

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

### РАЗНОВИДНОСТЬ ФУРЬЕ-ИНВАРИАНТНЫХ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.П. Порфирьев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

#### Аннотация

Найдено двухпараметрическое семейство астигматических эллиптических Гауссовых (АЭГ) оптических вихрей, которые являются модами свободного пространства с точностью до изменения масштаба и поворота. Рассчитан полный нормированный орбитальный угловой момент астигматических эллиптических Гауссовых вихрей, который может быть целым, дробным и нулевым и который равен алгебраической сумме двух слагаемых, отражающих вклад вихревой и астигматической составляющих светового поля. В любой поперечной плоскости такой пучок представляет собой изолированный  $n$ -кратно вырожденный ноль интенсивности на оптической оси (оптический вихрь), внедрённый в эллиптический Гауссов пучок, и имеет, наряду с квадратичной эллиптической фазой, фазу цилиндрической линзы, повернутой на угол 45 градусов по отношению к главным осям эллипса интенсивности Гауссова пучка.

**Ключевые слова:** эллиптический Гауссов вихрь, цилиндрическая линза, пространственная мода, орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Разновидность Фурье-инвариантных Гауссовых пучков / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 727-735. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-727-735.

#### Введение

Известно [1–5], что с помощью цилиндрической линзы можно определять топологический заряд оптического вихря. Это свойство цилиндрической линзы было замечено давно. Например, в [6] с помощью цилиндрической линзы лазерный пучок Эрмита–Гаусса с номерами  $(0, n)$ , который не несёт орбитальный угловой момент (ОУМ), был трансформирован в лазерный пучок Лагерра–Гаусса, который имеет  $n$ -кратно вырожденный ноль интенсивности и обладает ОУМ. С помощью цилиндрической линзы можно сформировать безвихревые лазерные пучки, обладающие ОУМ [7, 8]. Такие пучки не имеют изолированных нулей интенсивности (сингулярных точек). Эти астигматические пучки описываются бесконечной суммой оптических вихрей с только чётными положительными и отрицательными топологическими зарядами [8].

Известно также, что линейная комбинация со сдвигом фазы на  $\pi/2$  чётных и нечётных пучков Матье [9], Айнса–Гаусса [10] и Эрмита [11, 12] формирует эллиптические оптические вихри, ОУМ которых зависит от степени эллиптичности. Вклад в ОУМ у таких пучков вносит как вихревая составляющая, так и астигматическая. Причём при распространении таких эллиптических пучков вклады обеих составляющих (вихревой и астигматической) в ОУМ могут меняться [2, 13].

Измерять ОУМ оптических вихрей, в том числе дробный ОУМ [14, 15], можно не только с помощью цилиндрической линзы [1–5], но и многими другими способами, например, с помощью интерферограмм [8, 14] и треугольной апертуры [16].

В данной работе рассмотрены новые лазерные пучки, у которых объединены свойства вихревых эллипти-

ческих Гауссовых пучков [9–13] и астигматических безвихревых лазерных пучков [7, 8]. Такое семейство лазерных пучков мы назвали астигматическими эллиптическими Гауссовыми (АЭГ) оптическими вихрями. АЭГ-вихри в начальной плоскости представляют собой  $n$ -вырожденный ноль интенсивности с круговой симметрией, внедрённый в центр перетяжки эллиптического Гауссова пучка, радиусы перетяжки которого по декартовым осям связаны определённым соотношением, и прошедший через цилиндрическую линзу, повернутую в начальной плоскости вокруг оптической оси на угол 45 градусов по отношению к декартовым осям. Такой пучок при распространении в свободном пространстве сохраняет свою структуру с точностью до масштаба и поворота. Причём дальняя зона (Фурье-преобразование) для АЭГ-пучков отстоит от начальной плоскости на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы. Рассчитан относительный полный ОУМ таких пучков. Он оказался равен алгебраической сумме двух слагаемых, одно из которых равно топологическому заряду оптического вихря, а второе пропорционально ОУМ астигматического эллиптического Гауссова пучка. Эти два слагаемых могут как усиливать, так и компенсировать друг друга вплоть до нуля. В отличие от [13], величина вкладов в ОУМ вихревой и астигматической составляющих не меняется с расстоянием.

#### 1. Амплитуда пучка на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы

Рассмотрим прохождение оптического вихря с круговой симметрией и целым топологическим зарядом  $n$ , внедрённого в перетяжку эллиптического Гауссова пучка, через цилиндрическую линзу, поверну-

тую в поперечной плоскости на угол  $\alpha$ . Комплексная амплитуда такого светового поля сразу после цилиндрической линзы имеет вид:

$$E_n(x, y) = w^{-n} (x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right). \quad (1)$$

В (1) использованы следующие обозначения:  $(x, y)$  – декартовы координаты в поперечной плоскости при  $z=0$ ,  $z$  – продольная декартова координата,  $w$  – масштабный множитель для оптического вихря,  $w_x$  и  $w_y$  – радиусы перетяжки эллиптического Гауссова пучка по декартовым координатам,  $f$  – фокусное расстояние цилиндрической линзы,  $\alpha$  – угол наклона оси линзы по отношению к вертикальной оси  $y$ ,  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число света с длиной волны  $\lambda$ . Комплексная амплитуда пучка (1) на расстоянии  $z$  от начальной плоскости вычисляется с помощью преобразования Френеля:

$$E_n(u, v, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{iku^2}{2z} + \frac{ikv^2}{2z}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w^{-n} (x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right) \times \exp\left(\frac{ikx^2}{2z} + \frac{iky^2}{2z} - \frac{ik(xu + yv)}{z}\right) dx dy. \quad (2)$$

Если угол поворота цилиндрической линзы равен 45 градусам ( $\alpha = \pi/4$ ) и расстояние после линзы равно двойному фокусному расстоянию ( $z=2f$ ), то преобразование Френеля (2), с точностью до фазового множителя перед интегралами, становится преобразованием Фурье от амплитуды, описывающей оптический вихрь, внедрённый в эллиптический Гауссов пучок и прошедший цилиндрическую линзу:

$$E_n(u, v, z = 2f) = \frac{-ik}{4\pi f} \exp\left(\frac{iku^2}{4f} + \frac{ikv^2}{4f}\right) w^{-n} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy)^n \exp\left[-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - \frac{ikxy}{2f} - \frac{ik(xu + yv)}{2f}\right] dx dy. \quad (3)$$

Наша дальнейшая цель – вычислить интеграл в (3). Перепишем (3) в безразмерных переменных:  $x/w \rightarrow x$ ,  $y/w \rightarrow y$ ,  $u/w \rightarrow u$ ,  $v/w \rightarrow v$ ,  $w/w_x = \gamma$ ,  $w/w_y = \beta$ ,  $z_0 = 2f$ , где  $z_0 = kw^2/2$  – длина Рэлея. Тогда поле (3) примет вид:

$$E_n(u, v, z = 2f) = -\frac{i}{\pi} \exp(iu^2 + iv^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy)^n \times \exp(-\gamma^2 x^2 - \beta^2 y^2 - 2ixy - 2ixu - 2iyv) dx dy. \quad (4)$$

Интеграл (4) можно вычислить:

$$E_n(u, v, z = 2f) = \exp(iu^2 + iv^2) \frac{(-i)^{n+1}}{2^n \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2}} \times \left(\frac{2 - \gamma^2 + \beta^2}{1 + \gamma^2 \beta^2}\right)^{n/2} H_n\left[\frac{(1 + \beta^2)u + i(\gamma^2 - 1)v}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2} \sqrt{2 - \gamma^2 + \beta^2}}\right] \times \exp\left(-\frac{\beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 - 2iuv}{1 + \gamma^2 \beta^2}\right). \quad (5)$$

В (5)  $H_n(x)$  – многочлен Эрмита. Из (5) видно, что аргумент  $u$  многочлена Эрмита комплексный. В [1] было показано, что после прохождения Гауссова оптического вихря с топологическим зарядом  $n$  и круговой симметрией через цилиндрическую линзу на двойном фокусном расстоянии за линзой на некоторой прямой в поперечной плоскости многочлен Эрмита будет иметь действительный аргумент, и, следовательно, на этой прямой будут находиться  $n$  изолированных нулей (корней многочлена). По этим нулям интенсивности можно определить топологический заряд оптического вихря. Уравнение (4) расширяет метод определения топологического заряда, предложенный в [1], на оптические вихри  $(x + iy)^n$ , внедрённые в эллиптические Гауссовы пучки вида  $\exp(-x^2 - \beta^2 y^2)$ . Действительно, из (5) видно, что при  $\gamma = 1$  аргумент многочлена Эрмита становится действительным и на декартовой оси  $u$  будут находиться  $n$  действительных корней (нулей) многочлена.

Найдем нормированный ОУМ пучка (5). Искать ОУМ будем по известным формулам [7] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x}\right) dx dy, \quad (6)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (7)$$

где  $J_z$  – проекция на оптическую ось ОУМ,  $W$  – плотность энергии (мощности) света,  $\text{Im}$  – мнимая часть числа,  $\bar{E}$  – комплексно сопряжённая амплитуда к амплитуде (1). Подставляя (1) в (6) и (7), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (1):

$$\frac{J_z}{W} = n + i \text{sgn}(w_y - w_x) \frac{k w_x w_y \sin 2\alpha}{4f} \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{P_n^0(\xi)}. \quad (8)$$

При условии  $\alpha = \pi/4$ ,  $z = z_0 = 2f$ ,  $w = \gamma w_x = \beta w_y$ , вместо (8), получим ( $P_m^n(x)$  – многочлены Лежандра):

$$\frac{J_z}{W} = n + i \frac{\text{sgn}(\gamma - \beta)}{\beta \gamma} \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{P_n^0(\xi)}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta + \gamma}{\gamma \beta}\right). \quad (9)$$

Из (8) и (9) видно, что ОУМ пучка (1) состоит из двух слагаемых [2, 13]: первое слагаемое определяется вихревой составляющей пучка и равно то-

пологическому заряду вихря, а второе слагаемое определяется астигматической составляющей пучка, наведённой цилиндрической линзой и при  $n=0$  равно  $(k \sin 2\alpha)(w_y^2 - w_x^2)(8f)^{-1}$  [7]. Из (8), (9) также видно, что подбором параметров эллиптичности Гауссова пучка можно скомпенсировать вихревую часть ОУМ и общий ОУМ пучка (1) будет равен нулю ( $J_z/W=0$ ) при:

$$\gamma^{-2} - \beta^{-2} = 2/3. \quad (10)$$

## 2. Семейство астигматических эллиптических Гауссовых вихрей

Вернёмся к выражению (5). При определённой связи между параметрами эллиптичности Гауссова пучка ( $\gamma^2 = \beta^2 + 2$ ), так как  $\xi^n H_n(a/\xi) \rightarrow (2a)^n$  при  $\xi \rightarrow 0$ , из (5) следует, что такие вихревые астигматические эллиптические Гауссовы пучки сохраняют свою структуру в результате Фурье-преобразования:

$$E_n(u, v, z = 2f) = \left( \frac{-i}{1 + \beta^2} \right)^{n+1} (u + iv)^n \times \exp \left[ iu^2 + iv^2 - \frac{\beta^2 u^2 + (\beta^2 + 2)v^2 - 2iuv}{(1 + \beta^2)^2} \right]. \quad (11)$$

Из (11) видно, что в Фурье-плоскости меняется масштаб, а также эллиптический Гауссов пучок и цилиндрическая линза поворачиваются на 90 градусов. В качестве конкретного примера рассмотрим такие параметры Гауссова пучка:  $\gamma^2 = 3$  и  $\beta^2 = 1$ . Тогда интеграл (4) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \times \exp[-3x^2 - y^2 - 2ixy - 2i(ux + vy)] dx dy = (-i)^n \frac{\pi}{2^{n+1}} (u + iv)^n \exp \left( -\frac{u^2 + 3v^2 - 2iuv}{4} \right). \quad (12)$$

И вместо (11) получим

$$E_n(u, v, z = 2f) = \left( \frac{-i}{2} \right)^{n+1} (u + iv)^n \times \exp \left( iu^2 + iv^2 - \frac{u^2 + 3v^2 - 2iuv}{4} \right). \quad (13)$$

Из (11) и (13) видно, что, во-первых, при определённых параметрах эллиптичности Гауссова пучка ( $\gamma^2 = \beta^2 + 2$ ) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы не возникает  $n$ -нулей интенсивности, по которым можно определить топологический заряд исходного вихря. Оптический вихрь восстанавливается и по-прежнему имеет в центре изолированный ноль интенсивности  $n$ -кратно вырожденный. А во-вторых, нами получено двухпараметрическое  $(n, \beta)$  семейство АЭГ вихрей, которые облада-

ют свойством Фурье-инвариантности (с точностью до изменения масштаба и поворота на 90 градусов). Комплексную амплитуду таких АЭГ-вихрей в начальной плоскости ( $z=0$ ) в безразмерных координатах можно записать:

$$E_n(x, y, z = 0; \beta) = (x + iy)^n \exp \left[ -(2 + \beta^2)x^2 - \beta^2 y^2 - 2ixy \right]. \quad (14)$$

Нормированный ОУМ АЭГ-вихрей (14) дробный, следует из (9) и равен:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{i}{\beta \sqrt{\beta^2 + 2}} \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{P_n^0(\xi)}. \quad (15)$$

Исходя из (14), можно получить комплексную амплитуду светового поля на любом расстоянии  $z$  и в размерных величинах:

$$E_n(x, y, z) = \frac{1}{z(1 + b_y)} (u + iv)^n \times \exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) - b_y u^2 - b_x v^2 + 2iuv \right], \quad (16)$$

где

$$u = \frac{\sqrt{kf}}{z(1 + b_y)} x, \quad v = \frac{\sqrt{kf}}{z(1 + b_y)} y, \quad (17)$$

$$b_{x,y} = \frac{4f}{k} \left( \frac{1}{w_{x,y}^2} + \frac{ik}{4f} - \frac{ik}{2z} \right).$$

Причём радиусы перетяжки эллиптического Гауссова пучка не произвольные и должны удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{w_x^2} = \frac{1}{w_y^2} + \frac{k}{2f}. \quad (18)$$

В безразмерных переменных условие (18) эквивалентно ранее приведённому ( $\gamma^2 = \beta^2 + 2$ ).

Можно показать, что световое поле, описываемое амплитудой (16), удовлетворяет параксиальному уравнению Гельмгольца:

$$\left[ 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] E_n(x, y, z) = 0. \quad (19)$$

Из (16) следует выражение для комплексной амплитуды АЭГ-вихря на расстоянии  $z = 2f$ :

$$E_n(x, y, z = 2f) = (-i)^{n+1} \left( 1 + \frac{2f}{z_{0y}} \right)^{-n-1} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{f}} \right)^n \times (x + iy)^n \exp \left\{ \frac{ik}{4f} (x^2 + y^2) \right\} \times \exp \left\{ - \left[ \frac{kx^2}{2z_{0y}} + \frac{ky^2}{2f} \left( 1 + \frac{f}{z_{0y}} \right) - \frac{ikxy}{2f} \right] \left( 1 + \frac{2f}{z_{0y}} \right)^{-2} \right\}, \quad (20)$$

где  $z_{0y} = kw_y^2/2$  – длина Рэлея по оси  $y$ . Если наложить ограничение на параметры Гауссова пучка и фокусное расстояние цилиндрической линзы ( $z_{0y} = 2f$ ), то выражение (20) упростится:

$$E_n(x, y, z = z_{0y} = 2f) = \left(\frac{-i}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^n (x + iy)^n \times \exp\left[\frac{ik}{4f}(x^2 + y^2) - \frac{k}{16f}(x^2 + 3y^2 - 2ixy)\right]. \quad (21)$$

Выражение (21) совпадает с правой частью (13) в безразмерных переменных с точностью до постоянной и с учётом квадратичного фазового множителя

$$\exp\left[ik(x^2 + y^2)/(4f)\right].$$

Если устремить в (16)  $z$  к нулю, то в пределе получим начальную амплитуду, совпадающую в безразмерных переменных с (14), где

$$\beta^2 = 2f/z_y = 4f/(kw_y^2).$$

### 3. Результаты моделирования

В табл. 1 показаны рассчитанные по формуле (16) распределения интенсивности и фазы для АЭГ-вихрей при разных топологических зарядах и на разных расстояниях  $z$  от начальной плоскости. Параметры расчёта: начальные радиусы перетяжки эллиптического Гауссова пучка  $w_x = 123$  мкм и  $w_y = 3w_x = 369$  мкм, длина волны – 532 нм. Из табл. 1 видно, что интенсивность АЭГ-вихрей (при  $n > 0$ ) представляет собой по внешнему виду два квазиэллиптических Гауссовых пучка, большие оси которых лежат на одной прямой и которые разделены расстоянием  $L$ , зависящим как корень квадратный от величины топологического заряда  $n$ :

$$L = w_y(z)\sqrt{n}, \quad (22)$$

где радиус перетяжки Гауссова пучка по одной из координат при любом  $z$  имеет вид:

$$w_y(z) = (kw_y)^{-1} \left[ z^2(z_y + 2f)^2 + z_y^2(z - 2f)^2 \right]^{1/2}. \quad (23)$$

Из (23) видно, что зависимость от расстояния  $z$  радиуса перетяжки у эллиптического Гауссова пучка отличается от такой зависимости для обычного Гауссова пучка.

При распространении в свободном пространстве АЭГ-вихри сохраняют свою структуру, меняются масштабно (расстояние между максимумами двух светлых пятен увеличивается) и вращаются вокруг оптической оси. При этом на самой оптической оси остаётся изолированный  $n$ -кратно вырожденный ноль интенсивности, фаза при обходе вокруг которого меняется на  $2\pi n$ . Но и при  $n = 0$  АЭГ-вихрь, хо-

тя и не имеет вихревой составляющей (нуля интенсивности в центре), тем не менее, обладает ОУМ (остаётся астигматическая составляющая). Из (15) и соотношения начальных радиусов перетяжки  $w_y = 3w_x$  ( $\beta^2 = 1/4$ , так как  $\gamma^2 - \beta^2 = 2$  и потому, согласно определению  $\beta$  и  $\gamma$ ,  $(\beta w_y/w_x)^2 - \beta^2 = 8\beta^2 = 2$ ) следует, что ОУМ пучков в табл. 1 равен:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{4i}{3} \frac{P_{n+1}^1(5/3)}{P_n^0(5/3)}. \quad (24)$$

Из табл. 1 также видно, что АЭГ-вихри при любом  $n$  при распространении вращаются независимо от величины  $n$  против часовой стрелки. Можно показать, что угол поворота  $\theta$  АЭГ-вихря как целого зависит от расстояния  $z$  следующим образом:

$$\operatorname{tg} \theta = \left( \frac{2f}{z_y} + 1 \right) \left( \frac{2f}{z} - 1 \right)^{-1}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что при  $z = 0$  угол поворота равен  $\theta = 0$  (пучок вытянут вдоль вертикальной оси, так как  $w_y = 3w_x$ ), при  $z = 2f$  угол поворота равен  $\theta = \pi/2$  (пучок вытянут вдоль горизонтальной оси), а при  $z = f$  угол немного больше  $\pi/4$  (так как  $z_y \gg 2f$  при выбранных параметрах) и равен:

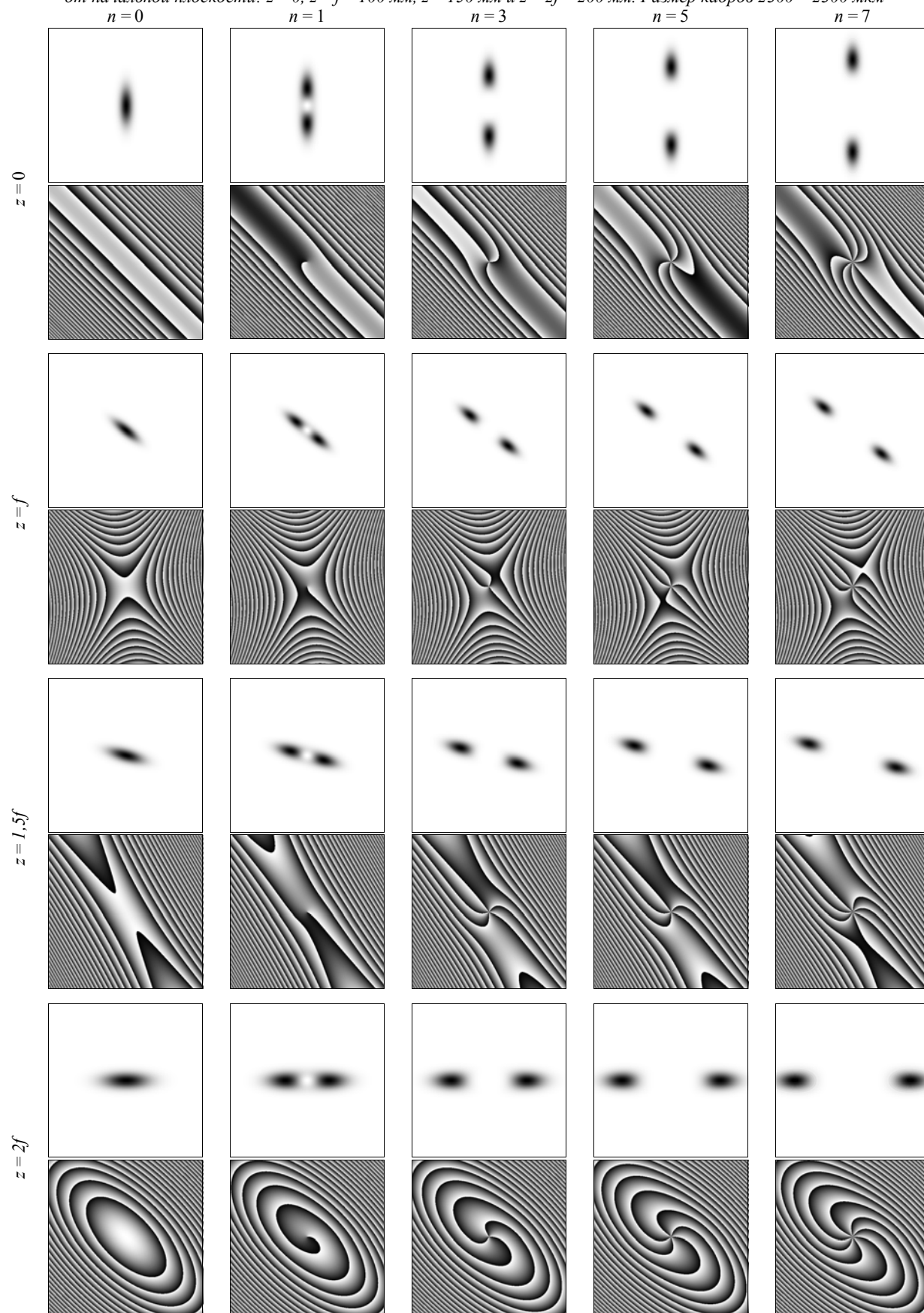
$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{2f}{z_y} + 1 \right). \quad (26)$$

Эти выводы подтверждаются углом поворота пучка в табл. 1.

### 4. Фокусировка эллиптических оптических вихрей с помощью цилиндрической линзы

Для подтверждения теории и расчётов было проведено экспериментальное наблюдение распространения АЭГ-вихрей. На рис. 1 показана оптическая схема установки, использованной в эксперименте. Эллиптический Гауссов лазерный пучок ( $\lambda = 532$  нм) с параметром эллиптичности 1:3 направлялся на дисплей пространственного модулятора света SLM (HOLOEYE, PLUTO-VIS). Модулятор света был использован для реализации фазовой маски в виде  $\tau(r, \phi) = \exp(i[n\phi + \alpha x])$  ( $(r, \phi)$  – полярные координаты,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\alpha$  – пространственная частота несущей,  $n$  – топологический заряд), генерирующей внеосевой заданный вихревой пучок. Отражённый от модулятора и промодулированный по фазе эллиптический пучок с помощью комбинации линз  $L_1, L_2$  ( $f_1 = 350$  мм,  $f_2 = 150$  мм) и зеркал  $M_1, M_2$  направлялся на цилиндрическую линзу  $CL_1$  ( $f_3 = 100$  мм), наклонённую под углом  $45^\circ$  градусов в плоскости, перпендикулярной оси распространения пучка. Система линз строила изображение плоскости, сопряжённой с плоскостью дисплея модулятора, в плоскости цилиндрической линзы  $z = 0$ .

Табл. 1. Распределения интенсивности (строки 1, 3, 5, 7) и фазы (строки 2, 4, 6, 8), рассчитанные по формуле (16) для АЭГ-вихрей с параметром эллиптичности 1:3 и топологическими зарядами  $n = 0, 1, 3, 5, 7$  на различных расстояниях от начальной плоскости:  $z = 0, z = f = 100$  мм,  $z = 150$  мм и  $z = 2f = 200$  мм. Размер кадров  $2300 \times 2300$  мкм



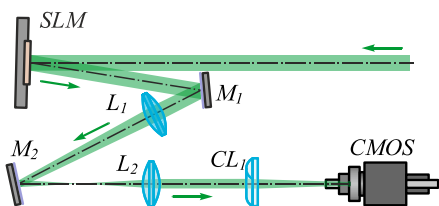


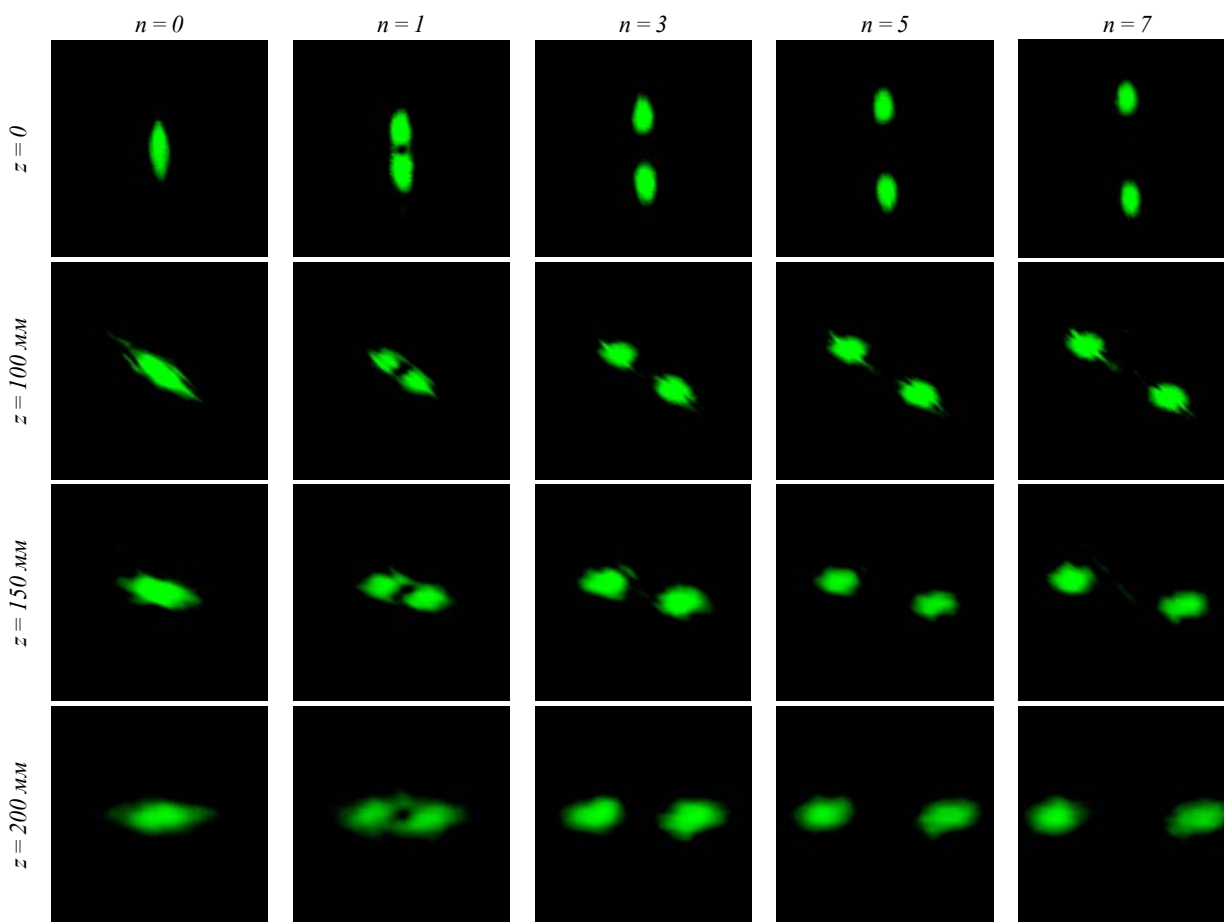
Рис. 1. Оптическая схема для исследования фокусировки эллиптических оптических вихрей с помощью цилиндрической линзы: SLM – пространственный модулятор света HOLOEYE PLUTO-VIS,  $M_1$  и  $M_2$  – зеркала,  $L_1$  и  $L_2$  – сферические линзы ( $f_1 = 350$  мм,  $f_2 = 150$  мм),  $CL_1$  – цилиндрическая линза ( $f_3 = 100$  мм), CMOS – видеокамера TourCam U3CMOS08500KPA

CMOS-видеокамера, расположенная на оптическом рельсе, позволяла снимать формируемые распределения интенсивности пучка на различном расстоянии  $z$  от плоскости цилиндрической линзы. Изображения, полученные на расстояниях  $z = 0, 100, 150$  и  $200$  мм, представлены в табл. 2.

В табл. 2 видно, что при  $n = 0$  формируется одно эллиптическое световое пятно, а при  $n = 1, 3, 5, 7$  формируется два пятна, причём при  $n = 1$  эти пятна не успевают разойтись и между ними возникает интерференция.

Из сравнения табл. 1 и табл. 2 видно хорошее согласие теории и эксперимента.

Табл. 2. Распределения интенсивности, полученные для случая фокусировки эллиптических вихревых пучков с параметром эллиптичности 1:3 и топологическим зарядом  $n = 0, 1, 3, 5$  и  $7$  на различных расстояниях от плоскости цилиндрической линзы:  $z = 0, 100$  (фокусное расстояние),  $150$  и  $200$  мм (двойное фокусное расстояние). Размер кадров  $2300 \times 2300$  мкм



На рис. 2 показаны две интерферограммы, полученные для АЭГ-вихрей, показанных в табл. 2, при  $z = 2f$  и  $n = 1, 3$ . Из рис. 2 видно, что действительно, в центре пучка сохраняется оптический вихрь с топологическим зарядом  $n = 1$  (рис. 2а) и  $n = 3$  (рис. 2б). Интерферограммы для  $n = 5, 7$  получились с низким контрастом полос, так как в промежутке между двумя локальными максимумами (табл. 2) почти нулевая интенсивность света.

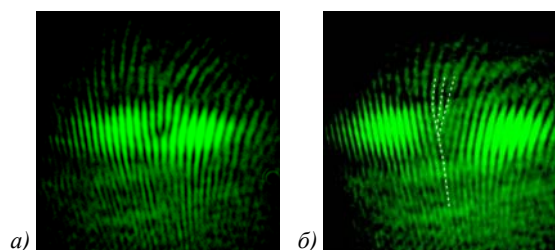


Рис. 2. Интерферограммы АЭГ-вихрей, полученных на расстоянии  $z = 2f$  (табл. 2, строка 4) при  $n = 1$  (а) и  $n = 3$  (б)

### Заключение

В работе получены следующие результаты. Найдено новое модовое решение параксиального уравнения Гельмгольца. Это решение описывает семейство неортогональных лазерных мод – астигматических эллиптических Гауссовых оптических вихрей. Такие пучки в начальной плоскости представляют собой изолированный  $n$ -кратно вырожденный ноль интенсивности, внедрённый в центр перетяжки эллиптического Гауссова пучка, главные оси эллипса которого расположены вдоль декартовых осей, прошедшего цилиндрическую линзу, ось которой повернута в начальной плоскости вокруг оптической оси на 45 градусов по отношению к декартовым осям. Радиусы перетяжки Гауссова пучка не произвольные, а связаны определённым соотношением. Найдены нормированный на мощность пучка полный орбитальный угловой момент. Он равен сумме двух слагаемых, одно из которых равно топологическому заряду  $n$  оптического вихря, а второе слагаемое описывает вклад безвихревого астигматического эллиптического Гауссова пучка. Орбитальный момент таких пучков может быть дробным, целым или нулевым. Найденные модовые пучки при распространении сохраняют свою структуру, меняются только масштаб и вращаются вокруг оптической оси. На двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы пучок поворачивается на 90 градусов. Распределение интенсивности таких пучков имеет характерный вид: два почти эллиптических световых пятна, большие оси которых лежат на одной прямой, и расстояние между максимумами этих световых пятен зависит как корень квадратный от величины топологического заряда и увеличивается при распространении пучка в свободном пространстве. Заметим, что в таких пучках из-за согласованности радиусов перетяжки эллиптического Гауссова пучка и угла наклона цилиндрической линзы, цилиндрическая линза не «снимает» вырождение центрального нуля интенсивности и не «разваливает» его на  $n$  разделённых в пространстве нулей интенсивности, как это принято считать [1].

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 17-19-01186) в частях «Амплитуда пучка на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы» и «Фокусировка эллиптических оптических вихрей с помощью цилиндрической линзы», Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Семейство астигматических эллиптических Гауссовых вихрей» и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части «Результаты моделирования».

### Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4110. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
2. **Bekshaev, A.Ya.** Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2003. – Vol. 20, Issue 8. – P. 1635-1643. – DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
3. **Denisenko, V.** Determination of topological charges of polychromatic optical vortices / V. Denisenko, V. Shvedov, A.S. Desyatnikov, D.N. Neshev, W. Krolikowski, A. Volar, M. Soskin, Y.S. Kivshar // *Optics Express*. – 2009. – Vol. 17, Issue 26. – P. 23374-23379. – DOI: 10.1364/OE.17.023374.
4. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 21. – P. 5019-5022. – DOI: 10.1364/OL.41.005019.
5. **Alperin, S.N.** Angular momentum of topologically structured darkness / S.N. Alperin, M.E. Siemens // *Physical Review Letters*. – 2017. – Vol. 119. – P. 203902. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.203902.
6. **Abramochkin, E.G.** Beam transformations and transformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
7. **Courtial, J.** Gaussian Beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1997. – Vol. 144(4-6). – P. 210-213. – DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
8. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 1. – P. 141-156. – DOI: 10.1364/OE.26.000141.
9. **Chávez-Cedra, S.** Elliptic vortices of electromagnetic wave fields / S. Chávez-Cedra, J.C. Gutiérrez-Vega, G.H. New // *Optics Letters*. – 2001. – Vol. 26, Issue 22. – P. 1803-1805. – DOI: 10.1364/OL.26.001803.
10. **Bandres, M.A.** Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators / M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2004. – Vol. 21, Issue 5. – P. 873-880. – DOI: 10.1364/JOSAA.21.000873.
11. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31, Issue 2. – P. 274-282. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.
12. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 40, Issue 5. – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
13. **Bekshaev, A.Ya.** Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Optics Communications*. – 2004. – Vol. 241, Issues 4-6. – P. 237-247. – DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
14. **Maji, S.** Controlled noncanonical vortices from higher-order fractional screw dislocations / S. Maji, M.M. Brundavanam // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42, Issue 12. – P. 2322-2325. – DOI: 10.1364/OL.42.002322.
15. **Volyar, A.V.** Super pulses of orbital angular momentum in fractional-order spiroid vortex beams / A.V. Volyar, Yu.A. Egorov // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 1. – P. 74-77. – DOI: 10.1364/OL.43.000074.

16. **Melo, L.A.** Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture / L.A. Melo, A.J. Jesus-Silva, S. Chavez-Cedra, P.H.S. Ri-

beiro, W.C. Soares // Scientific Reports. – 2018. – Vol. 8. – 6370. – DOI: 10.1038/s41598-018-24928-5.

### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Порфирьев Алексей Петрович**, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование, структурированные лазерные пучки. E-mail: [porfirev.alexey@smr.ru](mailto:porfirev.alexey@smr.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 2 июля 2018 г. Окончательный вариант – 10 сентября 2018 г.

## A VARIETY OF FOURIER-INVARIANT GAUSSIAN BEAMS

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.P. Porfirev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia;

<sup>2</sup> Samara National Research University, Moskovskoye shosse 34, 443086, Samara, Russia

### Abstract

A two-parameter family of astigmatic elliptical Gaussian (AEG) optical vortices is found, which are free space modes up to scale and rotation. We calculate the total normalized orbital angular momentum of AEG vortices, which can be integer, fractional and zero, and which is equal to the algebraic sum of two terms corresponding to the contribution of the vortex and astigmatic components of the light field. In any transverse plane, such a beam has an isolated  $n$ -fold degenerate intensity null on the optical axis (an optical vortex) embedded into an elliptical Gaussian beam. In addition to the quadratic elliptical phase, the beam has a phase of a cylindrical lens rotated by an angle of 45 degrees relative to the principal axes of the Gaussian beam intensity ellipse.

**Keywords:** elliptic Gaussian vortex, cylindrical lens, space mode, orbital angular momentum.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. A variety of Fourier-invariant Gaussian beams. Computer Optics 2018; 42(5): 727-735. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-727-735.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the Russian Science Foundation under project No. 17-19-01186 (“The beam amplitude at a distance of double focal length from the cylindrical lens” and “Focusing of elliptical optical vortices by a cylindrical lens”), by the Russian Foundation for Basic Research under project No. 18-29-20003 (“Family of astigmatic elliptical Gaussian vortices”) and by Ministry of Science and Higher Education within the State assignment FSRC “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-ГЗ/Ч3363/26 (“Simulation results”).

### References

[1] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transverse forms of an optical vortex for measurement of its topological charge. Appl Opt 2017; 56(14): 4095-4110. DOI: 10.1364/AO.56.004095.

[2] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. J Opt Soc Am A 2003; 20(8): 1635-1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.

[3] Denisenko V, Shvedov V, Desyatnikov AS, Neshev DN, Krolikowski W, Volar A, Soskin M, Kivshar YS. Determi-



- nation of topological charges of polychromatic optical vortices. *Opt Express* 2009; 17(26): 23374-23379. DOI: 10.1364/OE.17.023374.
- [4] Alperin SN, Niederriter RD, Gopinath JT, Siemens ME. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41(21): 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
- [5] Alperin SN, Siemens ME. Angular momentum of topologically structured darkness. *Phys Rev Lett* 2017; 119: 203902. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.203902.
- [6] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Beam transformations and transformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [7] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian Beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4-6): 210-213. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- [8] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141-156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.
- [9] Chávez-Cedra S, Gutiérrez-Vega JC, New GH. Elliptic vortices of electromagnetic wave fields. *Opt Lett* 2001; 26(22): 1803-1805. DOI: 10.1364/OL.26.001803.
- [10] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. *J Opt Soc Am A* 2004; 21(5): 873-880. DOI: 10.1364/JOSAA.21.000873.
- [11] Kotlyar VV, Kovalev AA. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(2): 274-282. DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2014; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- [13] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens. *Opt Commun* 2004; 241(4-6): 237-247. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
- [14] Maji S, Brundavanam MM. Controlled noncanonical vortices from higher-order fractional screw dislocations. *Opt Lett* 2017; 42(12): 2322-2325. DOI: 10.1364/OL.42.002322.
- [15] Volyar AV, Egorov YuA. Super pulses of orbital angular momentum in fractional-order spiroid vortex beams. *Opt Lett* 2018; 43(1): 74-77. DOI: 10.1364/OL.43.000074.
- [16] Melo LA, Jesus-Silva AJ, Chavez-Cedra S, Ribeiro PHS, Soares WC. Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture. *Sci Rep* 2018; 8: 6370. DOI: 10.1038/s41598-018-24928-5.

#### Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

**Alexey Petrovich Porfirev** (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics, optical manipulation and structured laser beams.

*Received June 2, 2018. The final version – September 10, 2018.*