

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка

В.В. Котляр^{1,2}, С.С. Стафеев^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,

443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

С помощью формализма Ричардса–Вольфа получены общие формулы для проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей вблизи острого фокуса оптического вихря с топологическим зарядом m и азимутальной поляризацией порядка n . Получены простые следствия из этих формул при разных значениях чисел m и n . При условии $m = n > 1$ на оптической оси будет отличная от нуля интенсивность, такая же, как при фокусировке светового поля без вихря и с круговой поляризацией. А при условии $n = m + 2$ вблизи оптической оси в плоскости фокуса будет иметь место обратный поток световой энергии. Полученные формулы можно использовать как для моделирования острой фокусировки оптических полей с двойной сингулярностью (фазовой и поляризационной), так и для теоретического анализа распределений интенсивности и вектора Пойнтинга в фокусе.

Ключевые слова: острая фокусировка, формулы Ричардса–Вольфа, оптический вихрь, топологический заряд, фазовая сингулярность, поляризационная сингулярность, вектор Пойнтинга, обратный поток энергии, симметрия фокусного пятна.

Цитирование: Котляр, В.В. Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 337-346. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.

Введение

Начиная с классической работы Ричардса–Вольфа [1], в которой получены аналитические выражения для распределения вектора напряженности электрического поля с линейной поляризацией вблизи фокуса в апланатической системе, появилось множество работ по теоретическому и численному исследованию световых полей, в том числе вихревых, с однородной (линейной, круговой, эллиптической) и неоднородной (радиальной, азимутальной) поляризацией вблизи острого фокуса. Так, в [2, 3] рассмотрена фокусировка светового поля с радиальной и азимутальной поляризациями. В обзоре [4] пучки с радиальной и азимутальной поляризацией объединены термином «цилиндрические векторные пучки». В [5] получены формулы для проекций электрического вектора вблизи фокуса для оптического вихря произвольного целого порядка с эллиптической поляризацией. В [6] рассмотрены цилиндрические пучки высших порядков. Но вместе световые поля с произвольной фазовой и поляризационной сингулярностями рассмотрены не были. В [7–9] цилиндрические векторные пучки рассматриваются на сфере Пуанкаре высшего порядка. В [10] численно моделируется острая фокусировка цилиндрического векторного оптического вихря. В [11] цилиндрические векторные пучки генерируются с помощью микроскопов, в [12] – с помощью дифракционных оптических

элементов, а в [13] – с помощью двухмодового волокна с длиннопериодной решёткой. В [14] рассматривается распространение цилиндрического векторного пучка, смещённого с оптической оси. В [15] острая фокусировка цилиндрического векторного пучка применяется для сверления отверстий. В [16–18] с помощью формализма Ричардса–Вольфа [1] получены выражения для проекций электрического и магнитного векторов вблизи фокуса для оптического вихря произвольного порядка с линейной и круговой поляризациями [16,17] и для векторного цилиндрического пучка высшего порядка [18].

В данной работе мы обобщили работы [16–18] и получили выражения для проекций электрического и магнитного поля вблизи фокуса для оптического вихря с целым топологическим зарядом m и цилиндрической поляризацией (радиальной и азимутальной) целого порядка n , а также много частных случаев, полезных для практики.

1. Световое поле с фазовой и поляризационной сингулярностью в фокусе апланатической системы

В [16] на основе формализма Ричардса–Вольфа [1] получены формулы для проекций векторов напряженности электрического (Е-вектор) и магнитного (Н-вектор) полей вблизи фокуса оптического вихря (поля с фазовой сингулярностью) с линейной или

круговой поляризацией. Наряду с фазовыми сингулярностями широко исследуются поляризационные сингулярности, которые, как известно, возникают, если в точке не определена эллиптичность поляризации или её направление (C-points и V-points) [19]. Поляризационные сингулярности вида C-points могут иметь структуру «лимон», «монстр» и «звезда», характеризующуюся полуцелым индексом (1/2, 1/2 и -1/2 соответственно). Поляризационные сингулярности вида V-points имеют нулевую интенсивность и включают в себя радиальную и азимутальную поляризацию с целым индексом [20]. В данной работе рассматривается именно обобщение радиальной и азимутальной поляризации, когда при обходе вокруг сингулярности вектор поляризации меняет направление несколько раз. На основе формул из [16] получены проекции вблизи фокуса для светового поля одновременно с поляризационной сингулярностью n -го порядка и фазовой сингулярностью m -го порядка. Из этих формул, как частный случай, получаются выражения для светового поля с радиальной или азимутальной поляризациями.

Пусть поперечные проекции начального E-поля (в выходном зрачке апланатической оптической системы [2]) описываются вектором Джонса вида:

$$\mathbf{E} = A(\theta)e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где (θ, φ) – углы, задающие единичный вектор или точку на сфере единичного радиуса, m, n – целые положительные числа, $A(\theta)$ – амплитуда спектра плоских волн, формирующих оптический вихрь с комплексной амплитудой

$$E_0 = A(\theta)e^{im\varphi}. \tag{2}$$

Векторное цилиндрическое поле с поляризацией (1) будем называть вихревым полем с радиальной поляризацией n -го порядка, так как при $n=1$ поле (1) описывает оптический вихрь с радиальной поляризацией. Заметим, что при $n=0$ поле (1) описывает оптический вихрь с линейной поляризацией. Поле (1) можно представить в виде суммы двух оптических вихрей с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A(\theta)e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}A(\theta)e^{i(m+n)\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}A(\theta)e^{i(m-n)\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Вектора Джонса $(1, -i)^T$ и $(1, i)^T$ описывают левую и правую круговые поляризации. Напомним выражения для проекций E-поля

$$\mathbf{E} = A(\theta)e^{im\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma i \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\sigma = 1$ – правая круговая, $\sigma = -1$ – левая круговая и $\sigma = 0$ – линейная поляризации, вблизи фокуса апланатической системы из [16]:

$$\begin{aligned} E_x &= -i^{m+1}e^{im\varphi} (I_{0,m} + \gamma_+ e^{i2\varphi} I_{2,m+2} + \gamma_- e^{-i2\varphi} I_{2,m-2}), \\ E_y &= i^m e^{im\varphi} (\sigma I_{0,m} - \gamma_+ e^{i2\varphi} I_{2,m+2} + \gamma_- e^{-i2\varphi} I_{2,m-2}), \\ E_z &= -2i^m e^{im\varphi} (\gamma_+ e^{i\varphi} I_{1,m+1} - \gamma_- e^{-i\varphi} I_{1,m-1}), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} I_{0,m} &= \left(\frac{\pi f}{\lambda}\right)^\alpha \int_0^\alpha \sin \theta \cos^{1/2} \theta (1 + \cos \theta) \times \\ &\quad \times A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_m(x) d\theta, \\ I_{1,m\pm 1} &= \left(\frac{\pi f}{\lambda}\right)^\alpha \int_0^\alpha \sin^2 \theta \cos^{1/2} \theta \times \\ &\quad \times A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{m\pm 1}(x) d\theta, \\ I_{2,m\pm 2} &= \left(\frac{\pi f}{\lambda}\right)^\alpha \int_0^\alpha \sin \theta \cos^{1/2} \theta (1 - \cos \theta) d\theta \times \\ &\quad \times A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{m\pm 2}(x) d\theta, \end{aligned} \tag{6}$$

где f – фокусное расстояние апланатической системы, λ – длина волны, $NA = \sin \alpha$ – числовая апертура, $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода ν -го порядка, $x = kr \sin \theta$, (x, y, z) и (r, φ, z) – декартовы и цилиндрические координаты, $\gamma_\pm = (1 \pm \sigma)/2$. В качестве функции $A(\theta)$ можно использовать функции Бесселя–Гаусса [2]

$$A(\theta) = J_1 \left(2\beta \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) \exp \left[-\beta^2 \left(\frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right)^2 \right], \tag{7}$$

где β – отношение радиуса зрачка апланатической системы к радиусу перетяжки Гауссова пучка.

Приведём сначала общее выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса ($z=0$) оптического вихря с любой однородной поляризацией (линейной, правой и левой круговой и эллиптической, если $\sigma \neq 0, \pm 1$), которого нет в [16]:

$$\begin{aligned} I(r, \varphi, z=0) &= (1 + \sigma^2) I_{0,m}^2 + \\ &+ 2\gamma_+^2 (I_{2,m+2}^2 + 2I_{1,m+1}^2) + 2\gamma_-^2 (I_{2,m-2}^2 + 2I_{1,m-1}^2) + \\ &+ 4\gamma_+ \gamma_- \cos 2\varphi [I_{0,m} (I_{2,m+2} + I_{2,m-2}) - 2I_{1,m+1} I_{1,m-1}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) видно, что для линейной и эллиптической поляризации распределение интенсивности в фокусе не будет иметь круговой симметрии, а будет зависеть от косинуса двойного азимутального угла (при любом m). И только для оптического вихря с левой ($\gamma_+ = 0, \gamma_- = 1$) или правой ($\gamma_+ = 1, \gamma_- = 0$) круговой поляризациями распределение интенсивности в плоскости фокуса имеет радиальную (осевую) симметрию. Из (8) видно, что в центре фокусного пятна интенсивность будет отлична от нуля только при $m=0$ (для любой однородной поляризации) и $m=1, 2$ (для левой круговой и линейной поляризации).

Вернёмся к основной цели данной работы и получим выражения для проекций E-вектора вблизи фокуса для начального поля (3), складывая выражения из (5) для левой и правой поляризации. Получим:

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{1}{2} i^{m+n+1} e^{i(m+n)\varphi} (I_{0,m+n} + e^{-i2\varphi} I_{2,m+n-2}) - \frac{1}{2} i^{m-n+1} e^{i(m-n)\varphi} (I_{0,m-n} + e^{i2\varphi} I_{2,m-n+2}), \\
 E_y &= -\frac{1}{2} i^{m+n} e^{i(m+n)\varphi} (I_{0,m+n} - e^{-i2\varphi} I_{2,m+n-2}) + \frac{1}{2} i^{m-n} e^{i(m-n)\varphi} (I_{0,m-n} - e^{i2\varphi} I_{2,m-n+2}), \\
 E_z &= i^{m+n} e^{i(m+n-1)\varphi} I_{1,m+n-1} - i^{m-n} e^{i(m-n+1)\varphi} I_{1,m-n+1}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

В (9) величины $I_{0,m\pm n}$, $I_{1,m\pm n\mp 1}$, $I_{2,m\pm n\mp 2}$, как и в (6), обозначают интегралы. Первый индекс обозначает тип интеграла, а второй – номер функции Бесселя, стоящей под интегралом.

Аналогично можно получить выражения для проекций E-вектора вблизи фокуса в апланатической системе для исходного оптического вихря с топологическим зарядом m и азимутальной поляризацией n -го порядка:

$$\mathbf{E} = A(\theta) e^{im\varphi} \begin{pmatrix} -\sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Для начального поля (10) получим вместо (9) выражения:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{1}{2} i^{m+n} e^{i(m+n)\varphi} (I_{0,m+n} + e^{-i2\varphi} I_{2,m+n-2}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} i^{m-n} e^{i(m-n)\varphi} (I_{0,m-n} + e^{i2\varphi} I_{2,m-n+2}), \\
 E_y &= -\frac{1}{2} i^{m+n+1} e^{i(m+n)\varphi} (I_{0,m+n} - e^{-i2\varphi} I_{2,m+n-2}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} i^{m-n+1} e^{i(m-n)\varphi} (I_{0,m-n} - e^{i2\varphi} I_{2,m-n+2}), \\
 E_z &= -i^{m+n-1} e^{i(m+n-1)\varphi} I_{1,m+n-1} + \\
 &\quad + i^{m-n+1} e^{i(m-n+1)\varphi} I_{1,m-n+1}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

В (9) и (11) числа m и n входят только в виде суммы и разности. Поэтому при условии $m = n > 1$ на оптической оси интенсивность всегда будет одна и та же и отлична от нуля, а само поле будет иметь вид: $|E_x| = |E_y| = (1/2) I_{0,0}$ ($r = 0$), $E_z = 0$. Это означает, что на оптической оси вблизи фокуса обе сингулярности компенсируют друг друга. При этом на оптической оси, как следует из (5) при $m = 0$, будет такая интенсивность, как будто сфокусировался свет с круговой поляризацией и без вихря.

Аналогично (11), приведём выражения для проекций вектора напряжённости магнитного поля (H-поля) вблизи фокуса апланатической системы для исходного светового поля в виде (10):

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{1}{2} i^{m+n+1} e^{i(m+n)\varphi} (I_{0,m+n} + e^{-i2\varphi} I_{2,m+n-2}) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} i^{m-n+1} e^{i(m-n)\varphi} (I_{0,m-n} + e^{i2\varphi} I_{2,m-n+2}), \\
 H_y &= \frac{1}{2} i^{m+n} e^{i(m+n)\varphi} (I_{0,m+n} - e^{-i2\varphi} I_{2,m+n-2}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} i^{m-n} e^{i(m-n)\varphi} (I_{0,m-n} - e^{i2\varphi} I_{2,m-n+2}), \\
 H_z &= -i^{m+n} e^{i(m+n-1)\varphi} I_{1,m+n-1} - i^{m-n} e^{i(m-n+1)\varphi} I_{1,m-n+1}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

На основе (11) и (12) получим выражение в плоскости фокуса ($z = 0$) для продольной проекции вектора Пойнтинга [1] $\mathbf{S} = [c/(8\pi)] \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$, где c – скорость света в вакууме, Re – вещественная часть числа, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ – векторное произведение, $*$ – комплексное сопряжение (далее опустим постоянную $c/(8\pi)$):

$$S_z = \frac{1}{2} (I_{0,m+n}^2 + I_{0,m-n}^2 - I_{2,m+n-2}^2 - I_{2,m-n+2}^2). \tag{13}$$

В частном случае при $m = 0$ выражение (13) совпадает с аналогичным выражением, полученным в [18]. Из (13) следует, что при условии $n = m + 2$ на оптической оси в плоскости фокуса всегда будет отрицательный (обратный) поток энергии:

$$\begin{aligned}
 S_{z,m=n+2}(z = r = 0) &= -\frac{1}{2} I_{2,0}^2 = \\
 &= -\left(\frac{\pi f}{\sqrt{2}\lambda} \int_0^\alpha \sin \theta \cos^{1/2} \theta (1 - \cos \theta) A(\theta) d\theta \right)^2.
 \end{aligned} \tag{14}$$

2. Частные случаи из общей формулы

Из (9) и (11) можно получить несколько практически интересных частных случаев.

2.1. Линейно поляризованный оптический вихрь m -го порядка

Положив в (9) $n = 0$, получим выражения для поля, описывающего оптический вихрь m -го порядка с линейной поляризацией вблизи фокуса:

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{1}{2} i^{m+1} e^{im\varphi} (2I_{0,m} + e^{-i2\varphi} I_{2,m-2} + e^{i2\varphi} I_{2,m+2}), \\
 E_y &= -\frac{1}{2} i^m e^{im\varphi} (e^{i2\varphi} I_{2,m+2} - e^{-i2\varphi} I_{2,m-2}), \\
 E_z &= -i^m e^{im\varphi} (e^{i\varphi} I_{1,m+1} - e^{-i\varphi} I_{1,m-1}).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Точные такие же выражения (15) можно получить из (5), положив $\sigma = 0$, $\gamma_+ = \gamma_- = 1/2$. Похожие выражения были получены в [5]. Частным случаем (15) является фокусировка оптического вихря с топологическим зарядом $m = 2$ и линейной поляризацией.

В этом случае распределение интенсивности в плоскости фокуса равно:

$$\begin{aligned}
 I_2(r, \varphi, z = 0) &= I_{0,2}^2 + \frac{1}{2} I_{2,4}^2 + I_{1,2}^2 + \frac{1}{2} I_{2,0}^2 + I_{1,1}^2 + \\
 &\quad + \cos 2\varphi [I_{0,2} (I_{2,4} + I_{2,0}) - 2I_{1,3} I_{1,1}].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Из (15) и (16) при $m = 2$ видно, что на оптической оси нет сингулярности фазы и поляризации, а из-за спин-орбитального преобразования формируется поле с круговой поляризацией и с отличной от нуля интенсивностью $E_y = iE_x = -0,5I_{2,0}$ ($r = 0$).

2.2. Световое поле с обобщённой радиальной поляризацией n -го порядка

Положив в (9) $m=0$, получим выражения для электрического поля с радиальной поляризацией n -го порядка вблизи фокуса:

$$\begin{aligned} E_x &= -i^{n+1} (\cos n\varphi I_{0,n} + \cos(n-2)\varphi I_{2,n-2}), \\ E_y &= -i^{n+1} (\sin n\varphi I_{0,n} - \sin(n-2)\varphi I_{2,n-2}), \\ E_z &= 2i^n \cos(n-1)\varphi I_{1,n-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) видно, что на оптической оси ($r=0$) при $n=2$, отличной от нуля, будет только проекция электрического вектора E_x . Поляризационная сингулярность, присутствовавшая в начальной плоскости, при фокусировке пропала. Заметим, что хотя интенсивность в фокусе на оптической оси отлична от нуля, свет не распространяется в сторону наблюдателя. Покажем, что при этом формируется обратный поток. Действительно, если в (13) положить $m=0$ и $n=2$, то отличными от нуля на оптической оси будут два последних отрицательных слагаемых. При $n>2$ в центре фокусного пятна интенсивность будет равна нулю.

2.3. Световое поле с радиальной поляризацией

Из (17) следуют известные выражения [2] для электрического поля с радиальной поляризацией ($n=1$) вблизи фокуса:

$$\begin{aligned} E_x &= \cos\varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\ E_y &= \sin\varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\ E_z &= -2iI_{1,0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) видно, что на оптической оси у радиально-поляризованного поля в фокусе отличным от нуля будет только продольная составляющая светового поля.

2.4. Световое поле с обобщённой азимутальной поляризацией n -го порядка

Положив в (11) $m=0$, получим известные выражения [18] для электрического поля с азимутальной поляризацией n -го порядка вблизи фокуса:

$$\begin{aligned} E_x &= i^{n+1} (\sin n\varphi I_{0,n} + \sin(n-2)\varphi I_{2,n-2}), \\ E_y &= i^{n+1} (-\cos n\varphi I_{0,n} + \cos(n-2)\varphi I_{2,n-2}), \\ E_z &= -2i^n \sin(n-1)\varphi I_{1,n-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что напрямую из (17) нельзя получить (19) путем замены φ на $\varphi + \pi/(2n)$. В (19), как и в (17), при $n=2$ на оптической оси будет отличной от нуля только одна проекция электрического вектора $E_y = -iI_{2,0}$ ($r=0$). Но точки на оптической оси являются точками сингулярности, так как в этих точках не определена поляризация света. Поэтому свет на оптической оси распространяется в обратном направлении [18]. Можно показать, что на оптической оси при $n=2$ у поля (19), кроме электрической составляющей $E_y = -iI_{2,0}$ ($r=0$), отлична от нуля и проекция магнитного вектора $H_x = -iI_{2,0}$ ($r=0$). То есть на оптической оси вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} составляют правую тройку векторов с волновым вектором \mathbf{k} , у которого $k_z < 0$.

Из (17) и (19) получим выражения для распределений интенсивности в плоскости фокуса ($z=0$) для полей с радиальной и азимутальной поляризацией 2-го порядка ($n=2$):

$$\begin{aligned} I_{rad,2} &= I_{0,2}^2 + I_{2,0}^2 + 2I_{0,2}I_{2,0} \cos 2\varphi + 4I_{1,1}^2 \cos^2 \varphi, \\ I_{az,2} &= I_{0,2}^2 + I_{2,0}^2 - 2I_{0,2}I_{2,0} \cos 2\varphi + 4I_{1,1}^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) видно, что распределение интенсивности в фокусе не обладает радиальной симметрией. Видно также, что одно распределение интенсивности переходит в другое при замене φ на $\varphi + \pi/2$, то есть при повороте на 90 градусов. Причем в центре фокусного пятна обе интенсивности отличны от нуля и равны

$$I_{rad,2} = I_{az,2} = I_{2,0}^2 (r=0).$$

2.5. Световое поле с азимутальной поляризацией

Из (19) следует известное выражение [2] для электрического поля с азимутальной поляризацией ($n=1$) вблизи фокуса:

$$\begin{aligned} E_x &= -\sin\varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\ E_y &= \cos\varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) видно, что в фокусе у азимутально поляризованного поля нет продольной составляющей. Кроме того, из (18) и (21) следует, что распределение интенсивности в фокусе для света с радиальной и азимутальной поляризацией имеет круговую симметрию:

$$\begin{aligned} I_{rad} &= (I_{0,1} - I_{2,1})^2 + 4I_{1,0}^2, \\ I_{az} &= (I_{0,1} + I_{2,1})^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) видно, что форма фокусного пятна у поля с азимутальной поляризацией имеет вид кольца, а у радиальной поляризации – вид круглого пятна.

2.6. Азимутально поляризованный оптический вихрь с единичным топологическим зарядом

Из (11) следуют выражения для проекций \mathbf{E} -вектора вблизи фокуса для оптического вихря с топологическим зарядом $m=1$ и азимутальной поляризацией ($n=1$):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{2} [(I_{0,0} + I_{2,0}) + e^{i2\varphi} (I_{0,2} + I_{2,2})], \\ E_y &= -\frac{i}{2} [(I_{0,0} + I_{2,0}) - e^{i2\varphi} (I_{0,2} + I_{2,2})], \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Распределение интенсивности поля (23) будет обладать круговой симметрией, и в центре фокусного пятна интенсивность будет отлична от нуля:

$$I_{az+vor} = \frac{1}{2} (I_{0,0} + I_{2,0})^2 + \frac{1}{2} (I_{0,2} + I_{2,2})^2. \quad (24)$$

Это свойство (24), наряду с радиальной поляризацией (22), используют для формирования острого фокусного пятна круглой формы [21]. В данном случае фазовая и поляризационные сингулярности на оптической оси компенсировали друг друга, и на оптиче-

ской оси в плоскости фокуса сформируется максимум интенсивности.

3. Моделирование острой фокусировки оптического вихря с радиальной и азимутальной поляризацией высшего порядка

Из (13), (14) следует, что если у оптического вихря с азимутальной поляризацией высшего порядка (10) номера связаны соотношением $n = m + 2$, то вблизи оптической оси имеет место обратный поток энергии, по величине сравнимый с прямым потоком. В этом параграфе на конкретных примерах будет это продемонстрировано. Моделирование острой фокусировки лазерного света с разными порядками фазовой и поляризационной сингулярности производилась с помощью формул Ричардса–Вольфа [1]. Длина волны выбиралась равной $\lambda = 532$ нм, а числовая апертура апланатического объектива выбиралось равной $NA = 0,95$.

На рис. 1 и 2 показаны результаты фокусировки оптического вихря с топологическим зарядом $m = 1$ и с азимутальной поляризацией порядка $n = 3$. На рис. 1 показано распределение направления поляризации

фокусируемого пучка, а также распределение интенсивности, фазы и направления поляризации в плоскости фокуса ($z = 0$), а на рис. 2 – распределения трёх проекций (продольной и двух поперечных) вектора Пойнтинга в той же плоскости. На рис. 1а видно, что при обходе вокруг центра на большом расстоянии от оптической оси направление поляризации повторяется три раза. Наличие спиральной фазы в фокусируемом пучке приводит к существенному изменению направления поляризации в фокусе (рис. 1г). На рис. 2 видно, что продольная проекция вектора Пойнтинга (рис. 2а) имеет круговую симметрию в согласии с (13) и вблизи оптической оси её значения отрицательные (обратный поток). Величина обратного потока примерно в 2 раза меньше максимального значения прямого потока. Заметим, что из вида распределения интенсивности (рис. 1) трудно предположить, что продольное распределение потока энергии (рис. 2а) имеет осевую симметрию. Заметим, что хотя распределение интенсивности (рис. 1) не имеет радиальной симметрии, но оно имеет симметрию 4-го порядка относительно декартовых осей. Из дальнейшего будет ясно, что порядок симметрии распределения интенсивности равен $m + n = 2(n - 1)$.

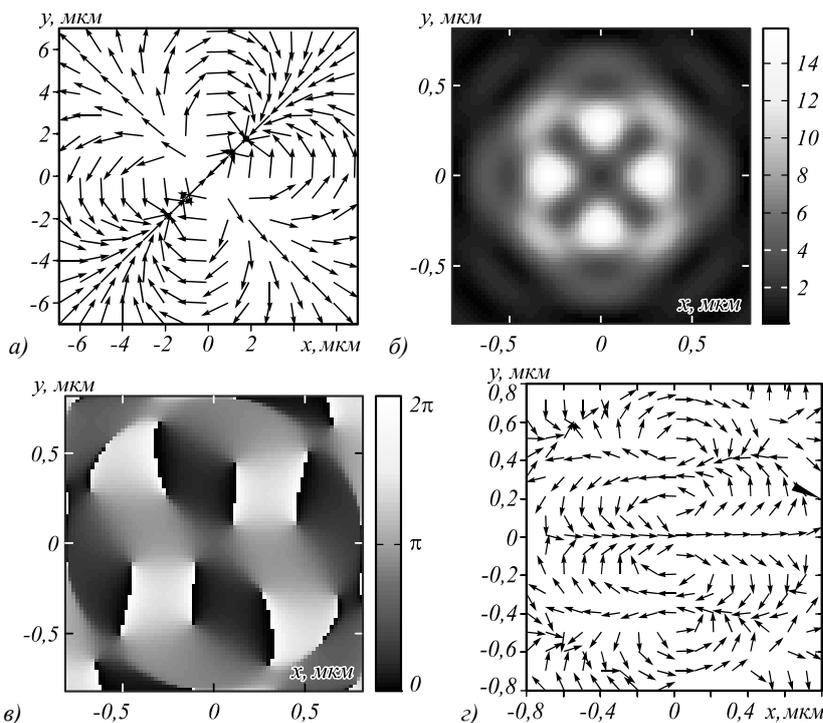


Рис. 1. Направление поляризации в фокусируемом пучке с $m = 1$, $n = 3$ (а); распределение интенсивности $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (б), фазы (в) и направление поляризации (г) в фокусе

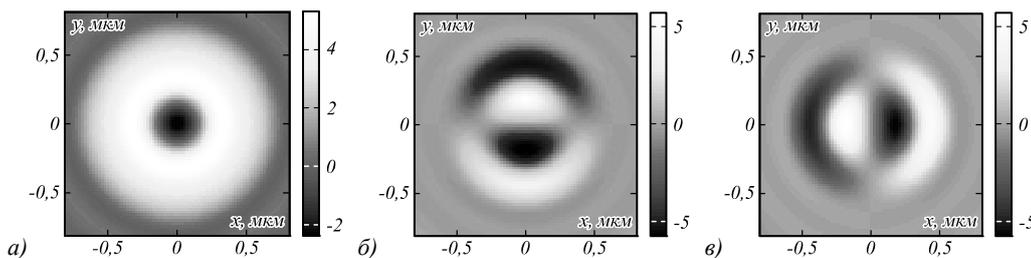


Рис. 2. Распределения компонент вектора Пойнтинга S_z (а), S_x (б), S_y (в) в фокусе ($m = 1$, $n = 3$)

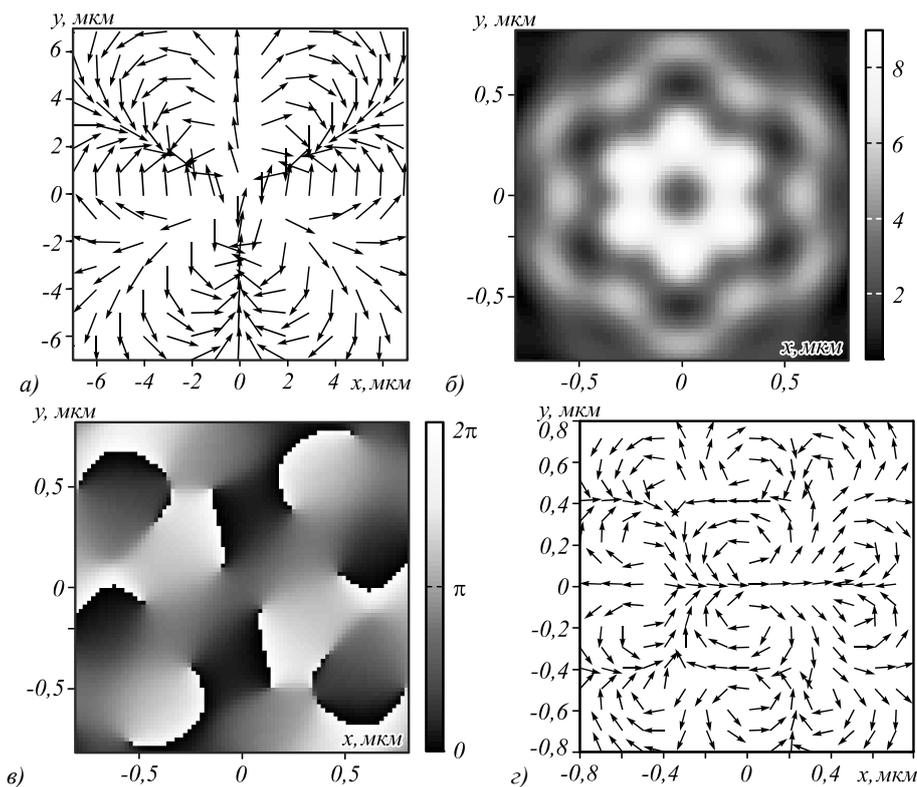


Рис. 3. Направление поляризации в фокусируемом пучке с $m = 2, n = 4$ (а).
 Распределение интенсивности $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (б), фазы (в) и направление поляризации (г) в фокусе

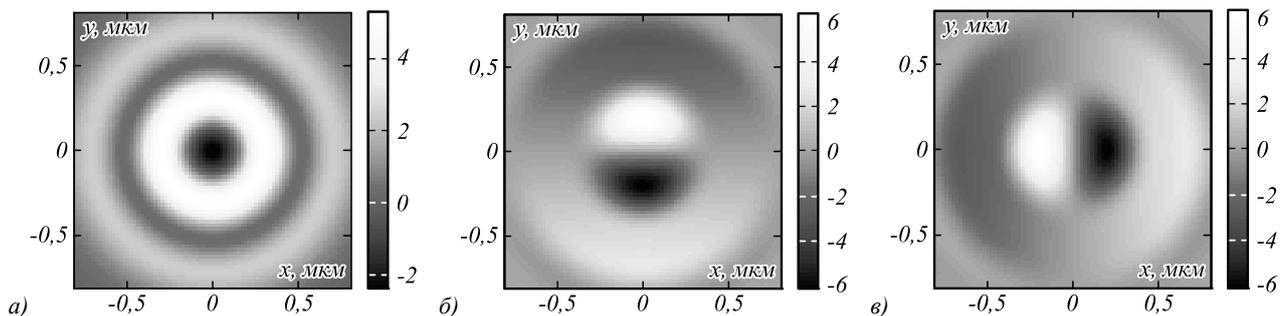


Рис. 4. Распределения компонент вектора Пойнтинга S_z (а), S_x (б), S_y (в) в фокусе ($m = 2, n = 4$)

На рис. 3 и 4 показаны аналогичные картины, но при других параметрах лазерного пучка: $m = 2, n = 4$. На рис. 3а видно, что при обходе вокруг центра на большом расстоянии от оптической оси направление поляризации повторяется четыре раза. Наличие спиральной фазы в фокусируемом пучке приводит к существенному изменению направления поляризации в фокусе (рис. 3г). Из рис. 3 видно, что распределение интенсивности имеет симметрию 6-го порядка, так как $m + n = 2(n - 1) = 6$.

На рис. 4а видно, что вблизи оптической оси поток энергии имеет обратное направление распространения, и распределение продольной компоненты вектора Пойнтинга имеет осевую симметрию. Это трудно предсказать из вида распределения интенсивности на рис. 3. Поперечные проекции вектора Пойнтинга (рис. 4б, в) имеют вид, аналогичный поперечным проекциям на рис. 2б, в.

На рис. 5 показано распределение направления поляризации фокусируемого пучка, а также распределение интенсивности, фазы и направления поляри-

зации для пучка с порядками фазовой и поляризационной сингулярности, равными $m = 3, n = 5$. На рис. 5а видно, что при обходе вокруг центра на большом расстоянии от оптической оси направление поляризации повторяется пять раз. Наличие спиральной фазы в фокусируемом пучке приводит к существенному изменению направления поляризации в фокусе (рис. 5г). Видно, что картина интенсивности имеет 8 порядок симметрии относительно оптической оси, так как $m + n = 2(n - 1) = 8$. Можно предположить, что с ростом номера n ($n = m + 2$) распределение интенсивности в плоскости фокуса всё больше будет приобретать осевую симметрию.

На рис. 6а видно, что вблизи оптической оси поток энергии имеет обратное направление распространения (продольная компонента вектора Пойнтинга вблизи оптической оси отрицательная) и распределение продольной компоненты вектора Пойнтинга имеет осевую симметрию. Поперечные проекции вектора Пойнтинга (рис. 4б, в) имеют вид, аналогичный поперечным проекциям на рис. 2б, в и 4б, в.

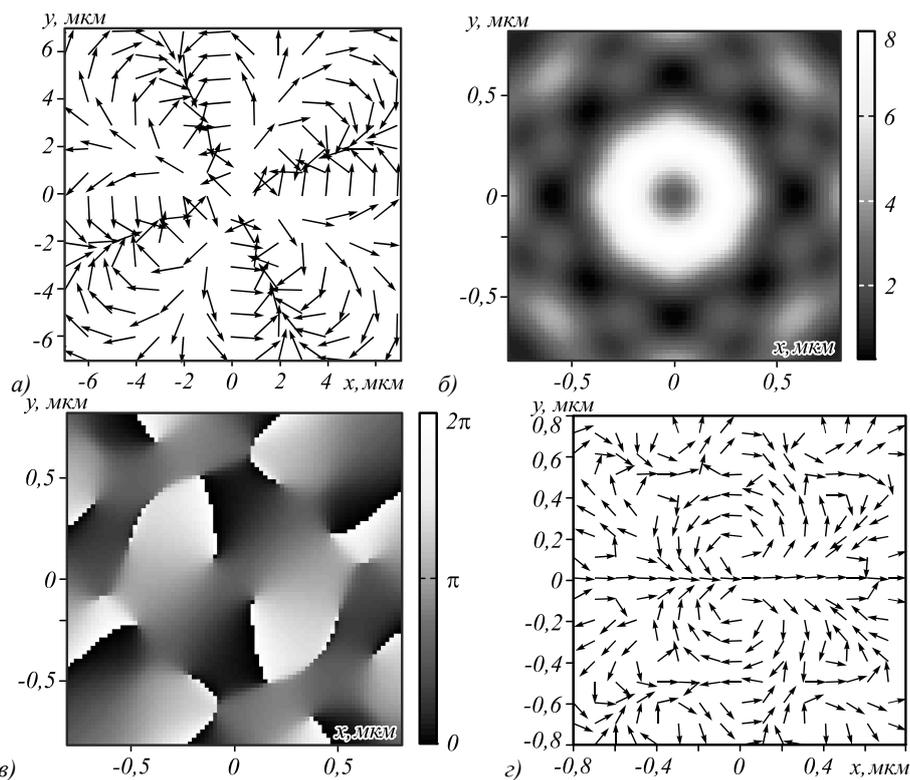


Рис. 5. Направление поляризации в фокусируемом пучке с $t = 3, n = 5$ (а); распределение интенсивности $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (б), фазы (в) и направление поляризации (г) в фокусе

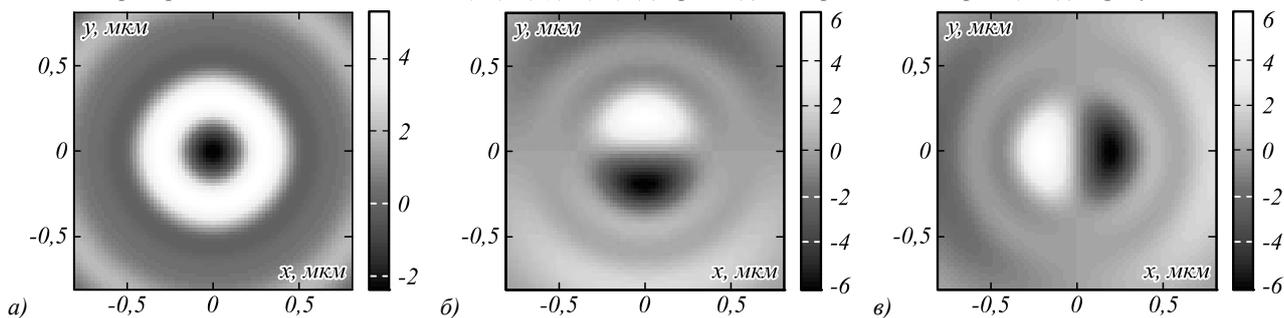


Рис. 6. Распределения компонент вектора Пойнтинга S_z (а), S_x (б), S_y (в) в фокусе ($m = 3, n = 5$)

Заметим также, что, хотя общий вид продольной компоненты вектора Пойнтинга на рис. 2а, 4а и 6а меняется (оставаясь радиально симметричным), область вблизи оси, в которой поток энергии обратный, сохраняет свою площадь.

Заключение

С помощью формализма Ричардса–Вольфа получены общие формулы для проекций вектора напряженности электрического и магнитного поля вблизи острого фокуса оптического вихря с топологическим зарядом m и с азимутальной поляризацией порядка n . Получено также выражение для продольной компоненты вектора Пойнтинга. Получены простые следствия из этих формул при разных значениях чисел m и n . При условии $m = n > 1$ на оптической оси будет отличная от нуля интенсивность, как при фокусировке светового поля без вихря и с круговой поляризацией, а при условии $n = m + 2$ на оптической оси в плоскости фокуса будет иметь место обратный поток световой энергии. Численное моделирование

подтвердило существование обратного потока вблизи оптической оси. Причем распределение интенсивности в плоскости фокуса при $n = m + 2$ имеет порядок симметрии относительно оптической оси, равный $m + n = 2(n - 1)$, а распределение продольной компоненты вектора Пойнтинга имеет осевую симметрию при любых m и n .

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Световое поле с фазовой и поляризационной сингулярностью в фокусе апланатической системы», Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Моделирование острой фокусировки оптического вихря с радиальной и азимутальной поляризацией высшего порядка», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части «Частные случаи из общей формулы».

Литература

1. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1959. – Vol. 253, Issue 1274. – P. 358-379. – DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
2. **Youngworth, K.S.** Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams / K.S. Youngworth, T.G. Brown // Optics Express. – 2000. – Vol. 7, Issue 2. – P. 77-87. – DOI: 10.1364/OE.7.000077.
3. **Zhan, Q.** Focus shaping using cylindrical vector beams / Q. Zhan, J.R. Leger // Optics Express. – 2002. – Vol. 10, Issue 7. – P. 324-331. – DOI: 10.1364/OE.10.000324.
4. **Zhan, Q.** Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Q. Zhan // Advances in Optics and Photonics. – 2009. – Vol. 1, Issue 1. – P. 1-57. – DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
5. **Chen, B.** Tight focusing of elliptically polarized vortex beams / B. Chen, J. Pu // Applied Optics. – 2009. – Vol. 48, Issue 7. – P. 1288-1294. – DOI: 10.1364/AO.48.001288.
6. **Rashid, M.** Focusing of high order cylindrical vector beams / M. Rashid, O.M. Marago, P.H. Jones // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11, Issue 6. – P. 065204. – DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065204.
7. **Milione, G.** Higher-order Poincaré sphere, stokes parameters, and angular momentum of light / G. Milione, H.I. Sztul, D.A. Nolan, R.R. Alfano // Physical Review Letters. – 2011. – Vol. 107, Issue 5. – P. 053601. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.053601.
8. **Holleczeck, A.** Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light / A. Holleczeck, A. Aiello, C. Gabriel, C. Marquardt, G. Leuchs // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, Issue 10. – P. 9714-9736. – DOI: 10.1364/OE.19.009714.
9. **Chen, S.** Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere / S. Chen, X. Zhou, Y. Liu, X. Ling, H. Luo, S. Wen // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, Issue 18. – P. 5274-5276. – DOI: 10.1364/OL.39.005274.
10. **Wang, T.** Focusing properties of cylindrical vector vortex beams with high numerical aperture objective / T. Wang, C. Kuang, X. Hao, X. Liu // Optik. – 2013. – Vol. 124, Issue 21. – P. 4762-4765. – DOI: 10.1016/j.ijleo.2013.01.070.
11. **Gong, L.** Generation of cylindrical polarized vector vortex beams with digital micromirror device / L. Gong, Y. Ren, W. Liu, M. Wang, M. Zhong, Z. Wang // Journal of Applied Physics. – 2014. – Vol. 116. – P. 183105. – DOI: 10.1063/1.4901574.
12. **Zhang, X.** Focusing properties of cylindrical vector vortex beams / X. Zhang, R. Chen, A. Wang // Optics Communications. – 2018. – Vol. 414. – P. 10-15. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.12.076.
13. **Han, Y.** Orbital angular momentum transition of light using a cylindrical vector beam / Y. Han, L. Chen, Y.-G. Liu, Z. Wang, H. Zhang, K. Yang, K.C. Chou // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 9. – P. 2146-2149. – DOI: 10.1364/OL.43.002146.
14. **Li, Y.** Propagation evolution of an off-axis high-order cylindrical vector beam / Y. Li, Z. Zhu, X. Wang, L. Gong, M. Wang, S. Nie // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31, Issue 11. – P. 2356-2361. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.002356.
15. **Matsusaka, S.** Micro-hole drilling by tightly focused vector beams / S. Matsusaka, Y. Kozawa, S. Sato // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 7. – P. 1542-1545. – DOI: 10.1364/OL.43.001542.
16. **Kotlyar, V.V.** Energy density and energy flux in the focus of an optical vortex: reverse flux of light energy / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 12. – P. 2921-2924. – DOI: 10.1364/OL.43.002921.
17. **Kotlyar, V.V.** Helical reverse flux of light of a focused optical vortex / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, A.A. Kovalev // Journal of Optics. – 2018. – Vol. 20, Issue 9. – P. 095603. – DOI: 10.1088/2040-8986/aad606.
18. **Стафеев, С.С.** Обратный поток энергии в фокусе цилиндрического векторного пучка / С.С. Стафеев, А.Г. Налимов, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 744-750. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-744-750..
19. **Pal, S.K.** C-point and V-point singularity lattice formation and index sign conversion methods / S.K. Pal, Ruchi, P. Senthikumar // Optics Communications. – 2017. – Vol. 393. – P. 156-168. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.02.048.
20. **Ruchi.** Generation of V-point polarization singularity lattices / Ruchi, S. Pal, P. Senthikumar // Optics Express. – 2017. – Vol. 25, Issue 16. – P. 19326-19331. – DOI: 10.1364/OE.25.019326.
21. **Стафеев, С.С.** Tight focusing of a quasi-cylindrical optical vortex / S.S. Stafeev, V.V. Kotlyar // Optics Communications. – 2017. – Vol. 403. – P. 277-282. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.07.054.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Стафеев Сергей Сергеевич, 1985 года рождения. В 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук с 2012 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, разностное решение уравнений Максвелла, оптика ближнего поля. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com. ORCID: 0000-0002-7008-8007

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г. Окончательный вариант – 8 мая 2019 г.

Sharp focusing of a light field with polarization and phase singularities of an arbitrary order

V.V. Kotlyar^{1,2}, S.S. Stafeev^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}

¹IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia;

²Samara National Research University, Moskovskoye shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

Using the Richards-Wolf formalism, we obtain general expressions for all components of the electric and magnetic strength vectors near the sharp focus of an optical vortex with the topological charge m and n th-order azimuthal polarization. From these equations, simple consequences are derived for different values of m and n . If $m = n > 1$, there is a non-zero intensity on the optical axis, like the one observed when focusing a vortex-free circularly polarized light field. If $n = m + 2$, there is a reverse flux of light energy near the optical axis in the focal plane. The derived expressions can be used both for simulating the sharp focusing of optical fields with the double singularity (phase and polarization) and for a theoretical analysis of focal distributions of the intensity and the Poynting vector, allowing one to reveal the presence of rotational symmetry or the on-axis reverse energy flux, as well as the focal spot shape (a circle or a doughnut).

Keywords: sharp focusing, Richards-Wolf formulae, optical vortex, topological charge, phase singularity, polarization singularity, Poynting vector, reverse flux of energy, focal spot symmetry.

Citation: Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Sharp focusing of a light field with polarization and phase singularities of an arbitrary order. *Computer Optics* 2019; 43(3): 337-346. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant # 18-19-00595 (section “Light field with a phase and polarization singularity in the focus of an aplanatic system”), the Russian Foundation for Basic Research under grant # 18-29-20003 (section “Simulation of sharp focusing of an optical vortex with high-order radial and azimuthal polarization”), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the “Crystallography and Photonics” Research Center of the RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (section “Partial cases from the general expression”).

References

- [1] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [2] Youngworth KS, Brown TG. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams. *Opt Express* 2000; 7(2): 77-87. DOI: 10.1364/OE.7.000077.
- [3] Zhan Q, Leger JR. Focus shaping using cylindrical vector beams. *Opt Express* 2002; 10(7): 324-331. DOI: 10.1364/OE.10.000324.
- [4] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- [5] Chen B, Pu J. Tight focusing of elliptically polarized vortex beams. *Appl Opt* 2009; 48(7): 1288-1294. DOI: 10.1364/AO.48.001288.
- [6] Rashid M, Marago OM, Jones PH. Focusing of high order cylindrical vector beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2009; 11(6): 065204. DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065204.
- [7] Milione G, Sztul HI, Nolan DA, Alfano RR. Higher-order Poincaré sphere, Stokes parameters, and angular momentum of light. *Phys Rev Lett* 2011; 107(5): 053601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.053601.
- [8] Holleczeck A, Aiello A, Gabriel C, Marquardt C, Leuchs G. Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light. *Opt Express* 2011; 19(10): 9714-9736. DOI: 10.1364/OE.19.009714.
- [9] Chen S, Zhou X, Liu Y, Ling X, Luo H, Wen S. Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order

- der Poincaré sphere. *Opt Lett* 2014; 39(18): 5274-5276. DOI: 10.1364/OL.39.005274.
- [10] Wang T, Kuang C, Hao X, Liu X. Focusing properties of cylindrical vector vortex beams with high numerical aperture objective. *Optik* 2013; 124(21): 4762-4765. DOI: 10.1016/j.ijleo.2013.01.070.
- [11] Gong L, Ren Y, Liu W, Wang M, Zhong M, Wang Z. Generation of cylindrical polarized vector vortex beams with digital micromirror device. *J Appl Phys* 2014; 116: 183105. DOI: 10.1063/1.4901574.
- [12] Zhang X, Chen R, Wang A. Focusing properties of cylindrical vector vortex beams. *Opt Commun* 2018; 414: 10-15. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.12.076.
- [13] Han Y, Chen L, Liu YG, Wang Z, Zhang H, Yang K, Chou KC. Orbital angular momentum transition of light using a cylindrical vector beam. *Opt Lett* 2018; 43(9): 2146-2149. DOI: 10.1364/OL.43.002146.
- [14] Li Y, Zhu Z, Wang X, Gong L, Wang M, Nie S. Propagation evolution of an off-axis high-order cylindrical vector beam. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(11): 2356-2361. DOI: 10.1364/JOSAA.31.002356.
- [15] Matsusaka S, Kozawa Y, Sato S. Micro-hole drilling by tightly focused vector beams. *Opt Lett* 2018; 43(7): 1542-1545. DOI: 10.1364/OL.43.001542.
- [16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Energy density and energy flux in the focus of an optical vortex: reverse flux of light energy. *Opt Lett* 2018; 43(12): 2921-2924. DOI: 10.1364/OL.43.002921.
- [17] Kotlyar VV, Nalimov AG, Kovalev AA. Helical reverse flux of light of a focused optical vortex. *J Opt* 2018; 20(9): 095603. DOI: 10.1088/2040-8986/aad606.
- [18] Stafeev SS, Nalimov AG, Kotlyar VV. Energy backflow in a focal spot of the cylindrical vector beam. *Computer Optics* 2018; 42(5): 744-750. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-744-750.
- [19] Pal SK, Ruchi, Senthilkumaran P. C-point and V-point singularity lattice formation and index sign conversion methods. *Opt Commun* 2017; 393: 156-168. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.02.048.
- [20] Ruchi, Pal S, Senthilkumaran P. Generation of V-point polarization singularity lattices. *Opt Express* 2017; 25: 19326-19331. DOI: 10.1364/OE.25.019326.
- [21] Stafeev SS, Kotlyar VV. Tight focusing of a quasi-cylindrical optical vortex. *Opt Commun* 2017; 403: 277-282. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.07.054.

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Sergey S. Stafeev (b. 1985) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com. ORCID: 0000-0002-7008-8007.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

Received March 12, 2019. The final version – May 8, 2019.