП ( $a_x = a_y, b_x \neq b_y$ ) с топологическим зарядом  $m$ . Согласно (9), ОУМ, индуцированный СФП, не зависит от её эллиптичности ( $\Delta J_z/W = m$ ), и нормированный ОУМ прошедшего пучка равен

$$\frac{J_z}{W} = m + n. \tag{14}$$

3. Эллиптический пучок проходит через круглую СФП ( $a_x \neq a_y, b_x = b_y$ ). Из (9) следует, что нормированный ОУМ  $\Delta J_z$ , индуцированный СФП, не зависит от эллиптичности пучка и равен топологическому заряду СФП  $m$ .

## 2. Численное моделирование

### 2.1. Орбитальный угловой момент эллиптического оптического вихря

Из (12) следует, что для изменения ОУМ круглого оптического вихря вовсе не требуется СФП. Это может быть сделано путём поперечного сужения/растяжения пучка, комплексная амплитуда которого приобретает вид

$$E(x, y) = A \left[ \left[ \left( \frac{x}{a_x} \right)^2 + \left( \frac{y}{a_y} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \times \exp \left\{ i \arg \left[ \left( \frac{x}{a_x} \right) + i \left( \frac{y}{a_y} \right) \right] \right\}.$$

Однако таким способом нормированный ОУМ может быть только увеличен. Для увеличения ОУМ в  $\beta$  раз требуется пучку придать следующую эллиптичность:

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{b_y}{b_x} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}. \tag{15}$$

В данном подпараграфе численно исследуется ОУМ эллиптических пучков Лагерра-Гаусса (ЛГ) [17] с радиусами перетяжки  $a_x$  и  $a_y$ . В плоскости перетяжки такие пучки имеют следующие комплексные амплитуды (в декартовых координатах):

$$E_{LG}(x, y, 0) = (r')^m L_p^m(2r'^2) \exp(-r'^2 + im\varphi'), \tag{16}$$

где  $r' = [(x/a_x)^2 + (y/a_y)^2]^{1/2}$ ,  $\varphi' = \arg[(x/a_x) + i(y/a_y)]$ ,  $m$  – топологический заряд пучка,  $p$  – радиальный индекс ЛГ-пучка.

На рис. 4 показаны распределения интенсивности и фазы пучка ЛГ (16) с радиусами перетяжки  $a_x = 1$  мм и  $a_y = a_x[\beta - (\beta^2 - 1)^{1/2}]$ , где  $\beta = 2$  (т.е. ОУМ должен удво-

иться) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд  $m = 10$ , нижний индекс пучка ЛГ  $p = 1$ , расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 8$  мм.

Согласно (12), нормированный ОУМ пучка на рис. 4 должен быть равен  $m\beta = 20$ . Численный расчёт дал значения 19,655679. Микрочастица, захваченная в световом эллипсе на рис. 4, должна двигаться вдоль него неравномерно: быстрее на дальней стороне от оси и медленнее на ближней стороне.

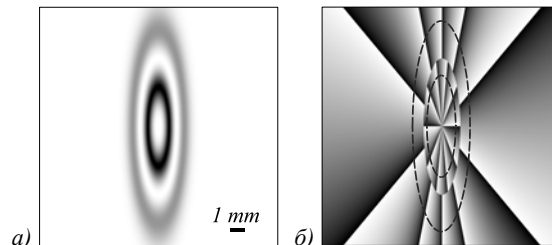


Рис. 4. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эллиптического пучка ЛГ (16): длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд оптического вихря  $m = 10$ , радиусы перетяжки  $a_x = 1$  мм и  $a_y = a_x[\beta - (\beta^2 - 1)^{1/2}]$ , где  $\beta = 2$ , нижний индекс пучка  $p = 1$ , расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 8$  мм. Пунктирные эллипсы на распределении фазы соответствуют световым эллипсам на распределении интенсивности

### 2.2. Орбитальный угловой момент вихревого пучка с вращательной симметрией после прохождения через эллиптическую спиральную фазовую пластинку

В данном подпараграфе численно изучается СФП-индуцированный ОУМ радиально-симметричного пучка ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП. Такой пучок в полярных координатах имеет следующую комплексную амплитуду:

$$E_{LG}(r, \varphi, 0) = \left( \frac{r}{w} \right)^n L_p^n \left( \frac{2r^2}{w^2} \right) \times \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} + in\varphi + im\varphi'' \right), \tag{17}$$

где  $w$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $\varphi'' = \arg[(\cos \varphi / b_x) + i(\sin \varphi / b_y)]$  (это следует из (5) при  $\alpha = 0$ ),  $m$  – топологический заряд эллиптической СФП,  $p$  и  $n$  – радиальный и азимутальный индексы освещающего пучка ЛГ.

На рис. 5 показаны распределения интенсивности и фазы пучка ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП. Для расчётов использовались следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд СФП  $m = 7$ , масштабные коэффициенты СФП  $b_x = 4$  мм,  $b_y = 1$  мм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 2$  мм, нижний и верхний индексы пучка ЛГ  $p = 3$  и  $n = 3$ , расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 10$  мм.

Из рис. 5 видно, что распределение интенсивности остаётся радиально-симметричным, но фаза вдоль световых колец меняется неравномерно из-за эллиптичности СФП. Такие пучки могут использоваться для неравномерного перемещения частиц по кругу-

вой траектории. Согласно теоретическим выводам (уравнение (14)), нормированный ОУМ должен быть равен суммарному топологическому заряду  $m + n = 10$ . Численно рассчитанный нормированный ОУМ оказался равен 9,9892248.

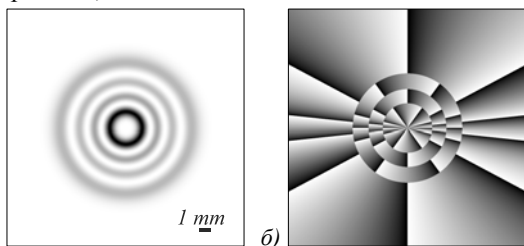


Рис. 5. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) круглого пучка ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП. Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд СФП  $m = 7$ , масштабные коэффициенты СФП  $b_x = 4$  мм,  $b_y = 1$  мм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 2$  мм, нижний и верхний индексы пучка ЛГ  $p = 3$  и  $n = 3$ , расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 10$  мм

2.3. Орбитальный угловой момент эллиптического пучка после прохождения через круглую спиральную фазовую пластинку

В этом подпараграфе численно изучается ОУМ эллиптического пучка ЛГ, прошедшего через круглую СФП. Такой пучок имеет следующую комплексную амплитуду (в декартовых координатах):

$$E_{LG}(x, y, 0) = (r'^n) L_p^n(2r'^2) \times \exp(-r'^2 + in\varphi' + im\varphi''), \tag{18}$$

где  $r' = [(x/a_x)^2 + (y/a_y)^2]^{1/2}$ ,  $\varphi' = \arg[(x/a_x) + i(y/a_y)]$ ,  $\varphi'' = \arg(x + iy)$ ,  $a_x$  и  $a_y$  – радиусы перетяжки Гауссова пучка,  $m$  – топологический заряд СФП,  $n$  – топологический заряд освещающего пучка,  $p$  – радиальный индекс пучка ЛГ.

На рис. 6 показаны распределения интенсивности и фазы пучка ЛГ, прошедшего через круглую СФП. Для расчёта использовались следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд СФП  $m = 7$ , радиусы перетяжки Гауссова пучка  $a_x = 1$  мм и  $a_y = 4$  мм, нижний и верхний индексы пучка ЛГ  $p = 3$  и  $n = 3$ , расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 10$  мм.

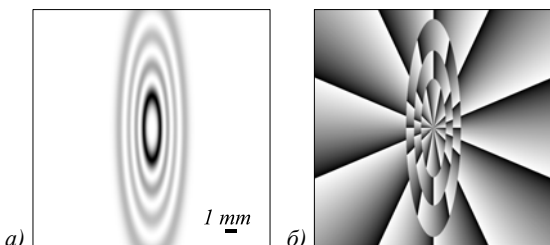


Рис. 6. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эллиптического пучка ЛГ после прохождения через круглую СФП. Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд СФП  $m = 7$ , радиусы перетяжки Гауссова пучка  $a_x = 1$  мм и  $a_y = 4$  мм, нижний и верхний индекс пучка ЛГ  $p = 3$  и  $n = 3$ , расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 10$  мм

Фаза на рис. 6б складывается из фазы эллиптического пучка ЛГ и фазы круглой СФП. Согласно теории, нормированный ОУМ должен быть равен  $J_z/W = 13,375$  (так как ОУМ освещающего пучка равен  $J_{z0}/W = (3/2) \times (4 + 1/4) = 6,375$ , а ОУМ, вносимый СФП, равен  $\Delta J_z/W = 7$ ). Численно полученный нормированный ОУМ составил 13,38804 (значение получено для большей области, чем на рис. 6:  $R = 15$  мм).

2.4. Орбитальный угловой момент эллиптического пучка после прохождения через эллиптическую спиральную фазовую пластинку, повернутую под разными углами

На рис. 7 показаны распределения интенсивности и фазы эллиптического пучка ЛГ при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд эллиптической СФП  $m = 10$ , радиусы перетяжки Гауссова пучка  $a_x = 4$  мм и  $a_y = 1$  мм, порядок ЛГ-пучка  $(p, n) = (3, 0)$ , угол поворота СФП  $\alpha = 0$  (рис. 7б),  $\alpha = \pi/2$  (рис. 7в),  $\alpha = \alpha_{circ} \approx 34^\circ$  (рис. 7г), расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 10$  мм.

Как видно из (12), теоретическое значение нормированного ОУМ падающего пучка равно нулю:  $J_{z0} = (0/2)(4 + 1/4) = 0$ . Согласно (12), (13) и (9), эллиптическая СФП формирует ОУМ, равный

$$21,25 (\Delta J_z / W = (10/2)(4 + 1/4)),$$

$$4,7058824 (\Delta J_z / W = 2 \times 10 / (4 + 1/4)) \text{ и } 10$$

для углов поворота  $\alpha = 0, \pi/2$  и  $\alpha_{circ}$  соответственно. Численный расчёт дал значения 20,673934, 4,5958497 и 9,8848944.

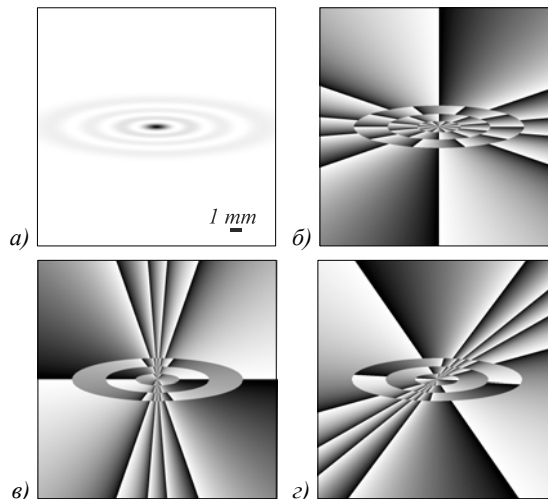


Рис. 7. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б-г) эллиптического ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд эллиптической СФП  $m = 10$ , радиусы перетяжки Гауссова пучка  $a_x = 4$  мм и  $a_y = 1$  мм, порядок ЛГ-пучка  $(p, n) = (3, 0)$ , угол поворота СФП  $\alpha = 0$  (б),  $\alpha = \pi/2$  (в),  $\alpha = \alpha_{circ} \approx 34^\circ$  (г), расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 10$  мм

**Заключение**

Основным результатом данной работы является замкнутое выражение для нормированного ОУМ (ОУМ на единицу мощности) лазерного пучка эллип-

тической формы, прошедшего через СФП, которая также эллиптическая и повернута на произвольный угол вокруг оптической оси (уравнение (9)). Это уравнение обобщает хорошо известную формулу для традиционных круглых оптических вихрей (мод Бесселя, пучков Бесселя–Гаусса и Лагерра–Гаусса), согласно которой нормированный ОУМ равен топологическому заряду. Полученное выражение доказывает, что эллиптичность пучка, падающего на круглую СФП, не влияет на нормированный ОУМ пучка, вносимый этой СФП, который равен её топологическому заряду. Аналогично, если радиально–симметричный пучок освещает эллиптическую СФП, то вызванный ею нормированный ОУМ пучка также равен топологическому заряду СФП и не зависит от её эллиптичности. Также показано, что при прочих равных условиях нормированный ОУМ эллиптического оптического вихря больше ОУМ круглого вихря (уравнение (12)). Показано, что при освещении эллиптическим пучком эллиптической СФП нормированный ОУМ выходного пучка максимален (минимален), когда и пучок, и СФП ориентированы в одинаковых (перпендикулярных) направлениях. Получены теоретические пределы максимального и минимального ОУМ, индуцированного СФП с бесконечной эллиптичностью. Результаты могут найти применение в оптическом манипулировании, например, для непрерывного изменения ОУМ, передаваемого частице, путём поворота СФП.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части «Численное моделирование», Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Орбитальный угловой момент эллиптического пучка после прохождения через эллиптическую спиральную фазовую пластинку» и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-07-01129, 18-07-01380, 17-47-630420, 16-47-630483) в части «Приложение А. Вывод формулы (9) для нормированного ОУМ».

#### Литература

1. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
2. **Courtial, J.** Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1997. – Vol. 144(4-6). – P. 210-213. – DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
3. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 1. – P. 141-156. – DOI: 10.1364/OE.26.000141.
4. **Serna, J.** Orbital angular momentum of partially coherent beams / J. Serna, J. Movilla // *Optics Letters*. – 2001. – Vol. 26, Issue 7. – P. 405-407. – DOI: 10.1364/OL.26.000405.
5. **Yang, Z.** Optical orbital angular momentum of evanescent Bessel waves / Z. Yang // *Optics Express*. – 2015. – Vol. 23, Issue 10. – P. 12700-12711. – DOI: 10.1364/OE.23.012700.
6. **Charnotskii, M.** Transverse linear and orbital angular momenta of beam waves and propagation in random media / M. Charnotskii // *Journal of Optics*. – 2017. – Vol. 20, Issue 2. – 025602. – DOI: 10.1088/2040-8986/aa9f50.
7. **Martinez-Castellanos, I.** Shaping optical beams with non-integer orbital-angular momentum: a generalized differential operator approach / I. Martinez-Castellanos, J.C. Gutiérrez-Vega // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, Issue 8. – P. 1764-1767. – DOI: 10.1364/OL.40.001764.
8. **Bekshaev, A.Ya.** Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2003. – Vol. 20, Issue 8. – P. 1635-1643. – DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
9. **Bekshaev, A.Ya.** Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Optics Communications*. – 2004. – Vol. 241, Issues 4-6. – P. 237-247. – DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
10. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Gaussian optical vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 95, Issue 5. – 053805. – DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
11. **Kovalev, A.A.** A highly efficient element for generating elliptic perfect optical vortices / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Applied Physics Letters*. – 2017. – Vol. 110, Issue 26. – 261102. – DOI: 10.1063/1.4990394.
12. **Tahara, T.** Single-shot phase-shifting incoherent digital holography / T. Tahara, T. Kanno, Y. Arai, T. Ozawa // *Journal of Optics*. – 2017. – Vol. 19, Issue 6. – 065705. – DOI: 10.1088/2040-8986/aa6e82.
13. **Zhang, P.** Trapping and rotating microparticles and bacteria with Moiré-based optical propelling beams / P. Zhang, D. Hernandez, D. Cannan, Y. Hu, S. Fardad, S. Huang, J. Chen, D. Christodoulides, Z. Chen // *Biomedical Optics Express*. – 2012. – Vol. 3, Issue 8. – P. 1891-1897. – DOI: 10.1364/BOE.3.001891.
14. **De Sio, L.** Digital polarization holography advancing geometrical phase optics / L. De Sio, D. Roberts, Z. Liao, S. Nersisyan, O. Uskova, L. Wickboldt, N. Tabiryan, D. Steeves, B. Kimball // *Optics Express*. – 2016. – Vol. 24, Issue 16. – P. 18297-18306. – DOI: 10.1364/OE.24.018297.
15. **Ruffato, G.** Diffractive optics for combined spatial- and mode-division demultiplexing of optical vortices: design, fabrication and optical characterization / G. Ruffato, M. Masari, F. Romanato // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6. – 24760. – DOI: 10.1038/srep24760.
16. **Kotlyar, V.V.** Controlling orbital angular momentum of an optical vortex by varying its ellipticity / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Optics Communications*. – 2018. – Vol. 410. – P. 202-205. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.10.004.
17. **Kogelnik, H.** Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li // *Applied Optics*. – 1966. – Vol. 5, Issue 10. – P. 1550-1567. – DOI: 10.1364/AO.5.001550.

**Приложение А.  
Вывод формулы (9)  
для нормированного ОУМ**

Так как в полярных координатах  $\varphi = \text{atan}[(b_x/b_y)\tan(\varphi - \alpha)]$  (с точностью до константы), то, согласно (8), СФП-индуцированный ОУМ равен

$$\Delta J_z = m a_x a_y b_x b_y \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A^2(r) (a_x^2 \cos^2 \varphi + a_y^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi}{b_y^2 (a_x \cos \varphi \cos \alpha + a_y \sin \varphi \sin \alpha)^2 + b_x^2 (a_y \sin \varphi \cos \alpha - a_x \cos \varphi \sin \alpha)^2}. \quad (A.2)$$

Разделив СФП-индуцированный ОУМ (A.2) пучка на его мощность

$$W = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |E(x, y)|^2 dx dy = 2\pi a_x a_y \int_0^\infty A^2(r) r dr, \quad (A.3)$$

получим нормированный ОУМ:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = \frac{m b_x b_y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a_x^2 + a_y^2) + (a_x^2 - a_y^2) \cos 2\varphi}{s + p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi} d\varphi, \quad (A.4)$$

где

$$\begin{aligned} s &= a_x^2 (b_x^2 \sin^2 \alpha + b_y^2 \cos^2 \alpha) + \\ &+ a_y^2 (b_x^2 \cos^2 \alpha + b_y^2 \sin^2 \alpha), \\ p &= a_x^2 (b_x^2 \sin^2 \alpha + b_y^2 \cos^2 \alpha) - \\ &- a_y^2 (b_x^2 \cos^2 \alpha + b_y^2 \sin^2 \alpha), \\ q &= a_x a_y (b_y^2 - b_x^2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (A.5)$$

Интеграл (A.4) может быть преобразован в интеграл по единичной окружности в комплексной плоскости и вычислен с помощью теоремы о вычетах:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J_z}{W} &= \frac{m b_x b_y}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \oint_{|z|=1} \frac{(a_x^2 + a_y^2) + (a_x^2 - a_y^2) \frac{z+z^{-1}}{2}}{s + p \frac{z+z^{-1}}{2} + q \frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} \right\} = \\ &= -i \frac{m b_x b_y}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \oint_{|z|=1} \frac{(a_x^2 - a_y^2) z^2 + 2(a_x^2 + a_y^2) z + (a_x^2 - a_y^2)}{(p - iq) z(z - z_1)(z - z_2)} dz \right\}. \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\Delta J_z = m b_x b_y \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A^2(r') r dr d\varphi}{b_y^2 \cos^2(\varphi - \alpha) + b_x^2 \sin^2(\varphi - \alpha)}. \quad (A.1)$$

Переходя к декартовым координатам ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ), масштабируя их ( $x = a_x u$ ,  $y = a_y v$ ) и снова переходя к полярным координатам ( $u = r \cos \varphi$ ,  $v = r \sin \varphi$ ), получим:

Имеется три полюса:  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = (-s + D^{1/2}) / (p - iq)$ ,  $z_2 = (-s - D^{1/2}) / (p - iq)$ , где  $D = s^2 - p^2 - q^2$ . Можно показать, что для значений  $s, p, q$  в (A.4) дискриминант равен  $D = (2a_x a_y b_x b_y)^2$ . Из (A.6) видно, что по теореме Виета  $z_1 z_2 = (p + iq) / (p - iq)$ . Так как в нашем случае  $p$  и  $q$  вещественны, то  $|z_1 z_2| = 1$ . Так как все коэффициенты растяжения  $a_x, a_y, b_x, b_y$  положительны, то  $D > 0$ , т.е.  $z_1 \neq z_2$ . То есть это означает, что из полюсов  $z_1$  и  $z_2$  только один находится внутри окружности единичного радиуса. Очевидно, это  $z_1$  (так как  $s > 0$ ). Поэтому интеграл (A.6) равен

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J_z}{W} &= -i \frac{m b_x b_y}{2\pi} 2\pi i \left[ \frac{a_x^2 - a_y^2}{(p - iq) z_1 z_2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(a_x^2 - a_y^2) z_1^2 + 2(a_x^2 + a_y^2) z_1 + (a_x^2 - a_y^2)}{(p - iq) z_1 (z_1 - z_2)} \right] = \\ &= m b_x b_y \left[ \frac{a_x^2 - a_y^2}{p + iq} + \right. \\ &+ \left. \frac{(a_x^2 - a_y^2) z_1^2 + 2(a_x^2 + a_y^2) z_1 + (a_x^2 - a_y^2)}{2z_1 \sqrt{D}} \right]. \end{aligned} \quad (A.7)$$

Преобразование этого выражения приводит к формуле для ОУМ:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J_z}{W} &= \\ &= m \frac{(a_x b_x + a_y b_y)(a_x b_y + a_y b_x)}{(a_x b_x + a_y b_y)^2 \sin^2 \alpha + (a_x b_y + a_y b_x)^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (A.8)$$

Сведения об авторе **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 554 этого выпуска.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 16 мая 2018 г. Окончательный вариант – 28 июня 2018 г.

## ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF AN ELLIPTICALLY SYMMETRIC LASER BEAM AFTER PASSING AN ELLIPTICAL SPIRAL PHASE PLATE

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara, Russia

### Abstract

We obtain a simple closed expression for the normalized orbital angular momentum (OAM) (OAM per unit power) of an arbitrary paraxial light beam of an elliptical cross-section, diffracted by an elliptical spiral phase plate (SPP), rotated by an arbitrary angle around the optical axis. Note that the ellipticities of the beam and of the SPP can be different. It is shown that when an elliptical beam illuminates an elliptical SPP, the normalized OAM of the output beam is maximal/minimal if the ellipses of the beam cross-section and the SPP are parallel/orthogonal. The results can be used in optical trapping, e.g. for continuously changing the OAM transferred to a particle by rotating the SPP around the optical axis.

**Keywords:** elliptic laser beam, elliptical spiral phase plate, orbital angular momentum.

**Citation:** Kovalev AA. Orbital angular momentum of an elliptically symmetric laser beam after passing an elliptical spiral phase plate. *Computer Optics* 2018; 42(4): 606-613. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-606-613.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the Ministry of Science and Higher Education under Agreement 007-Г3/Ч3363/26 (Section “Numerical simulation”), by the Russian Science Foundation under project No. 18-19-00595 (Section “Orbital angular momentum of an elliptical beam after passing an elliptic spiral phase plate”), and by the Russian Foundation for Basic Research under projects ## 18-07-01129, 18-07-01380, 17-47-630420, 16-47-630483 (“Appendix A. Derivation of the expression (9) for the normalized OAM”).

### References

- [1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [2] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4-6): 210-213. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- [3] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141-156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.
- [4] Serna J, Movilla J. Orbital angular momentum of partially coherent beams. *Opt Lett* 2001; 26(7): 405-407. DOI: 10.1364/OL.26.000405.
- [5] Yang Z. Optical orbital angular momentum of evanescent Bessel waves. *Opt Express* 2015; 23(10): 12700-12711. DOI: 10.1364/OE.23.012700.
- [6] Charnotskii M. Transverse linear and orbital angular momenta of beam waves and propagation in random media. *J Opt* 2017; 20(2): 025602. DOI: 10.1088/2040-8986/aa9f50.
- [7] Martinez-Castellanos I, Gutiérrez-Vega JC. Shaping optical beams with non-integer orbital-angular momentum: a generalized differential operator approach. *Opt Lett* 2015; 40(8): 1764-1767. DOI: 10.1364/OL.40.001764.
- [8] Bekshaev AYa, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. *J Opt Soc Am A* 2003; 20(8): 1635-1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
- [9] Bekshaev AYa, Soskin MS, Vasnetsov MV. Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens. *Opt Commun* 2004; 241(4-6): 237-247. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
- [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Elliptic Gaussian optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 95(5): 053805. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
- [11] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. A highly efficient element for generating elliptic perfect optical vortices. *Appl Phys Lett* 2017; 110(26): 261102. DOI: 10.1063/1.4990394.
- [12] Tahara T, Kanno T, Arai Y, Ozawa T. Single-shot phase-shifting incoherent digital holography. *J Opt* 2017; 19(6): 065705. DOI: 10.1088/2040-8986/aa6e82.
- [13] Zhang P, Hernandez D, Cannan D, Hu Y, Fardad S, Huang S, Chen J, Christodoulides D, Chen Z. Trapping and rotating microparticles and bacteria with Moiré-based optical propelling beams. *Biomed Opt Express* 2012; 3(8): 1891-1897. DOI: 10.1364/BOE.3.001891.
- [14] De Sio L, Roberts D, Liao Z, Nersisyan S, Uskova O, Wickboldt L, Tabiryan N, Steeves D, Kimball B. Digital polarization holography advancing geometrical phase optics. *Opt Express* 2016; 24(16): 18297-18306. DOI: 10.1364/OE.24.018297.
- [15] Ruffato G, Massari M, Romanato F. Diffractive optics for combined spatial- and mode- division demultiplexing of optical vortices: design, fabrication and optical characterization. *Sci Rep* 2016; 6: 24760. DOI: 10.1038/srep24760.
- [16] Kotlyar VV, Kovalev AA. Controlling orbital angular momentum of an optical vortex by varying its ellipticity. *Opt Commun* 2018; 410: 202-205. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.10.004.
- [17] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. *Appl Opt* 1966; 5(10): 1550-1567. DOI: 10.1364/AO.5.001550.

The information about author **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 556 of this issue.

Received May 16, 2018. The final version – June 28, 2018.