

## Исследование устойчивости топологического заряда многокольцевых вихревых пучков Лагерра–Гаусса к случайным искажениям

М.С. Кириленко<sup>1</sup>, С.Н. Хонина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, Самарская область, Самара, Московское шоссе, д. 34;

<sup>2</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, Самарская область, Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151

### Аннотация

Выполнено сравнительное численное исследование сохранения свойств отдельных пучков Лагерра–Гаусса и их суперпозиций в случайной среде. Моделирование основано на расширенном принципе Гюйгенса–Френеля. Исследования показали, что увеличение числа колец мод Лагерра–Гаусса при сохранении порядка оптического вихря позволяет увеличить отношение энергии минимального информативного коэффициента к энергии максимально-го паразитного коэффициента, что важно при детектировании закодированной в коэффициентах информации. Кроме того, увеличение числа колец несколько нивелирует более сильное воздействие случайных флуктуаций на пучки с высокими топологическими зарядами. Этот эффект можно объяснить структурной избыточностью многокольцевых распределений (в каждом кольце вихревая фазовая структура пучка повторяется). Аналогичный результат был получен для пучков, соответствующих двухмодовой суперпозиции. Лучший результат по сохранению информации получен для суперпозиции с дублированием информации в комплексно-сопряжённых коэффициентах, а лучшее отношение информативной энергии к паразитной было получено для пучков с наибольшей площадью поперечного распределения.

**Ключевые слова:** пучки Лагерра–Гаусса, оптические вихри, орбитальный угловой момент, случайные флуктуации оптической среды, расширенный принцип Гюйгенса–Френеля.

**Цитирование:** Кириленко, М.С. Исследование устойчивости топологического заряда многокольцевых вихревых пучков Лагерра–Гаусса к случайным искажениям / М.С. Кириленко, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 567-576. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-567-576.

### Введение

Оптические пучки активно используются в таких приложениях, как лазерная спутниковая связь, лазерные радарные системы и системы дистанционного зондирования [1–4]. Во всех этих приложениях необходимо описание распространения оптических пучков в атмосфере. Несмотря на множество проблем передачи данных в свободном пространстве (изменения температуры, дождь, облака, газы, аэрозоли) [5–9], излучение света является исключительно быстрым и ёмким носителем информации. Поэтому значительная часть усилий сосредоточена на поиске возможностей для преодоления негативных эффектов случайных искажений оптической среды.

Известны различные подходы к решению этой проблемы: использование частично когерентных пучков [1, 10–12], лазерных пучков со специальной пространственной структурой (вихревые, бездифракционные, моды высших порядков) [13–16], векторных пучков с неоднородной поляризацией [17, 18], а также одновременно нескольких пучков с одинаковой или разными частотами [19, 20].

Заметим, что особый интерес для уплотнения каналов передачи информации представляют пучки, несущие орбитальный угловой момент (ОУМ) и имеющие бесконечное число возможных квантовых состояний [21]. Уже продемонстрированы значительные успехи в

применении такого способа уплотнения каналов как в волоконных системах связи [22], так и в свободном пространстве [23, 24]. Обзор по исследованию и применению вихревых пучков в случайных средах можно найти в работах [25, 26].

Среди пучков, обладающих ОУМ, хорошо известны моды Лагерра–Гаусса [27, 28], моды Бесселя [29–31], а также другие типы вихревых пучков, использующихся при уплотнённой передаче информации [32–34].

Устойчивость вихревых пучков к случайному воздействию отмечалась в нескольких экспериментальных работах [13, 35–37]. Заметим, однако, что оптические вихри высоких порядков менее устойчивы к возмущениям оптической среды. В работе [13] было показано, что вихревые пучки высокого порядка сохраняются в турбулентной среде на значительном расстоянии (несколько километров), но затем расщепляются на вихри первого порядка. В этой же работе утверждалось, что вихревой пучок может расщепляться, отклоняться, блуждать вне области детектора, но никогда не исчезает, т.е. сохраняется общий угловой момент поля. В работе [37] было показано, что пучки с более высоким номером оптического вихря больше подвержены влиянию случайных флуктуаций, хотя при дальнейшем распространении (после искажения) в свободном пространстве демонстрируют лучшую способность восстановления. Этот эффект объяснялся фазовой структурой пучка.

В данной работе выполнено сравнительное численное исследование сохранения свойств отдельных пучков Лагерра–Гаусса (ЛГ) и их суперпозиций в случайной среде. Моделирование основано на расширенном принципе Гюйгенса–Френеля [38, 39].

Отдельные моды ЛГ имеют целый ОУМ [40], который определяется порядком оптического вихря (или топологического заряда), т.е. только угловым индексом моды. При этом радиальный индекс моды соответствует количеству колец моды, т.е. определяет её пространственную структуру. Таким образом, носителями одного и того же топологического заряда могут быть различные моды (заметим, что для отдельных мод топологический заряд совпадает с нормированным ОУМ). Поэтому логично исследовать, как пространственная структура (количество колец) будет сказываться на сохранении орбитального момента при воздействии случайных флуктуаций оптической среды распространения. В каждом кольце вихревая фазовая структура пучка повторяется, т.е. имеет место структурная избыточность. Это должно повысить устойчивость пучка к случайным возмущениям по аналогии с массивами пучков.

Кроме того, в работе рассмотрены суперпозиции мод ЛГ с различным угловым индексом. Кодирова биты информации номером вихревой зависимости, можно осуществить мультиплексирование оптической информации в одном носителе – лазерном пучке [41, 42]. Заметим, что в общем случае суперпозиция мод ЛГ обладает дробным ОУМ [43].

Так как сохранение топологического заряда является важным свойством, в исследованиях именно данный параметр был выбран критерием устойчивости пучков к воздействию случайных флуктуаций. Детектирование топологического заряда экспериментально может быть выполнено с использованием многоканального фазового оптического элемента, раскладывающего поле по угловым гармоникам [44–46].

### 1. Теоретические основы

Входной пучок будем рассматривать в виде отдельных мод Лагерра–Гаусса:

$$GL_{nm}(r, \varphi) = \frac{1}{\sigma_0} \left[ \frac{2n!}{\pi(n+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma_0}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp(im\varphi), \quad (1)$$

где индексы  $(n, m)$  определяют число колец и заряд оптического вихря соответственно,  $\sigma_0$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $L_n^{|m|}(\cdot)$  – обобщённые полиномы Лагерра [47].

Также в качестве входного пучка будем рассматривать суперпозиции мод (1):

$$E_0(r, \varphi) = \sum_{n,m \in \Omega} a_{nm} GL_{nm}(r, \varphi). \quad (2)$$

Для определения топологического заряда пучка используется скалярное произведение пучка и оптических вихрей:

$$c_l = \int_0^{2\pi} \int_0^R E(\rho, \theta, z) \exp(-il\theta) \rho \, d\theta \, d\rho, \quad (3)$$

где  $E(\rho, \theta, z)$  – анализируемый пучок;  $\exp(il\theta)$  – оптический вихрь  $l$ -го порядка (угловая гармоника);  $c_l$  – коэффициент для оптического вихря  $l$ -го порядка.

Выполнить операцию (3) оптически, причём одновременно для нескольких порядков оптических вихрей, можно с помощью многоканального (многопорядкового) оптического элемента [44, 45].

Содержание оптического вихря порядка  $p$  в пучке определяется по следующей формуле:

$$\alpha_p = |c_p|^2 / \left( \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \right), \quad (4)$$

где  $2L+1$  – число учитываемых оптических вихрей.

Величина продольной проекции ОУМ анализируемого пучка определяется по формуле [45]:

$$J_z = \left( \sum_{p=-L}^L p \alpha_p \right) / \left( \sum_{p=-L}^L \alpha_p \right). \quad (5)$$

Распространение лазерного пучка через случайную среду можно моделировать с помощью интегрального выражения, соответствующего расширенному принципу Гюйгенса–Френеля [38, 39]:

$$E(u, v, z, t) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) \exp\left\{ \frac{ik}{2z} [(x-u)^2 + (y-v)^2] \right\} \times \exp\{\Psi(x, y, u, v, z) - i\omega t\} \, dx \, dy, \quad (6)$$

где  $E_0(x, y)$  – поле во входной плоскости (при  $z=0$ ),  $E(u, v, z, t)$  – поле на расстоянии  $z$  от входной плоскости,  $\Psi(x, y, u, v, z)$  – случайная часть в операторе распространения, связанная с турбулентностью атмосферы,  $\omega$  – частота колебаний лазерного излучения,  $t$  – время.

Выражение (6) соответствует методу Рытова [39], а функция  $\Psi(x, y, u, v, z)$  описывает случайные отклонения фазовой функции сферической волны, распространяющейся от входной плоскости к выходной.

Далее рассмотрен алгоритм расчёта распространения пучка в случайной среде с заданной корреляционной функцией. Пусть известна корреляционная функция случайного поля в виде [48]:

$$R\left\{ \exp[\psi(x_1, u_1, 0)], \exp[\psi(x_2, u_2, z)] \right\} = \exp\left[ -\frac{1}{\rho_0^2(z)} (x_1 - x_2)^2 \right] = R_{\exp[\psi]}(x_1 - x_2, z), \quad (7)$$

где  $\rho_0(z) = (0,545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$  – радиус когерентности распространения сферической волны через турбулентную атмосферу,  $C_n^2$  – структурная постоянная среды. Отметим, что данная корреляционная функция зависит от разности между координатами  $x_1$  и  $x_2$ , а не от каждой из них по отдельности. Более того, она не зависит от координат в выходной плоскости  $u_1$  и  $u_2$ , а зависит лишь от расстояния  $z$  до неё.

Будем считать, что средняя интенсивность Гауссова пучка, проходящего через случайную среду, сохраняется, поэтому зададим среднюю амплитуду случайного поля равной единице.

Для генерации случайного поля  $U(x)$  воспользуемся методом, описанным в работе [45]:

$$U(x) = h(x) * \xi(x), \tag{8}$$

где звёздочкой \* обозначена операция свёртки,  $h(x)$  – детерминированная функция (импульсная характеристика),  $\xi(x)$  – комплекснозначный белый шум с единичной дисперсией и корреляционной функцией, равной дельта-функции Дирака. Тогда:

$$U(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[h(u)] \mathcal{F}[\xi(u)] \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[ \sqrt{\mathcal{F}[R_U(u)]} \mathcal{F}[\xi(u)] \right], \tag{9}$$

где  $\mathcal{F}[\cdot]$  – оператор преобразования Фурье,  $R_U(x)$  – автокорреляция функции  $h(x)$ .

Окончательно, получаем случайное поле оптической среды:

$$U(x, u, z) = \exp[\psi(x, u, z)] - \langle \exp[\psi(x, u, z)] \rangle. \tag{10}$$

Заметим, что поле (10) не является чисто фазовым, так как функция  $\psi(x, u, z)$  является комплексной.

На рис. 1 показан пример реализаций случайного поля, рассчитанного по алгоритму (8)–(10) при различных значениях расстояния от входной плоскости.

С увеличением расстояния  $z$  радиус (или длина) когерентности  $\rho_0(z)$  уменьшается. Поле становится менее когерентным (ближе к случайному шуму), поперечный размер флуктуаций уменьшается (рис. 1). Влияние искажений, как отмечалось в работе [45], становится более существенным.

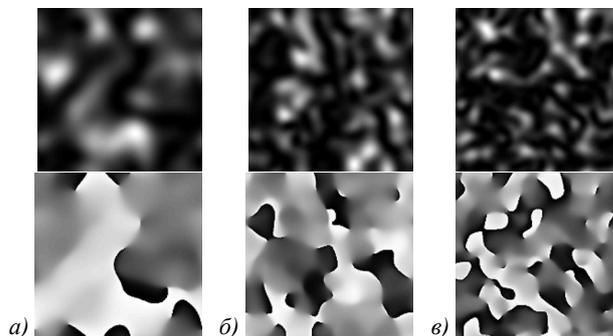


Рис. 1. Реализации для случайного поля (10) в зависимости от расстояния  $z$  (амплитуда – верхняя строка, фаза – нижняя строка):  $z = 100$  мм (а),  $z = 200$  мм (б),  $z = 300$  мм (в)

### 2. Результаты моделирования

Моделирование распространения отдельных мод ЛГ (1) выполнялось при следующих параметрах расчёта: размер поля во входной области –  $2 \times 2$  мм, длина волны  $\lambda = 633$  нм,  $\sigma_0 = 0,2$  мм. В табл. 1 показаны результаты моделирования распространения (1) для некоторых отдельных многокольцевых мод ЛГ при случайных искажениях.

Табл. 1. Моделирование распространения отдельных многокольцевых мод ЛГ при случайных искажениях (показаны интенсивность и фаза пучка на различных расстояниях  $z$  от входной плоскости)

	Исходное поле	$z = 0$	$z = 100$ мм	$z = 200$ мм	$z = 300$ мм
$n = 2,$ $m = 3$					
$n = 3,$ $m = 5$					

Детальные результаты вычисления содержания оптических вихрей в искаженных флуктуациями пучках с одинаковым топологическим зарядом, но различной структурой (количество колец равно  $n + 1$ ) приведены в табл. 2–4. Анализировались поля, полученные на расстоянии  $z = 100$  мм и  $z = 200$  мм в случайной среде. Показаны значения  $\alpha_p$  (только для положительных индексов), вычисленные по формуле (4).

Табл. 2. Содержание оптических вихрей  $\alpha_p$  в искажённых флуктуациями пучках с нулевым топологическим зарядом ( $m = 0$ ) и различным количеством колец ( $n + 1$ ) на расстоянии  $z = 100$  мм

$m = 0$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$p = 0$	0,8624	0,8201	0,8365	0,8705	0,8768
$p = 1$	0,0587	0,031	0,0368	0,0129	0,0124
$p = 2$	0,0301	0,0591	0,0041	0,0274	0,0062
$p = 3$	0,0099	0,0109	0,0118	0,0188	0,0085
$p = 4$	0	0,0003	0,0133	0,0151	0,0134
$p = 5$	0,0001	0,0005	0,0029	0,0011	0,0069
$p = 6$	0	0,0001	0,0017	0,0007	0,0034
$p = 7$	0	0	0	0,0006	0,004
$p = 8$	0	0	0	0,0002	0,0001
$p = 9$	0	0	0	0	0,0003
$p = 10$	0	0	0	0	0
<b>INR</b>	<b>14,73</b>	<b>13,87</b>	<b>22,73</b>	<b>31,77</b>	<b>65,43</b>

Табл. 3. Содержание оптических вихрей  $\alpha_p$  в искажённых флуктуациями пучках с единичным топологическим зарядом ( $m = 1$ ) и различным количеством колец ( $n + 1$ ) на расстоянии  $z = 100$  мм

$m = 1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$p = 0$	0,1526	0,0629	0,0291	0,0101	0,0108
$p = 1$	0,7892	0,8715	0,8471	0,7785	0,8899
$p = 2$	0,0274	0,0285	0,0341	0,0686	0,0085
$p = 3$	0,0102	0,0005	0,0173	0,0002	0,0016
$p = 4$	0,0005	0,0071	0,0054	0,0099	0,0062
$p = 5$	0,0003	0,0001	0,0045	0,0053	0,0419
$p = 6$	0,0001	0	0,0006	0,008	0,0034
$p = 7$	0	0	0,0002	0,0035	0,0011
$p = 8$	0	0	0,0001	0,0002	0,0007
$p = 9$	0	0	0	0	0,0013
$p = 10$	0	0	0	0,0001	0,0009
<b>INR</b>	<b>5,17</b>	<b>13,85</b>	<b>24,84</b>	<b>11,34</b>	<b>21,23</b>

Заметим, что формула (4) соответствует нормированным коэффициентам разложения, т.е. независимо от потери энергии пучка нас интересует только соотношение полезных (изначально присутствовавших) и паразитных (возникших в результате искажений) коэффициентов.

Как видно из результатов, увеличение числа колец приводит к увеличению числа ненулевых «шумовых» коэффициентов при одновременном уменьшении их амплитуд. То есть энергия, перешедшая в результате случайных флуктуаций в паразитные порядки, «раз-

мазывается тонким слоем». Это позитивный момент, позволяющий выделить полезную информацию даже при существенном снижении энергии в полезных коэффициентах.

Табл. 4. Содержание оптических вихрей  $\alpha_p$  в искажённых флуктуациями пучках с топологическим зарядом  $m = 4$  и различным количеством колец ( $n + 1$ ) на расстоянии  $z = 200$  мм

$m = 4$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$p = 0$	0,0004	0,0016	0,0075	0,0003	0,0081
$p = 1$	0,0004	0,0028	0,0104	0,0017	0,0075
$p = 2$	0,0053	0,0192	0,0349	0,0079	0,0083
$p = 3$	0,0708	0,1164	0,0475	0,0311	0,0227
$p = 4$	0,8161	0,8272	0,7398	0,9089	0,9056
$p = 5$	0,0282	0,0134	0,0356	0,0174	0,0036
$p = 6$	0,0354	0,0078	0,0128	0,0178	0,0054
$p = 7$	0,0061	0,0018	0,0539	0,0017	0,0061
$p = 8$	0,0227	0,0017	0,0456	0,0001	0,0188
$p = 9$	0	0,0053	0,0005	0,0003	0,004
$p = 10$	0,0112	0,0002	0,0037	0,0018	0,0027
<b>INR</b>	<b>11,53</b>	<b>7,11</b>	<b>13,73</b>	<b>29,23</b>	<b>39,89</b>

Таким образом, при регистрации коэффициентов одной из важных характеристик является отношение минимальной энергии информативного коэффициента к максимальной энергии шумового коэффициента (аналог отношения сигнал-шум):

$$INR = \left( \min_{p \in \Omega_I} \alpha_p \right) / \left( \max_{p \in \Omega_S} \alpha_p \right), \tag{11}$$

где  $\Omega_I$  – множество информативных (полезных) коэффициентов,  $\Omega_S$  – множество шумовых (паразитных) коэффициентов.

Очевидно, чем больше отношение (11), тем лучше. Если  $INR < 1$ , то отличить полезный сигнал от паразитного будет невозможно даже при бинарном кодировании информации [42, 46].

Как видно из табл. 2–4, отношение  $INR$  (11) в основном растёт с увеличением числа колец. Более наглядно это видно для усреднённых значений, приведенных в табл. 5 и 6.

Из табл. 5 и 6 видно, что при увеличении номера оптического вихря наблюдается тенденция к уменьшению устойчивости полей к воздействию случайных флуктуаций (см. последний столбец табл. 5 и 6 с усреднённой долей энергии в информативных коэффициентах), что отмечалось ранее в работах [13, 37]. Однако увеличение числа колец позволяет не только увеличить отношение  $INR$ , но и в среднем повысить устойчивость полей (см. последнюю строку табл. 5 и 6).

При увеличении расстояния прохождения поля в искажающей среде ситуация по сохранению исходного топологического заряда пучка меняется незначительно (можно сравнить табл. 5 и 6). Однако в данном случае

сравнение не является показательным, так как каждый раз производилась генерация новых случайных полей.

Также выполнялось моделирование распространения суперпозиций мод ЛГ (1).

Были рассмотрены двухмодовые суперпозиции пучков ЛГ:

$$E_0(r, \varphi) = a_1 GL_{n,m_1}(r, \varphi) + a_2 GL_{n,m_2}(r, \varphi). \quad (12)$$

Табл. 5. Доля энергии в информативных коэффициентах и отношение *INR* (жирным через слэши) в искаженных флуктуациями пучках с различными топологическими зарядами *m* и различным количеством колец (*n* + 1) после распространения на расстояние *z* = 100 мм

	<i>n</i> = 0	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 2	<i>n</i> = 3	<i>n</i> = 4	Среднее
<i>m</i> = 0	0,8624 / <b>14,73</b>	0,8201 / <b>13,87</b>	0,8365 / <b>22,73</b>	0,8705 / <b>31,77</b>	0,8768 / <b>65,43</b>	0,8532
<i>m</i> = 1	0,7892 / <b>5,17</b>	0,8715 / <b>13,85</b>	0,8471 / <b>24,84</b>	0,7785 / <b>11,34</b>	0,8899 / <b>21,23</b>	0,8352
<i>m</i> = 2	0,8789 / <b>19,48</b>	0,908 / <b>21,98</b>	0,8668 / <b>13,41</b>	0,9065 / <b>17,5</b>	0,8297 / <b>22,18</b>	0,8779
<i>m</i> = 3	0,7382 / <b>6,38</b>	0,8355 / <b>8,4</b>	0,9185 / <b>39,76</b>	0,862 / <b>20,97</b>	0,8758 / <b>26,22</b>	0,8460
<i>m</i> = 4	0,7402 / <b>7,41</b>	0,8732 / <b>31,29</b>	0,9282 / <b>35,15</b>	0,9429 / <b>77,28</b>	0,9169 / <b>43,45</b>	0,8802
<i>m</i> = 5	0,7167 / <b>4,26</b>	0,8656 / <b>22,02</b>	0,9147 / <b>28,85</b>	0,8992 / <b>38,42</b>	0,9063 / <b>43,57</b>	0,8605
<i>m</i> = 6	0,4803 / <b>2,28</b>	0,7949 / <b>14,53</b>	0,8236 / <b>6,47</b>	0,8299 / <b>20,14</b>	0,929 / <b>37,45</b>	0,7715
Среднее	0,7437 / <b>8,53</b>	0,8526 / <b>17,99</b>	0,8764 / <b>24,46</b>	0,8699 / <b>31,06</b>	0,8892 / <b>37,07</b>	0,8463 / <b>23,82</b>

Табл. 6. Доля энергии в информативных коэффициентах и отношение *INR* (жирным через слэши) в искаженных флуктуациями пучках с различными топологическими зарядами *m* и различным количеством колец (*n* + 1) после распространения на расстояние *z* = 200 мм

	<i>n</i> = 0	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 2	<i>n</i> = 3	<i>n</i> = 4	Среднее
<i>m</i> = 0	0,85 / <b>20,54</b>	0,85 / <b>18,50</b>	0,81 / <b>15,01</b>	0,87 / <b>26,44</b>	0,91 / <b>23,26</b>	0,8565
<i>m</i> = 1	0,76 / <b>6,57</b>	0,9 / <b>12,64</b>	0,83 / <b>13,59</b>	0,85 / <b>10,66</b>	0,87 / <b>24,87</b>	0,8442
<i>m</i> = 2	0,83 / <b>10,26</b>	0,9 / <b>28,46</b>	0,91 / <b>25,62</b>	0,9 / <b>20,84</b>	0,9 / <b>32,61</b>	0,887
<i>m</i> = 3	0,89 / <b>22,74</b>	0,84 / <b>12,19</b>	0,83 / <b>18,71</b>	0,94 / <b>56,11</b>	0,93 / <b>37,72</b>	0,8872
<i>m</i> = 4	0,82 / <b>11,53</b>	0,83 / <b>7,11</b>	0,74 / <b>13,73</b>	0,91 / <b>29,23</b>	0,91 / <b>39,89</b>	0,8395
<i>m</i> = 5	0,83 / <b>9,43</b>	0,9 / <b>19,86</b>	0,72 / <b>7,73</b>	0,9 / <b>25,82</b>	0,92 / <b>39,08</b>	0,8535
<i>m</i> = 6	0,77 / <b>6,01</b>	0,87 / <b>11,83</b>	0,77 / <b>7,76</b>	0,86 / <b>20,11</b>	0,86 / <b>22,64</b>	0,8230
Среднее	0,82 / <b>12,44</b>	0,87 / <b>15,8</b>	0,8 / <b>14,59</b>	0,89 / <b>27,03</b>	0,9 / <b>31,44</b>	0,85 / <b>20,26</b>

В каждой рассмотренной суперпозиции пучки формировались с одинаковыми весами

$$|a_1|^2 = |a_2|^2 = 0,5.$$

В табл. 7 приведены примеры распространения в случайной среде различных двухмодовых суперпозиций пучков ЛГ (10). В табл. 8 показаны коэффициенты наличия вихрей в пучке, полученном после распространения через случайную среду.

Из табл. 7 видно, что поле, представляющее собой суперпозицию мод с одинаковыми радиальными индексами *n* и противоположными по знаку угловыми индексами *m* (Туре А, первая строка табл. 7), при прохождении через случайную среду хорошо сохраняет свой весовой модовый состав – распределение энергии по значимым модам пучка осталось практически одинаковым, т.е. изначально заданным.

Если в суперпозиции сохранить одинаковые радиальные индексы *n*, а угловые индексы сделать различными не только по знаку, но и по значению (Туре В, вторая строка табл. 7), то при прохождении через случайную среду весовое содержание моды с боль-

шим угловым индексом (*m*<sub>2</sub> = -5) заметно уменьшится по сравнению весовым содержанием моды с меньшим угловым индексом (*m*<sub>1</sub> = 2). Данный эффект меньшей устойчивости вихревых пучков с большими порядками оптического вихря отмечался в работах [13, 37].

Ситуация усугубится, если, кроме увеличения углового индекса, увеличить радиальный индекс (Туре С, третья строка табл. 7). Это также связано с меньшей устойчивостью мод высокого порядка к различным искажениям.

Нужно отметить, что для пучка типа В получено наибольшее значение отношения *INR*. Это можно связать со структурой пучка, занимающей большую площадь, чем другие рассмотренные типы пучков.

### Заключение

Численно с использованием расширенного принципа Гюйгенса–Френеля исследована способность отдельных многокольцевых пучков Лагерра–Гаусса и их суперпозиций сохранять топологический заряд при распространении в случайной среде.

Табл. 7. Распространение двухмодовых суперпозиций пучков ЛГ (12) в случайной среде

Модовый состав пучка	Входное поле (интенсивность и фаза)		Поле после прохождения случайной среды $z = 100$ мм	
Тип А: $m_1 = 1, m_2 = 2;$ $m_2 = 1, m_2 = -2$				
Тип В: $m_1 = 1, m_2 = 2;$ $m_2 = 1, m_2 = -5$				
Тип С: $m_1 = 1, m_2 = 2;$ $m_2 = 2, m_2 = -5$				

Табл. 8. Весовое содержание оптических вихрей  $\alpha_p$  после распространения поля через случайную среду

$p$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	<i>INR</i>
Тип А	0,0007	0,0087	0,028	0,4274	0,0201	0,0016	0,0072	0,4229	0,0709	0,0113	0,001	<b>5,96</b>
Тип В	0,3766	0,0082	0,0001	0	0	0,0002	0,0103	0,4911	0,0303	0,0014	0,0001	<b>12,42</b>
Тип С	0,3122	0,0072	0,0001	0,0001	0	0,0001	0,0021	0,6315	0,0335	0,0059	0,0012	<b>9,32</b>

Исследования показали, что моды Лагерра–Гаусса с одним и тем же топологическим зарядом (одинаковым угловым индексом), но большим числом колец (большим радиальным индексом) в среднем более устойчивы к воздействию случайных флуктуаций. Кроме того, увеличение числа колец позволяет увеличить отношение энергии минимального информативного коэффициента к энергии максимального паразитного коэффициента, что важно при детектировании закодированной в коэффициентах информации. Этот эффект можно объяснить структурной избыточностью многокольцевых распределений (в каждом кольце вихревая фазовая структура пучка повторяется).

Аналогичный результат был получен для пучков, соответствующих двухмодовой суперпозиции. Лучший результат по сохранению информации получен для суперпозиции с дублированием информации в комплексно-сопряженных коэффициентах, а лучшее отношение информативной энергии к паразитной было получено для пучков с наибольшей площадью.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 18-29-20003-мк, 18-29-20045-мк) в части численного моделирования и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Госу-

дарственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части теоретических выкладок.

**Литература**

1. **Wang, F.** Propagation of partially coherent beam in turbulent atmosphere: a review (invited review) / F. Wang, X. Liu, Y. Cai // Progress in Electromagnetics Research. – 2015. – Vol. 150. – P. 123-143. – DOI: 10.2528/PIER15010802.
2. **Korotkova, O.** Random light beams: theory and applications / O. Korotkova. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. – 366 p. – ISBN: 978-1-4398-1950-0.
3. **Majumdar, A.K.** Free-space laser communications: principles and advances / A.K. Majumdar, J.C. Ricklin. – Vol. 2. – New York: Springer Science and Business Media, 2008. – 418 p. – ISBN: 978-0-387-28652-5.
4. **Mishchenko, M.I.** Electromagnetic scattering by particles and particle groups: An introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 450 p. – ISBN: 978-0-521-51992-2.
5. **Tatarskii, V.I.** Wave propagation in a turbulent medium / V.I. Tatarskii. – New York: McGraw-Hill, 1961.
6. Laser speckle and related phenomenon / ed. by J.C. Dainty. – Berlin: Springer, 1975.
7. **Ishimaru, A.** Wave propagation and scattering in random media / A. Ishimaru. – Academic Press, New York, 1978. – 272 p. – ISBN: 978-0-12-374701-3.
8. **Fante, R.L.** Wave propagation in random media: a systems approach / R.L. Fante // Progress in Optics. – 1985. – Vol. 22. – P. 341-398. – DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70152-5.

9. **Andrews, L.C.** Laser beam propagation through random media / L.C. Andrews, R.L. Phillips. – Bellingham, Washington: SPIE Press, 1998.
10. **Gbur, G.** Spreading of partially coherent beams in random media / G. Gbur, E. Wolf // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2002. – Vol. 19, Issue 8. – P. 1592-1598.
11. **Eyyuboglu, H.T.** Complex degree of coherence for partially coherent general beams in atmospheric turbulence / H.T. Eyyuboglu, Y. Baykal, Y. Cai // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2007. – Vol. 24, Issue 9. – P. 2891-2901.
12. **Wang, D.** Evolution properties of the complex degree of coherence of a partially coherent Laguerre-Gaussian beam in turbulent atmosphere / D. Wang, F. Wang, Y. Cai, J. Chen // *Journal of Modern Optics*. – 2012. – Vol. 59, Issue 4. – P. 372-380.
13. **Gbur, G.** Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation / G. Gbur, R.K. Tyson // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25. – P. 225-230. – DOI: 10.1364/JOSAA.25.000225.
14. **Cai, Y.** Propagation of various dark hollow beams in a turbulent atmosphere / Y. Cai, S. He // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, Issue 4. – P. 1353-1367.
15. **Eyyuboglu, H.T.** Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence / H.T. Eyyuboglu // *Applied Physics B*. – 2007. – Vol. 88, Issue 2. – P. 259-265.
16. **Chu, X.** Evolution of an Airy beam in turbulence / X. Chu, *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36, Issue 14. – P. 2701-2703.
17. **Du, X.** Changes in the statistical properties of stochastic anisotropic electromagnetic beams on propagation in the turbulent atmosphere / X. Du, D. Zhao, O. Korotkova // *Optics Express*. – 2007. – Vol. 15, Issue 25. – P. 16909-16915.
18. **Wang, H.** The propagation of radially polarized partially coherent beam through an optical system in turbulent atmosphere / H. Wang, D. Liu, Z. Zhou // *Applied Physics B*. – 2010. – Vol. 101, Issues 1-2. – P. 361-369.
19. **Ji, X.** Effective Rayleigh range of Gaussian array beams propagating through atmospheric turbulence / X. Ji, Z. Pu // *Optics Communications*. – 2010. – Vol. 283, Issue 20. – P. 3884-3890.
20. **Chen, C.** Propagation of radial Airy array beams through atmospheric turbulence / C. Chen, H. Yang, M. Kavehrad, Z. Zhou // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2014. – Vol. 52. – P. 106-114.
21. **Soskin, M.S.** Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov. – In book: *Progress in Optics* / E. Wolf, ed. – Chapter 4. – Vol. 42. – Amsterdam, North Holland: Elsevier Science, 2001. – P. 219-276.
22. **Bozinovic, N.** Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran // *Science*. – 2013. – Vol. 340, Issue 6140. – P. 1545-1548. – DOI: 10.1126/science.1237861.
23. **Gibson, G.** Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum / G. Gibson, J. Courtial, M.J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas'ko, S.M. Barnett, S. Franke-Arnold // *Optics Express*. – 2004. – Vol. 12. – P. 5448-5456.
24. **Wang, J.** Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J.-Y. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6. – P. 488-496.
25. **Хонина, С.Н.** Вихревые лазерные пучки и их применение / С.Н. Хонина. – В кн.: *Нанофотоника и её применение в системах ДЗЗ* / под ред. В.А. Соифера. – Самара: Новая техника, 2016. – Гл. 4. – С. 275-351.
26. **Soifer, V.A.** Vortex beams in turbulent media: review / V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // *Computer Optics*. – 2016. – Vol. 40(5). – P. 605-624. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
27. **Kogelnik, H.** Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li. // *Applied Optics*. – 1966. – Vol. 5, Issue 10. – P. 1550-1567.
28. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189.
29. **Gatto, A.** Free-space orbital angular momentum division multiplexing with Bessel beams / A. Gatto, M. Tacca, P. Martelli, P. Boffi, M. Martinelli // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13, Issue 6. – 064018.
30. **Mendez, G.** Orbital angular momentum and highly efficient holographic generation of nondiffractive TE and TM vector beams / G. Mendez, A. Fernando-Vazquez, R.P. Lopez // *Optics Communications*. – 2015. – Vol. 334. – P. 174-183.
31. **Харитонов, С.И.** Вычисление момента импульса электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками: ab initio / С.И. Харитонов, С.Г. Волоотовский, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 588-605. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
32. **Paterson, C.** Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication / C. Paterson // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol. 94, Issue 15. – 153901.
33. **Cheng, M.** Channel capacity of the OAM-based free-space optical communication links with Bessel-Gauss beams in turbulent ocean / M. Cheng, L. Guo, J. Li, Y. Zhang // *IEEE Photonics Journal*. – 2016. – Vol. 8, Issue 1. – P. 1-11.
34. **Guan, B.** Free-space coherent optical communication with orbital angular momentum multiplexing/demultiplexing using a hybrid 3D photonic integrated circuit / B. Guan, R.P. Scott, Ch. Qin, N.K. Fontaine, T. Su, C. Ferrari, M. Cappuzzo, F. Klemens, B. Keller, M. Earnshaw, S.J.B. Yoo // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 1. – P. 145-156. – DOI: 10.1364/OE.22.000145.
35. **Wang, T.** Beam-spreading and topological charge of vortex beams propagating in a turbulent atmosphere / T. Wang, J. Pu, Z. Chen // *Optics Communications*. – 2009. – Vol. 282, Issue 7. – P. 1255-1259. – DOI: 10.1016/j.optcom.2008.12.027.
36. **Malik, M.** Influence of atmospheric turbulence on optical communications using orbital angular momentum for encoding / M. Malik, M. O'Sullivan, B. Rodenburg, M. Mirhosseini, J. Leach, M.P.J. Lavery, M.J. Padgett, R.W. Boyd // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, Issue 12. – P. 13195-13200. – DOI: 10.1364/OE.20.013195.
37. **Porfirev, A.P.** Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 11. – P. E8-E15. – DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
38. **Lutomirski, R.F.** Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium / R.F. Lutomirski, H.T. Yura // *Applied Optics*. – 1971. – Vol. 10, Issue 7. – P. 1652-1658.
39. **Feizulin, Z.I.** Broadening of a laser beam in a turbulent medium / Z.I. Feizulin, Y.A. Kravtsov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. – 1967. – Vol. 10, Issue 1. – P. 33-35.
40. **Bekshaev, A.** Paraxial light beams with angular momentum / A. Bekshaev, M. Soskin, M. Vasnetsov. – Nova Science, 2008.

41. **Torres, J.P.** Multiplexing twisted light / J.P. Torres // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6. – P. 420-422. – DOI: 10.1038/nphoton.2012.154.
42. **Kirilenko, M.S.** Information transmission using optical vortices / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. – 2013. – Vol. 22, Issue 2. – P. 81-89. – DOI: 10.3103/S1060992X13020069.
43. **Almazov, A.A.** Using phase diffraction optical elements to shape and select laser beams consisting of a superposition of an arbitrary number of angular harmonics / A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Journal of Optical Technology*. – 2005. – Vol. 72, Issue 5. – P. 391-399. – DOI: 10.1364/JOT.72.000391.
44. **Kotlyar, V.V.** Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45, Issue 7. – P. 1495-1506. – DOI: 10.1080/09500349808230644.
45. **Khonina, S.N.** An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Pääkkönen, J. Simonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2001. – Vol. 48, Issue 10. – P. 1543-1557. – DOI: 10.1080/09500340108231783.
46. **Khonina, S.N.** A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre–Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, V.D. Paragin // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2018. – Vol. 105. – P. 68-74. – DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
47. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983.
48. **Young, C.Y.** Turbulence-induced beam spreading of higher-order mode optical waves / C.Y. Young, Y.V. Gilchrest, B.R. Macon // *Optical Engineering*. – 2002. – Vol. 41. – P. 1097-1103.

### Сведения об авторах

**Кириленко Михаил Сергеевич**, 1990 года рождения, в 2013 году окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета по специальности «Прикладная математика и информатика». В 2018 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Оптика». В настоящее время работает в Самарском университете старшим преподавателем кафедры технической кибернетики. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптические операторы распространения, программирование. E-mail: [areatangent@gmail.com](mailto:areatangent@gmail.com).

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 20 мая 2019. Окончательный вариант – 26 июня 2019.

## Investigation of the topological charge stability for multi-ringed Laguerre–Gauss vortex beams to random distortions

M.S. Kirilenko<sup>1</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia,

<sup>2</sup> IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,

Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia

### Abstract

We performed a comparative numerical study of the conservation of properties of individual Laguerre-Gauss beams and their superpositions in a random environment. The simulation is based on the extended Huygens-Fresnel principle. Studies have shown that increasing the number of rings of Laguerre-Gauss modes with the same vortex order allows one to increase the ratio of the energy of the minimum informative coefficient to the energy of the maximum parasitic coefficient, which is important when detecting information encoded in the coefficients. In addition, an increase in the number of rings partially compensates for the stronger effect of random fluctuations on beams with high topological charges. Such a positive impact can be explained by the structural redundancy of multi-ring distributions (the vortex phase structure of the beam is repeated in each ring). A similar result was obtained for beams corresponding to a two-mode superposition. The best result on information preservation was obtained for the superposition with duplication of information in complex conjugate coefficients, and the best ratio of informative energy to parasitic one was obtained for beams with the largest area.

**Keywords:** Laguerre–Gauss beams, optical vortices, topological charge, random fluctuations, the extended Huygens-Fresnel principle.

**Citation:** Kirilenko MS, Khonina SN. Investigation of the topological charge stability for multi-ring Laguerre–Gauss vortex beams to random distortions. *Computer Optics* 2019, 43(4): 567-576. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-567-576.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grants No. 18-29-20003-mk, 18-29-20045-mk (numerical calculations) and the Ministry of Science and Higher Education within the State assignment to the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS No. 007-GZ/Ch3363/26 (theoretical results).

### References

- [1] Wang F, Liu X, Cai Y. Propagation of partially coherent beam in turbulent atmosphere: a review (invited review). *Progress in Electromagnetics Research* 2015; 150: 123-143. DOI: 10.2528/PIER15010802.
- [2] Korotkova O. *Random light beams: theory and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press; 2013. ISBN: 978-1-4398-1950-0.
- [3] Majumdar AK, Ricklin JC. *Free-space laser communications: principles and advances*. Vol 2. New York: Springer Science & Business Media; 2008. ISBN: 978-0-387-28652-5.
- [4] Mishchenko MI. *Electromagnetic scattering by particles and particle groups: An introduction*. Cambridge: Cambridge University Press; 2014. ISBN: 978-0-521-51992-2.
- [5] Tatarskii VI. *Wave propagation in a turbulent medium*. New York: McGraw-Hill; 1961.
- [6] Dainty JC, ed. *Laser speckle and related phenomenon*. Berlin: Springer; 1975.
- [7] Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. New York: Academic Press; 1978. ISBN: 978-0-12-374701-3.
- [8] Fante RL. Wave propagation in random media: a systems approach. *Progress in Optics* 1985; 22: 341-398. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70152-5.
- [9] Andrews LC, Phillips RL. *Laser beam propagation through random media*. Bellingham, Washington: SPIE Press; 1998.
- [10] Gbur G, Wolf E. Spreading of partially coherent beams in random media. *J Opt Soc Am A* 2002; 19(8): 1592-1598.
- [11] Eyyuboglu HT, Baykal Y, Cai Y. Complex degree of coherence for partially coherent general beams in atmospheric turbulence. *J Opt Soc Am A* 2007; 24(9): 2891-2901.
- [12] Wang D, Wang F, Cai Y, Chen J. Evolution properties of the complex degree of coherence of a partially coherent Laguerre-Gaussian beam in turbulent atmosphere. *J Mod Opt* 2012; 59(4): 372-380.
- [13] Gbur G, Tyson RK. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation. *J Opt Soc Am A* 2008; 25: 225-230. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000225.
- [14] Cai Y, He S. Propagation of various dark hollow beams in a turbulent atmosphere. *Opt Express* 2006; 14(4): 1353-1367.
- [15] Eyyuboglu HT. Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence. *Appl Phys B* 2007; 88(2): 259-265.
- [16] Chu X. Evolution of an Airy beam in turbulence. *Opt Lett* 2011; 36(14): 2701-2703.
- [17] Du X, Zhao D, Korotkova O. Changes in the statistical properties of stochastic anisotropic electromagnetic beams on propagation in the turbulent atmosphere. *Opt Express* 2007; 15(25): 16909-16915.
- [18] Wang H, Liu D, Zhou Z. The propagation of radially polarized partially coherent beam through an optical system in turbulent atmosphere. *Appl Phys B* 2010; 101(1-2): 361-369.
- [19] Ji X, Pu Z. Effective Rayleigh range of Gaussian array beams propagating through atmospheric turbulence. *Opt Commun* 2010; 283(20): 3884-3890.
- [20] Chen C, Yang H, Kavehrad M, Zhou Z. Propagation of radial Airy array beams through atmospheric turbulence. *Optics and Lasers in Engineering* 2014; 52: 106-114.
- [21] Soskin MS, Vasnetsov MV. Singular optics. In book: Wolf E, ed. *Progress in Optics*. Chap 4. Vol 42. Amsterdam, North Holland: Elsevier Science; 2001: 219-276.
- [22] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, Tur M, Kristensen P, Huang H, Willer AE, Ramachandran S. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science* 2013; 340(6140): 1545-1548. DOI: 10.1126/science.1237861.
- [23] Gibson G, Courtial J, Padgett MJ, Vasnetsov M, Pas'ko V, Barnett SM, Franke-Arnold S. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Opt Express* 2004; 12: 5448-5456.
- [24] Wang J, Yang J-Y, Fazal IM, Ahmed N, Yan Y, Huang H, Ren Y, Yue Y, Dolinar S, Tur M, Willner AE. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nat Photonics* 2012; 6: 488-496.
- [25] Khonina SN. Vortex laser beams and their application. In Book: Soifer VA, ed. *Nanophotonics and its application in remote sensing systems*. Samara: "Novaya Tehnika" Publisher; 2016; Ch 4: 275-351.
- [26] Soifer VA, Korotkova O, Khonina SN, Shchepakina EA. Vortex beams in turbulent media: review. *Computer Optics* 2016; 40(5): 605-624. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [27] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. *Appl Opt* 1966; 5(10): 1550-1567.
- [28] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189.
- [29] Gatto A, Tacca M, Martelli P, Boffi P, Martinelli M. Free-space orbital angular momentum division multiplexing with Bessel beams. *J Opt* 2011; 13(6): 064018.
- [30] Mendez G, Fernando-Vazquez A, Lopez RP. Orbital angular momentum and highly efficient holographic generation of nondiffractive TE and TM vector beams. *Opt Commun* 2015; 334: 174-183.
- [31] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of the angular momentum of an electromagnetic field inside a waveguide with absolutely conducting walls: ab initio. *Computer Optics* 2018; 42(4): 588-605. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
- [32] Paterson C. Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication. *Phys Rev Lett* 2005; 94(15): 153901.
- [33] Cheng M, Guo L, Li J, Zhang Y. Channel capacity of the OAM-based free-space optical communication links with Bessel-Gauss beams in turbulent ocean. *IEEE Photonics Journal* 2016; 8(1): 1-11.
- [34] Guan B, Scott RP, Qin C, Fontaine NK, Su T, Ferrari C, Cappuzzo M, Klemens F, Keller B, Earnshaw M, Yoo SJB. Free-space coherent optical communication with orbital angular, momentum multiplexing/demultiplexing using a hybrid 3D photonic integrated circuit. *Opt Express* 2014; 22(1): 145-156. DOI: 10.1364/OE.22.000145.
- [35] Wang T, Pu J, Chen Z. Beam-spreading and topological charge of vortex beams propagating in a turbulent atmosphere.

- phere. *Opt Commun* 2009; 282(7): 1255-1259. DOI: 10.1016/j.optcom.2008.12.027.
- [36] Malik M, O'Sullivan M, Rodenburg B, Mirhosseini M, Leach J, Lavery MPJ, Padgett MJ, Boyd RW. Influence of atmospheric turbulence on optical communications using orbital angular momentum for encoding. *Opt Express* 2012; 20(12): 13195-13200. DOI: 10.1364/OE.20.013195.
- [37] Porfirev AP, Kirilenko MS, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium. *Appl Opt* 2017; 56(11): E8-E15. DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
- [38] Lutomirski RF, Yura HT. Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium. *Appl Opt* 1971; 10(7): 1652-1658.
- [39] Feizulin ZI, Kravtsov YA. Broadening of a laser beam in a turbulent medium. *Radiophysics and Quantum Electronics* 1967; 10(1): 33-35.
- [40] Bekshaev A, Soskin M, Vasnetsov M. Paraxial light beams with angular momentum. *Nova Science*; 2008.
- [41] Torres JP. Multiplexing twisted light. *Nat Photon* 2012; 6: 420-422. DOI: 10.1038/nphoton.2012.154.
- [42] Kirilenko MS, Khonina SN. Information transmission using optical vortices. *Optical Memory and Neural Networks* 2013; 22(2): 81-89. DOI: 10.3103/S1060992X13020069.
- [43] Almazov AA, Khonina SN, Kotlyar VV. Using phase diffraction optical elements to shape and select laser beams consisting of a superposition of an arbitrary number of angular harmonics. *J Opt Technol* 2005; 72(5): 391-399. DOI: 10.1364/JOT.72.000391.
- [44] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics. *J Mod Opt* 1998; 45(7): 1495-1506. DOI: 10.1080/09500349808230644.
- [45] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Pääkkönen P, Simonen J, Turunen J. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics. *J Mod Opt* 2001; 48(10): 1543-1557. DOI: 10.1080/09500340108231783.
- [46] Khonina SN, Karpeev SV, Parandin VD. A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre–Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles. *Optics and Lasers in Engineering* 2015; 105: 68-74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
- [47] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Vol. 2. Special functions. – Amsterdam: Gordon & Breach Science Publishers Ltd; 1986. ISBN: 978-2-88124-097-3.
- [48] Young CY, Gilchrest YV, Macon BR. Turbulence-induced beam spreading of higher-order mode optical waves. *Opt Eng* 2002; 41: 1097-1103.

#### Author's information

**Mikhail Sergeevich Kirilenko**, born in 1990, in 2013 he graduated from Samara State Aerospace University, majoring in Applied Mathematics and Computer Science. He defended his thesis on the specialty "Optics" in 2018. Research interests: diffractive optics, optical propagation operators, programming. E-mail: [areatangent@gmail.com](mailto:areatangent@gmail.com).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

*Received May 20, 2019. The final version – June 26, 2019.*