

## Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд

А.В. Воляр<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, Ю.А. Егоров<sup>1</sup>, В.В. Миллюков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,  
295007, Россия, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

### Аннотация

Теоретически и экспериментально исследовано преобразование структуры поля вихревых пучков, подверженных секторному возмущению. В основу был положен анализ спектра вихрей, с помощью которого исследовался орбитальный угловой момент и энтропия Шеннона (информационная энтропия). Компьютерное моделирование для малых, средних и больших углов секторного возмущения показало, что число вихрей, возникающих при секторном возмущении, не изменяет исходный топологический заряд. Это позволило предположить, что исходный топологический заряд будет сохраняться при любых углах секторного возмущения. Рост числа вихрей при возмущении связан с оптическим принципом неопределённости между углом секторного возмущения и орбитальным угловым моментом. Причём в спектре вихрей формируется два максимума, в положительной и отрицательной области топологических зарядов мод. В результате орбитальный угловой момент практически не меняется в широком интервале секторных углов от 0 до 90°. Однако при больших углах возмущения, когда энергия почти одинаково распределяется между модами с противоположными знаками топологического заряда, орбитальный угловой момент быстро уменьшается. В то же время энтропия Шеннона монотонно возрастает с увеличением угла секторного возмущения. Это связано с тем, что энтропия зависит только от числа вихревых состояний, вызванных внешним возмущением.

**Ключевые слова:** дифракционная оптика, орбитальный угловой момент, моменты интенсивности.

**Цитирование:** Воляр, А.В. Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров, В.В. Миллюков // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 723-734. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.

### Введение

Широкое использование световых пучков, переносящих орбитальный угловой момент (ОУМ) в оптических системах передачи и обработки информации [1, 2], предполагает устойчивость их сингулярной структуры относительно слабых возмущений. Также считалось, что пучки Бесселя способны частично восстанавливать структуру при прохождении среды со слабой турбулентностью [3] даже при жёсткой фокусировке [4] или после квантового перепутывания [5]. Аналогичные свойства были обнаружены и у других типов вихревых пучков [6–8]. Однако более внимательный анализ самовосстановления пучков [9] показал, что этот процесс оказывается весьма чувствительным к типу симметрии центров возмущения. Например, Бесселевы пучки самовосстанавливаются при рассеянии на осесимметричных препятствиях, но теряют это свойство при секторном возмущении [4]. Более того, авторы работы [9] утверждают, что Бесселевы пучки не могут восстановить исходную структуру после прохождения через турбулентную среду. Сразу возникает вопрос, как оценивать степень восстановления свойств вихревого пучка? Очевидно, что такая оценка зависит от того, для каких целей и в каких оптических системах используются возмущённые пучки. Например, возмущение в виде непрозрачного правильного сектора позволяет определять топологический заряд оптического вихря [10] и ОУМ пучка [11]. Однако оно вызывает необратимое разрушение

внутренней структуры оптического вихря. Важно отметить, что секторное возмущение приводит в действие принцип неопределённости между углом возмущения секторного препятствия и орбитальным угловым моментом [12, 13], что стимулирует процессы рождения и уничтожения оптических вихрей и возрастание числа новых вихревых состояний. Возрастание внутреннего беспорядка в волновой структуре указывает на необходимость использования новых статистических подходов к измерению таких физических характеристик, как информационная энтропия [14] и пространственная когерентность [15]. Проблемы анализа и измерения пространственной когерентности подробно обсуждаются в монографии Мандела и Вольфа [15]. Как правило, процесс измерений пространственной когерентности сводится к 1D-сканированию интерференционной картины в опыте Юнга, что существенно ограничивает объём полезной информации о состоянии возмущённого пучка. Изучение вопросов восстановления исходной структуры пучка [16, 17] и измерение информационной энтропии могут позволить оценить степень разрушения структуры пучка при возмущении за счёт изменения числа вихревых состояний.

Фундаментальные проблемы анализа информационной энтропии (или *энтропии Шеннона*) в световых пучках были рассмотрены Франсисом [14] и приложены к вихревым пучкам авторами работ [18–20]. Так, авторы работ [18, 20] теоретически оценили ве-

личину информационной энтропии для 1D-отображения невозмущённого лазерного вихревого пучка и связали между собой степень пространственной когерентности и информационную энтропию. Авторы работы [19] представили экспериментальное подтверждение этих теоретических предсказаний. Было обнаружено постепенное возрастание информационной энтропии от 0 до 1 при увеличении топологического заряда вихревого пучка от 0 до 3. Такое изменение энтропии авторы связывают с ухудшением пространственной когерентности при увеличении топологического заряда пучка, которое вызвано усложнением структуры волнового фронта. Изменение числа вихревых состояний при секторном возмущении пучка непосредственно связано с принципом неопределённости между углом секторного сегмента и ОУМ [21]. Авторам работы [12] удалось подробно исследовать соотношение между неопределённостью углового положения внутри вихревого пучка и его угловым моментом. Неопределённость углового момента создавалась за счёт введения в вихревой пучок непрозрачного препятствия в виде одного сектора, вершина которого касается центра пучка. Угол сектора  $\alpha$  служит количественной мерой угловой неопределённости. Неопределённость орбитального углового момента  $\Delta l_z$  связывалась с изменением спектра вихрей, вызванного секторным возмущением. Эти исследования были расширены в работе [13], где авторы рассмотрели Фурье-преобразование между углом и ОУМ при многосекторном возмущении лазерного пучка. Указанные исследования показали, что принцип неопределённости связывает между собой изменение пространственной когерентности, орбитального углового момента и информационной энтропии. Однако разложение возмущённого вихревого пучка по фурье-компонентам недостаточно для описания широкого спектра свойств, которые приобретает пучок. Чтобы расширить возможности анализа вихревых пучков с исходной осевой симметрией, подверженных возмущениям, мы предложили использовать представление таких пучков в виде суперпозиции мод Лагерра–Гаусса с последующим вычислением характерных параметров и выявлением новых свойств пучков.

Таким образом, в данной работе мы сфокусировались на теоретическом и экспериментальном исследовании связи между спектром вихрей, ОУМ и энтропией Шеннона при секторном возмущении вихревого пучка.

### 1. Компьютерное моделирование секторного возмущения

Рассмотрим прохождение скалярного пучка Лагерра–Гаусса  $LG_0^m$  низшего порядка с азимутальным индексом (топологическим зарядом вихря)  $m$  через оптический транспарант с непрозрачным сектором и углом  $\alpha$ , показанным на рис. 1. Вершина сектора касается оси пучка. Поле пучка в исходной плоскости  $z = 0$  представим в виде

$$\Psi_m(r, \varphi, \alpha) = (\rho/w)^{|m|} e^{im\varphi} e^{-\rho^2/w^2} = r^{|m|} e^{im\varphi} e^{-r^2}, \quad \alpha < \varphi < 2\pi - \alpha, \quad (1)$$

где  $r = \rho/w$ ,  $w$  – радиус перетяжки пучка в плоскости  $z = 0$ ,  $\rho$  и  $\varphi$  – полярные координаты.

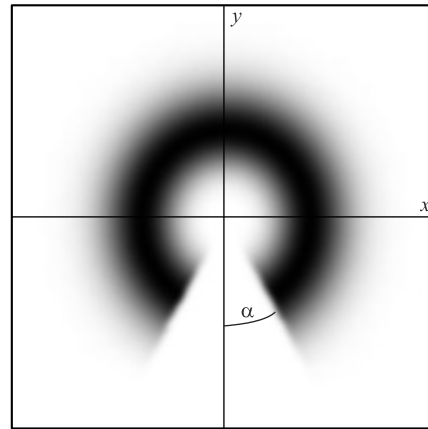


Рис. 1. Геометрия вихревого пучка  $\Psi_m(r, \varphi)$  в плоскости  $z = 0$

Представим поле, модулированное по азимутальному углу  $\varphi$ , в виде разложения по ненормированным  $LG_p^m$  модам:

$$\Psi_m(r, \varphi, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}(\alpha) LG_0^n(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}(\alpha) r^{|n|} e^{in\varphi} e^{-r^2}, \quad (2)$$

где амплитуды мод

$$C_{m,n}(\alpha) = \frac{2^{|m|+1}}{\pi |n|!} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi \int_0^{\infty} r^{|m|+|n|+1} e^{-2r^2} dr = \frac{(-1)^{m-n} \Gamma\left(\frac{|m|+|n|}{2} + 1\right) \sin\left[\frac{(m-n)(\pi-\alpha)}{2}\right]}{\left(\pi 2^{(|m|-|n|/2)} |n|!\right)} = \frac{(-1)^{m-n} \pi - \alpha}{\pi} \Gamma\left(\frac{|m|+|n|}{2} + 1\right) \times \frac{\sin c\left[\frac{(m-n)(\pi-\alpha)}{2}\right]}{\left(2^{(|m|-|n|/2)} |n|!\right)}, \quad (3)$$

где  $\alpha < \pi$ ,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Члены ряда (2) с радиальными индексами  $p \neq 0$  исчезают в силу ортогональности  $LG$  мод. Возмущённый пучок (2) вдали от исходной плоскости  $z = 0$  запишется в виде

$$\Psi_m(r, \varphi, z, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}(\alpha) \left(\frac{r}{\sigma(z)}\right)^{|n|} e^{in\varphi} e^{-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} / \sigma(z), \quad (4)$$

где  $\sigma(z) = 1 - iz/z_0$ ,  $z_0 = k w^2 / 2$  – длина Релея,  $k$  – волновое число.

На рис. 2 представлено компьютерное моделирование распределения интенсивности  $\mathfrak{I}(r, \varphi, z=0)$  и фазы  $\Phi(r, \varphi, z=0)$  вихревого пучка с топологическим

зарядом  $m = 10$ , подвергнутого секторному возмущению с углом сектора  $\alpha$ . Чётко выделяется область секторного препятствия. Основной световой поток образует характерную подкову, концы которой размыты, а вдоль поверхности видна слабая «рябь». Наиболее ярко искажения волнового поля отображает распределение фазы. Локализацию вихрей можно связать с концами нодальных линий в распределении фазы. Слабое возмущение  $\alpha \approx 1^\circ$  приводит к расщеплению вырожденного вихря  $m = 10$  на ряд единичных вихрей внутри подковы. Одновременно рождается облако вихрей, окружающих подкову. Увеличение угла возмущения  $\alpha$  приводит к перестройке фазовой картины таким образом, что вихри внутри подковы стараются сохранить её форму подобно тому, как строится изображение букв в лазерных пучках в работе [22]. Естественная локализация вихрей позволяет сохранить форму возмущённого пучка при распространении с точностью до масштаба и поворота, как показано на рис. 3. Однако число нодальных линий внутри подковы не совпадает с топологическим зарядом невозмущенного пучка из-за проникновения дополнительных вихрей внутрь подковы, вызванных дифракцией на краях апертуры. И это было подтверждено нашим компьютерным моделированием, которое не обнаружило признаков самореконструкции вихревого пучка ни при каких значениях секторного угла  $\alpha$ .

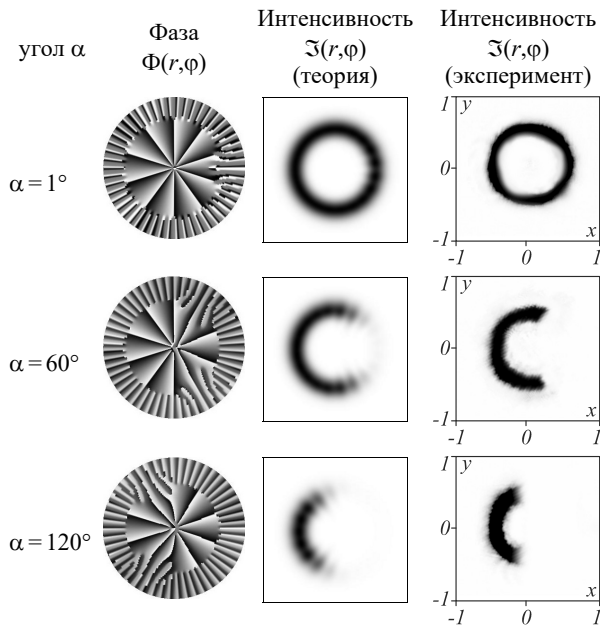


Рис. 2. Теоретическое и экспериментальное распределение интенсивности (инверсия)  $\mathcal{I}(r, \varphi)$  и фазы  $\Phi(r, \varphi)$  возмущённого вихревого пучка с исходным топологическим зарядом  $M = 10$  в плоскости  $z = 0$  в зависимости от угла сектора  $\alpha$ . Координаты  $x$  и  $y$  заданы в безразмерных единицах

Как мы показали в работах [23, 24], анализ спектра вихрей (зависимость интенсивности вихревой моды в сложном пучке от топологического заряда) позволяет восстановить исходный пучок и его ОУМ.

Воспользуемся этим подходом для исследования ОУМ и информационной энтропии.

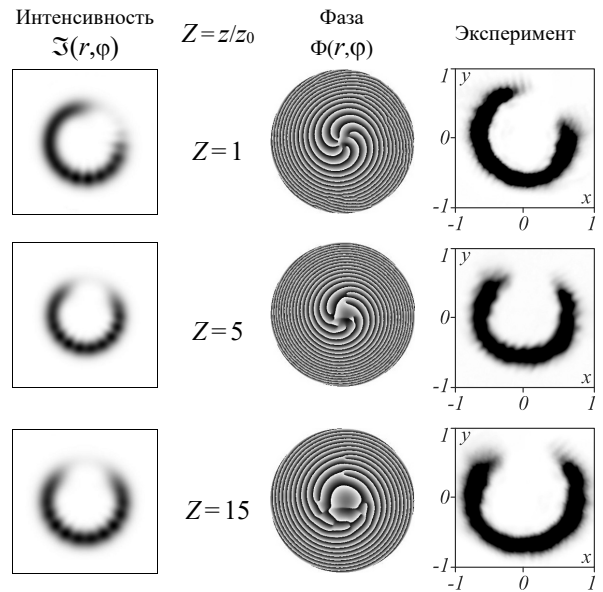


Рис. 3. Эволюция интенсивности (инверсия)  $\mathcal{I}(r, \varphi)$  и фазы  $\Phi(r, \varphi)$  вихревого пучка с топологическим зарядом  $M = 10$  вдоль ось  $Z = z/z_0$ , подвергнутого секторному возмущению с углом  $\alpha = 45^\circ$  (теория и эксперимент). Координаты  $x$  и  $y$  заданы в безразмерных единицах

**Спектры вихрей.** Заметим, что при построении поля возмущенного пучка мы использовали амплитуды мод  $C_{m,n}$ , полученные из выражения (3), где функция поля мод  $\Psi_n$  не нормирована. При этом результаты компьютерного моделирования и эксперимента хорошо согласуются (рис. 2, 3). Однако при вычислении ОУМ и информационной энтропии следует использовать амплитуды  $\bar{C}_{m,n}^2$ , полученные при условии нормировки  $\Psi_m$  [25]. Между этими амплитудами существует простое соотношение  $\bar{C}_{m,n}^2 = 2^{-|n|-2} |n|! C_{m,n}^2$ . Чтобы наглядно подчеркнуть действие секторного возмущения на вихревой пучок, мы разместили на рис. 4 две серии спектров вихрей  $C_{m,n}^2(\alpha)$  для исходных топологических зарядов  $m = 5$  и  $m = 15$ .

Анализ вихревых спектров показал, что в интервале углов  $\alpha \in (0, 45^\circ)$  происходит очень вялая перекачка энергии из основной гармоники с  $m = 5$  и  $m = 15$  в соседние моды. Огибающая дискретного спектра почти симметрична относительно центральных основных мод. Спектральные сателлиты располагаются в положительной области топологических зарядов мод  $n > 0$ .

Однако по мере увеличения угла  $\alpha$  (уменьшения смежного угла  $\beta = \pi - \alpha$ ) симметрия нарушается. После угла  $\alpha = 90^\circ$ , при котором вырезается половина светового потока, в отрицательной области спектра  $n < 0$  наблюдается зеркальный максимум.

Уменьшение угла  $\beta$  сопровождается интенсивной перекачкой энергии в вихревые моды с отрицательными топологическими зарядами. Из сравнения спектров для  $m = 5$  и  $m = 15$  видим, что перекачка энергии

в моды с  $n < 0$  происходит более интенсивно для пучков с меньшими топологическими зарядами  $|m|$ . Стоит отметить, что аналогичные измерения проводили авторы работы [13], проверяя оптический принцип неопределённости между азимутальным углом и ОУМ. Авторы не обнаружили формирования дополнительного массива вихревых мод с  $n < 0$ . Это связано с тем, что ими исследовались топологически нейтральные пучки  $m=0$  и  $m=2$  при угле  $2\beta=45^\circ$ . Как мы показали, при этих условиях возникновение второго спектрального максимума невозможно.

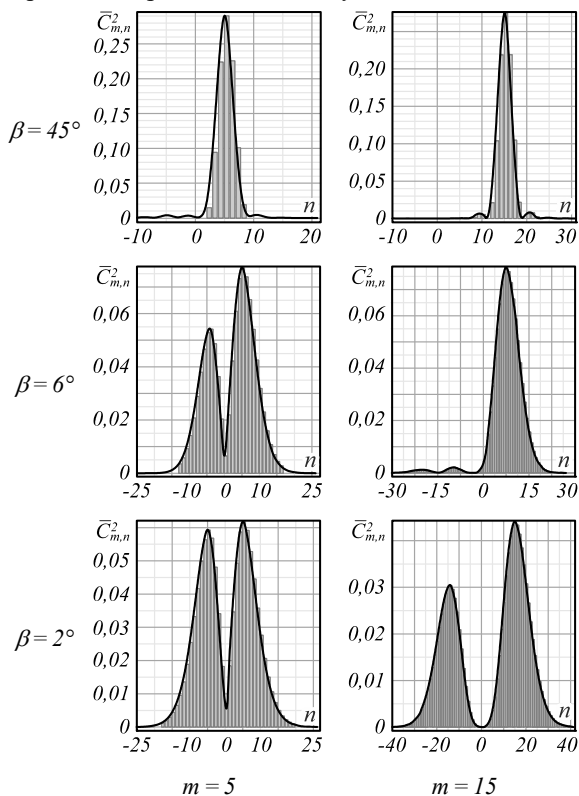


Рис. 4. Дискретный спектр вихрей  $C_{m,n}^2$  ЛГ-пучков с топологическими зарядами  $m = 5$  и  $m = 15$ , возмущенных секторной диафрагмой со смежным углом сектора  $\beta = \pi - \alpha$ . Сплошная линия – огибающая дискретного спектра

**Топологический заряд.** По определению топологический заряд монохроматического пучка задаётся полным числом оптических вихрей в поперечном сечении светового потока с учётом их знаков и вычисляется контурным интегралом на комплексной плоскости [26]. М. Берри свёл данный интеграл к виду, удобному для вычислений (см. формулу (21) в работе [25]):

$$M = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \Psi_m(r, \varphi, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n C_{m,n}(\alpha) r^{|n|} e^{in\varphi}}{\sum_{n=-\infty}^N C_{m,n}(\alpha) r^{|n|} e^{in\varphi}} \right\}. \quad (5)$$

Мы провели ряд компьютерных оценок топологического заряда возмущённого пучка (1) для различных исходных топологических зарядов. При этом использовались следующие ограничения. Как показывают спектры вихрей на рис. 4, квадраты амплитуд мод быстро стремятся к нулю по мере возрастания их топологического заряда  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{m,n}^2 \rightarrow 0.$$

Поэтому можно ограничиться конечным числом мод  $|n_{\max}| = N$ , при которых  $C_{mn}^2 \sim 10^{-3}$ . Радиус полуширины пучка можно оценить по формуле положения максимума интенсивности исходного вихревого пучка  $r_N = \sqrt{|N|/2}$ . Поэтому в (5) мы заменили предел  $r \rightarrow \infty$  на  $r \rightarrow 3r_N$ . Результаты компьютерного моделирования приведены на рис. 5. Из рис. 5 видно, что общий топологический заряд  $M$  при  $\alpha = 3\pi/4$  остаётся равным исходному топологическому заряду невозмущённого пучка  $N = m$ .

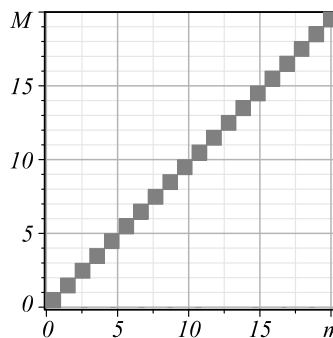


Рис. 5. Компьютерное моделирование выражения зависимости полного топологического заряда  $M$  возмущенного пучка от топологического заряда  $m$  исходного пучка. При вычислениях учитывалось, что максимальное число вихрей в пучке  $n_{\max} = 20$  с квадратом амплитуды  $C_{m,n_{\max}}^2 \sim 10^{-3}$  и в формуле (5) принято  $r \rightarrow 10$

Компьютерные расчёты для углов секторной диафрагмы  $\alpha = \pi/4, \pi/2, 30\pi/31$  показывают аналогичные результаты. Поэтому мы предполагаем, что и в общем случае произвольных углов  $\alpha$  будет выполняться сохранение исходного топологического заряда при секторном возмущении.

Именно этим свойством воспользовались авторы работы [10] для экспериментальной оценки топологического заряда при секторном возмущении. Хотя авторы не оценивали топологический заряд возмущённого пучка, они заметили, что при определённых секторных углах  $\alpha$ , число максимумов в «подковке» распределения интенсивности равно исходному топологическому заряду пучка.

Сразу обратим внимание на тот факт, что топологический заряд возмущённого вихря  $M$  и число вихрей, возникших при возмущении, являются совершенно разными физическими характеристиками. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Вообще говоря, положение центров вихрей определяется решением

уравнений для вихревых траекторий  $\text{Re}\Psi_m(r, \varphi, z) = 0$  и  $\text{Im}\Psi_m(r, \varphi, z) = 0$ .

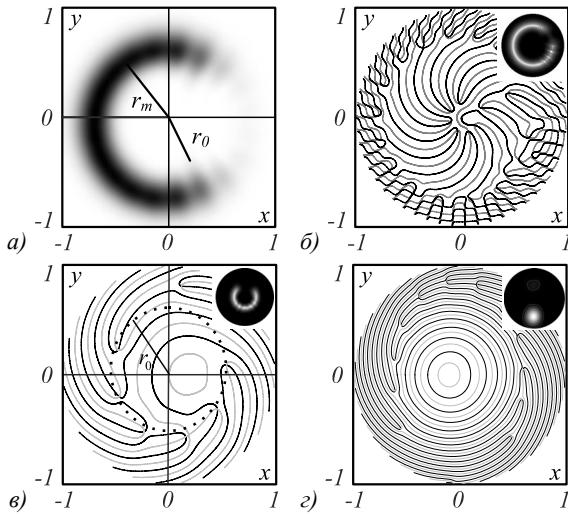


Рис. 6. Распределение интенсивности  $z = 0$  и  $\alpha = 5\pi/24 \text{ рад} = 17,5^\circ$  (а). Положение центров вихрей на линии пересечения поверхностей  $\text{Re}\Psi_m = 0$  и  $\text{Im}\Psi_m = 0$  для  $Z = 0,5$  (б),  $Z = 7$  и  $\alpha = 17,5^\circ$  (в),  $Z = 15$ ,  $\alpha = 170^\circ$  ( $\beta = 10^\circ$ ) (г)

Сечение траекторий плоскостью наблюдения  $z = z_{\text{obs}}$  задаёт положение центров вихрей. Результаты нашего компьютерного моделирования для возмущённого пучка с топологическим зарядом  $m = 10$  приведены на рис. 6. Видим, что число вихрей в области наблюдения быстро изменяется с изменением секторного угла  $\alpha$  и положения плоскости наблюдения  $z = z_{\text{obs}}$ . Вблизи плоскости перетяжки  $Z = 0,5$  и  $\alpha = 5\pi/24 = 17,5^\circ$  (рис. 6б) наблюдается 8 центров вихрей в окрестности оси пучка, окружённых множеством вихрей на периферии, но число наблюдаемых максимумов только четыре. В волновой зоне  $Z = 7$  (рис. 6в) число максимумов совпадает числом нулей поля в окрестности оси. Переход к дальней зоне дифракции  $Z = 15$  сопровождается исчезновением наблюдаемых максимумов (на рисунке не показано).

Увеличение секторного угла  $\alpha$  (уменьшение смежного угла  $\beta$ ) на рис. 6г приводит к резкому увеличению числа наблюдаемых вихрей. С другой стороны, формула (5) показывает, что амплитуды вихревых мод  $C_{m,n}$  не зависят от амплитуды, т.е. топологический заряд  $m$  не связан с числом вихрей в возмущённом пучке. На первый взгляд, это противоречит привычным представлениям о вихревых пучках. Но следует помнить, что формула (5) задаёт топологический заряд исходного поля  $m$ , который называют топологическим зарядом при условии, что возмущение не вносит истоков или стоков ОУМ (как, например, оптический клин [27], оптическое волокно [28] или анизотропная среда [29]).

В противоположность авторам работы [10] мы исследовали положение вихрей в области дифракционной полутени внутри подковы возмущённого пучка. Для этого мы сканировали азимутальное распределение интенсивности на расстоянии  $r_0$  от оси пучка (см.

рис. 6а). Результаты сканирования приведены на рис. 7а, б в полярных координатах. Число лепестков кривых совпадает с исходным топологическим зарядом  $m$ . Поскольку по мере увеличения топологического заряда положения вихрей может значительно смещаться от окружности сканирования  $r = r_0$ , размеры внутренних лепестков существенно отличаются от внешних лепестков. Кроме того, в область наблюдения попадают вихри, возникшие на краях секторной апертуры. Поэтому следует ожидать, что экспериментальная регистрация топологического заряда для пучков с  $m > 7$  окажется затруднительной.

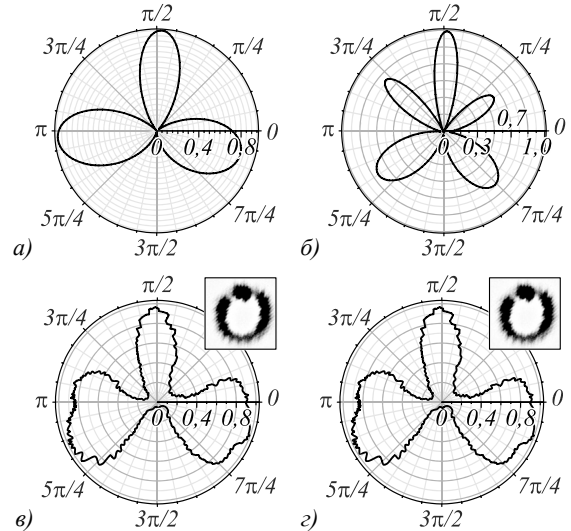


Рис. 7. Азимутальное распределение интенсивности  $\mathfrak{I}(r_0, \varphi)$  на расстоянии  $r_0$  от оси вихревого пучка в дальней зоне дифракции для различных топологических зарядов  $m$  при угле сектора  $\alpha \approx 15^\circ$ : теория  $m = 3$ ,  $r_0 = 3$  (а);  $m = 5$ ,  $r_0 = 6,5$  (б); эксперимент  $m = 3$  (в),  $m = 5$  (г). На выноске приведены изображения пучков в плоскости сканирования

Орбитальный угловой момент. В отличие от топологического заряда пучка ОУМ чувствует изменение числа вихрей, вызванное произвольным возмущением. Действительно, ОУМ на фотон возмущённого пучка задаётся формулой [25]

$$\ell_z(\alpha, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{C}_n^2(\alpha, m) / \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n^2(\alpha, m) = \sum_{n=1}^{\infty} n [\bar{C}_n^2(\alpha, m) - \bar{C}_{-n}^2(\alpha, m)] / \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n^2(\alpha, m). \quad (6)$$

Заметим, что использование термина спектр ОУМ в тексте эквивалентно зависимости ОУМ  $\ell_z$  либо от секторного угла  $\alpha$ , либо от исходного топологического заряда вихревого пучка, в то время как термин «спектр вихрей» подразумевает зависимость квадратов амплитуд мод  $C_{m,n}^2$  от топологического заряда мод при заданных значениях секторного угла  $\alpha$  и исходного топологического заряда  $m$  вихревого пучка.

Из выражения (5) видим, что спектр ОУМ однозначно задаётся вихревыми модами  $\bar{C}_n^2$ , так что всякие изменения в спектре вихрей немедленно отражаются на спектре ОУМ. Действительно, для возмущённых состояний  $|m\rangle = |5\rangle$ ,  $|10\rangle$  и  $|15\rangle$  ОУМ  $\ell_z(\alpha)$  практически

не изменяется (рис. 8а) в широком интервале секторных углов  $\alpha=(0^\circ, 90^\circ)$ , поскольку нет существенных изменений в спектре вихрей. В этом интервале происходит очень слабая перекачка энергии в спектрах  $\bar{C}_{m,n}^2$  на рис. 4а, б, которая в основном сказывается на «хвостах»: в спектре вихрей на рис. 4. Существенные изменения ОУМ наступают при углах  $\beta > 45^\circ$ , когда начинает формироваться второй максимум в спектре вихрей  $\bar{C}_{m,n}^2$ . По мере притока энергии во второй максимум ОУМ стремительно уменьшается, так что при  $\beta \approx 2^\circ$  интенсивности в спектральных максимумах уравниваются, а ОУМ снижается до нуля.

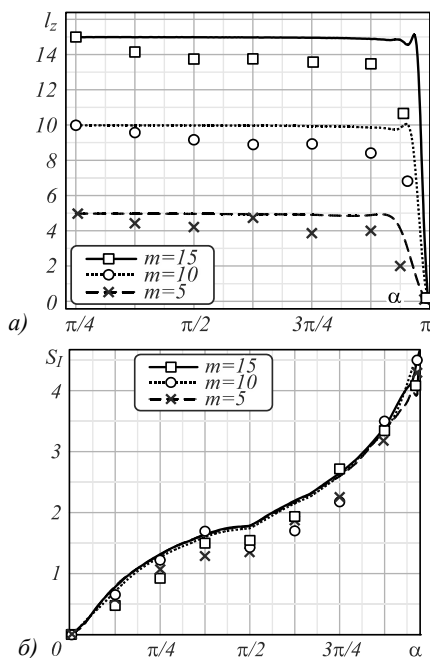


Рис. 8. Компьютерное моделирование ОУМ  $l_z(\alpha, m)$  (а) и энтропии Шеннона  $S_I(\alpha, m)$  (б) для топологических зарядов  $m = 5, m = 10, m = 15$  (линии крестиком (×), кружкам (○) и квадратиком (□) соответствуют эксперименту)

Энтропия Шеннона (информационная энтропия). Нормированный квадрат амплитуды  $\bar{C}_n^2 \in (0,1)$  (3) в разложении (2) волновой функции поля (1) по вихревым модам можно рассматривать как условную вероятность  $P(n/m)$  встретить вихревой пучок в состоянии  $|n\rangle$  при условии, что на состояние  $|m\rangle$  действовало внешнее возмущение  $\alpha$  [15] (т.е.  $P(n/m) = \bar{C}_n^2(\alpha, m)$ ). Такой вероятностный подход учёта числа вихревых состояний можно использовать в формуле Шеннона.

Ещё в 1948 году Клод Шеннон [14] предложил учитывать меру потери информации (меру неопределённости), возникающую при действии возмущения на информационный канал за счёт перераспределения энергии по другим каналам, формулой

$$S_I = -\sum_{n=0}^N P(n/m) \log_2 P(n/m). \quad (7)$$

Учитывая выше сказанное, формулу (7) можно переписать в терминах квадратов амплитуд (интенсивностей) вихревых мод

$$S_I = -\sum_{n=0}^N \bar{C}_n^2(\alpha, m) \log_2 \bar{C}_n^2(\alpha, m). \quad (8)$$

Энтропия  $S_I$  является действительной положительной величиной и изменяется в широком интервале значений  $0 < S_I < \infty$  при изменении квадратов нормированных амплитуд в интервале  $1 > \bar{C}_n^2(\alpha, m) > 0$ . На рис. 8б показана зависимость энтропии  $S_I$  от угла  $\alpha$  для различных топологических зарядов  $m$ . В отличие от ОУМ информационная энтропия возрастает уже при сравнительно небольших углах возмущения  $\alpha$ , поскольку число возбуждённых вихревых состояний возрастает, хотя переносимая ими энергия мала. При  $\alpha = 90^\circ$  скорость изменения энтропии (направление касательной к кривой  $S_I(\alpha)$ ) изменяется, поскольку скорость рождения новых вихревых состояний начинает быстро возрастать. Характерно, что на этом интервале углов кривые  $S_I(\alpha)$  для различных  $m$  почти совпадают. Это указывает на идентичность процессов возбуждения вихревых состояний для различных топологических зарядов. Кривые  $S_I(\alpha)$  расщепляются в области углов  $\beta \sim 10^\circ$ , поскольку генерация новых вихревых состояний происходит быстрее для пучков с большими топологическими зарядами. Заметим, что информационная энтропия характеризует изменение числа вихрей в возмущённом пучке. Если ОУМ  $l_z$  характеризуется относительным вкладом разности интенсивностей вихревых мод с противоположными знаками топологических зарядов (см. формулу (6)), то энтропия Шеннона  $S_I$  учитывает полное число вихрей возмущённого пучка.

## 2. Эксперимент и обсуждение результатов

Мы поставили задачу измерения спектров вихрей и на их основе анализа изменения энтропии и ОУМ в сложном вихревом пучке при слабых и сильных секторных возмущениях для вихрей с различными топологическими зарядами. Основная идея измерительного процесса заключалась в разделении пучков как по величине, так и по знаку топологического заряда. Если голографические методы позволяют осуществлять этот процесс, разделяя пучки с различными топологическими зарядами  $m$  в 3D-пространстве по направлениям распространения вихревых мод (см., например [30, 31]), то в нашем случае такое разделение осуществляется в виртуальном пространстве компьютера в соответствии с откликом вихревых мод на моменты интенсивности высших порядков [23, 24, 32]. Одним из основных требований измерений является способность метода разделять вихревые пучки по знаку топологического заряда. Если для анализа спектра вихрей методом моментов интенсивностей с одним знаком топологического заряда достаточно ограничиться измерением лазерного пучка в фокальной плоскости сферической линзы [23, 24], то для измерения спектра смешанных массивов вихрей необходимо использовать дополнительные астигматичные преобразования пучка [32]. Такую астигматичную операцию выполняет цилиндрическая линза CL (рис. 9). Цилиндрическая линза в

плоскости двойного фокуса преобразует пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ) в пучок Эрмита–Гаусса (ЭГ). ЛГ-пучки с противоположными знаками топологических зарядов формируют ЭГ-пучки с ортогональными осями астигматизма. Число нулей функции ЭГ равно топологическому заряду единичного ЛГ-пучка. Далее смешанный массив вихрей анализируется методом моментов интенсивности [33].

Для формирования возмущённых вихревых пучков мы отказались использовать секторные голограммы на пространственном модуляторе (SLM), как это делалось в работах [10, 12, 13], поскольку при измерениях моментов интенсивности высших порядков возникали большие погрешности из-за неучтённых краевых эффектов на секторных голограммах. Вместо этого использовалась металлическая секторная диафрагма (D) с регулируемым углом сектора, которая устанавливалась непосредственно перед цилиндрической линзой (CL), как показано на рис. 9. Таким образом, сначала на SLM-модуляторе формировался ЛГ-пучок с заданным топологическим зарядом  $m$ . Затем секторное возмущение с заданным углом  $\alpha$  создавалось диафрагмой (D) и преобразовывалось цилиндрической линзой CL, и далее регистрировалось CCD-камерой, установленной в плоскости двойного фокуса CL-линзы. Спектр вихрей выводился на экран монитора после соответствующей обработки изображения пучка. Для измерений использовался SLM-модулятор типа (Thorlabs EXULUS-4K1) и CCD-камера типа (Thorlabs DCC1645).

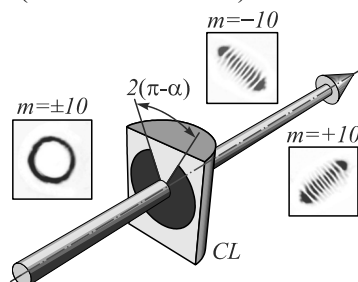


Рис. 9. Эскиз секторной апертуры (D) в плоскости цилиндрической линзы (CL)

**Топологический заряд.** Сначала исследовалась устойчивость формы возмущённого пучка относительно распространения из волновой в дальнюю зону дифракции. На рис. 2 представлены изображения возмущённого пучка с различным углом возмущения  $\alpha$ . Возмущение с секторным углом  $\alpha \approx 1^\circ$  практически не изменяет форму пучка за исключением небольшого участка «прокола» пучка. При больших углах возмущения возникает изображение в виде подковы с размытыми краями. В процессе распространения средняя форма пучка сохраняется с точностью до масштаба и поворота.

Как показало компьютерное моделирование, оптические вихри локализируются в области дифракционной полутени вблизи внутренних краёв подковы. Для детектирования их положения требовалось решить проблему высокого градиента интенсивности при переходе из области  $r_m$  в область  $r_0$  (рис. 6а).

Для решения этой проблемы использовался метод псевдоцветов [34]. В этом методе присвоение пикселям разных цветов осуществляется в результате градации по уровням яркости. В данной работе использована дискретная настраиваемая палитра, в которой первоначальные компоненты цвета (R, G, B) выбираются с помощью датчика случайных чисел. Измерения показывают, что использование палитр случайных цветов позволяет хорошо выделять мельчайшие детали изображения, но при этом теряется информативность самого цвета. Кроме того, при большом числе цветов в палитре теряется связность изображения, происходит его кластеризация. Тем не менее, удобно брать случайные палитры в качестве основы, а затем вручную заменять некоторые цвета палитры. Таким способом можно достичь очень высокой детализации изображений даже в затемнённых областях, которые глаз воспринимает как чёрное пятно.

Компьютерная программа реализована нами на языке C# и позволяет быстро обрабатывать изображения размером до 100 Мб, «на лету» осуществлять замену цвета в палитре и использовать в дальнейшем настроенные палитры цветов. Идея использования псевдоцветов не является новой и широко используется на практике. Средства визуализации, основанные на псевдоцветах, имеются, например, в MATLAB, где содержится более 15 специальных палитр для визуализации значений двумерных и трёхмерных матриц [34].

В качестве примера калибровки цветов на рис. 10 представлено изображение вихревого пучка с  $m=3$  и возмущением  $\alpha=15^\circ$ .

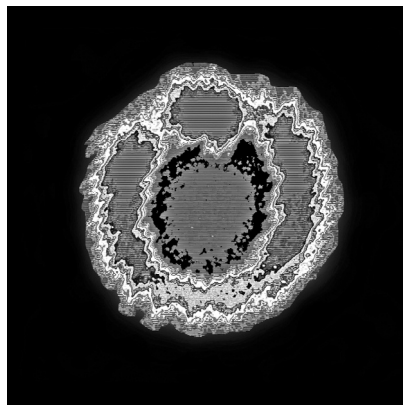


Рис. 10. Калибровка цветов для детектирования локализации вихрей внутри подковы пучка с  $m=3$  и  $\alpha=15^\circ$

Для сканирования изображения потребовалось провести дополнительное размытие изображения с помощью электронного фильтра, импульсной переходной функцией которого является функция Гаусса. Положение радиуса сканирования  $r_0$  подбиралось вручную в области внутренней полутени таким образом, чтобы график зависимости интенсивности  $\mathfrak{I}$  от азимутального угла  $\varphi$  имел наиболее приемлемую форму для анализа. В результате сканирования получаем в полярных координатах замкнутую кривую, число лепестков которой равно топологическому заряду  $m$  невозмущённого пучка. На рис. 7в, г представлены кривые для топологических зарядов  $m=3$  и

$m = 5$ . Нам не удалось получить приемлемые для анализа кривые для  $m > 7$ , поскольку при высоких значениях топологического заряда положения вихрей значительно смещены относительно окружности сканирования  $r = r_0$ , а размеры лепестков становятся сравнимыми с уровнем спекл-шума.

**Спектр вихрей.** В процессе измерений спектра вихрей  $\bar{C}_{m,n}^2(\alpha)$  возмущённого пучка появлялся большой массив оптических вихрей. Число вихрей зависит как от исходного топологического заряда  $m$ , так и от угла возмущения  $\alpha$ . Например, при угле  $\beta = \pi - \alpha = 25^\circ$  в возмущённом пучке в состоянии  $|5\rangle$  участвуют  $N = 19$  вихрей с интенсивностью не ниже 0,05, при угле  $\beta \approx 6^\circ$  уже возникает  $N \sim 41$  вихрь с относительной интенсивностью не менее чем 0,05. Чтобы сравнить результаты компьютерного моделирования с экспериментом, мы построили огибающие дискретных спектров вихрей. Результаты компьютерного моделирования и эксперимента приведены на рис. 11. Сравнение кривых на рисунке показывает хорошее согласование теории и эксперимента. Погрешность измерений зависит от числа вихрей в спектре. Так, при возмущении  $\alpha = 135^\circ$  в пучке с  $m = 5$  присутствует  $N = 11$  вихрей, и погрешность измерений составляет 6%, в то время как возмущению  $\alpha = 173^\circ$  соответствует  $N = 41$  вихрь, и погрешность снижается до 2%.

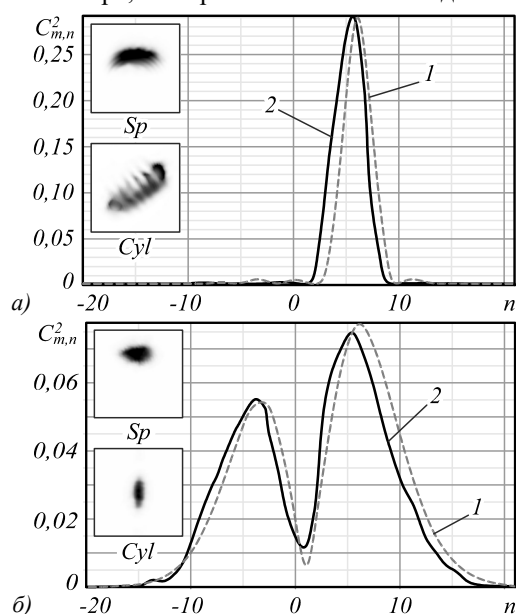


Рис. 11. Огибающие дискретного спектра вихрей с  $m = 5$ :  $\alpha = 135^\circ$  (а) и  $\alpha = 173^\circ$  (б); (1) теория, (2) эксперимент.

Выводы: снимки пучка после сферической линзы (Sp) и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы (Cyl)

**Орбитальный угловой момент.** Результаты измерений ОУМ и эксперимента представлены на рис. 8а в виде экспериментальных точек вблизи соответствующих теоретических кривых. При небольших углах возмущения  $\alpha$  наблюдается небольшое рассогласование теории и эксперимента. Если ОУМ при компьютерном моделировании мало отличается от исходного топологического заряда  $l_z \approx m$ , то измерения ОУМ дают отклонение в пределах 6%. Однако это рассогласо-

вание быстро сокращается с увеличением секторного угла. Мы относим возникшую погрешность на счёт несовершенства краёв апертурой диафрагмы.

**Энтропия Шеннона.** Экспериментальные точки зависимости энтропии  $S_I$  от секторного угла  $\alpha$  были получены при помощи формулы (8) с учётом спектра вихрей  $C_{m,n}^2(\alpha)$ . Результаты измерений довольно точно повторяют ход теоретических кривых на рис. 8б. Чётко прослеживается резкое возрастание энтропии при больших углах возмущения, которое отражает возникновение лавины вихрей на рис. 4.

### Заключение

Исследовано преобразование спектра вихрей, топологический заряд, ОУМ и энтропия Шеннона (информационная энтропия) при секторном возмущении вихревых ЛГ-пучков высших порядков. Была построена модель секторного возмущения, проведены компьютерные вычисления и экспериментальные измерения на основе метода моментов интенсивности. Используя компьютерные оценки для малых, средних и больших секторных углов, мы предположили, что топологический заряд остаётся постоянным при любой величине секторного возмущения и будет равным топологическому заряду невозмущённого пучка. Был предложен метод и проведены измерения топологического заряда на основе компьютерной модели многошаговой градации цветов. Исследование спектров вихрей показали, что изменением спектра вихрей управляет оптический принцип неопределённости между углом секторной апертуры и ОУМ, который существенно сказывается на спектре вихрей при очень больших секторных углах. При малых углах секторной диафрагмы в формировании спектра участвуют вихревые пучки с одинаковым знаком топологического заряда, однако при больших углах возмущения в отрицательной области топологических зарядов формируется зеркальный максимум. При очень больших углах секторного возмущения возникает лавина вихрей, которая способствует почти одинаковому перераспределению энергии между двумя максимумами.

Изменение ОУМ сопровождается преобразованием спектра вихрей. Поскольку ОУМ зависит не от интенсивности каждого модового пучка, а от разности интенсивностей модовых пучков, то при малых углах возмущения он почти численно совпадает с топологическим зарядом исходного вихревого пучка, но при больших углах возмущения, когда вклад вихревых мод с противоположными топологическими зарядами почти уравнивается, ОУМ быстро стремится к нулю. Энтропия Шеннона определяется числом вихрей, вызванных возмущением. Поэтому по мере увеличения угла возмущения энтропия монотонно возрастает.

### Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-01233; гранта №ВГ24/2018 «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского».



*Литература*

1. **Yao, A.M.** Orbital angular momentum: origins, behavior and applications / A.M. Yao, M.J. Padgett // *Advances in Optics and Photonics*. – 2011. – Vol. 3. – P. 161-204. – DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
2. **Willner, A.E.** Optical communications using orbital angular momentum beams / A.E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M.P.J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A.F. Molisch, N. Ashrafi, S. Ashrafi // *Advances in Optics and Photonics*. – 2015. – Vol. 7. – P. 66-106. – DOI: 10.1364/AOP.7.000066.
3. **Li, S.** Adaptive free-space optical communications through turbulence using self-healing Bessel beams / S. Li, J. Wang // *Scientific Reports*. – 2017. – Vol. 7. – 43233. – DOI: 10.1038/srep43233.
4. **Vyas, S.** Self-healing of tightly focused scalar and vector Bessel–Gauss beams at the focal plane / S. Vyas, Y. Kozawa, S. Sato // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2011. – Vol. 28, Issue 5. – P. 835-843. – DOI: 10.1364/JOSAA.28.000837.
5. **McLaren, M.** Self-healing of quantum entanglement after an obstruction / M. McLaren, T. Mhlanga, M.J. Padgett, F.S. Roux, A. Forbes // *Nature Communication*. – 2014. – Vol. 5. – 3248. – DOI: 10.1038/ncomms4248.
6. **Broky, J.** Self-healing properties of optical Airy beams / J. Broky, G.A. Siviloglou, A. Dogariu, D.N. Christodoulides // *Optics Express*. – 2008. – Vol. 16, Issue 17. – P. 12880-12891. – DOI: 10.1364/OE.16.012880.
7. **Aiello, A.** Unraveling beam self-healing / A. Aiello, G.S. Agarwal, M. Paúr, B. Stoklasa, Z. Hradil, J. Řeháček, P. de la Hoz, G. Leuchs, L.L. Sánchez-Soto // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 16. – P. 19147-19157. – DOI: 10.1364/OE.25.019147.
8. **Ring, J.D.** Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams / J.D. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia, M.R. Dennis // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, Issue 17. – P. 18955-18966. – DOI: 10.1364/OE.20.018955.
9. **Mphuthi, N.** Are Bessel beams resilient to aberrations and turbulence? / N. Mphuthi, R. Boltha, A. Forbes // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2018. – Vol. 35, Issue 6. – P. 1021-1027. – DOI: 10.1364/JOSAA.35.001021.
10. **Chen, R.** Detecting the topological charge of optical vortex beams using a sectorial screen / R. Chen, X. Zhang, Y. Zhou, H. Ming, A. Wang, Q. Zhan // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 16. – P. 4868-4872. – DOI: 10.1364/AO.56.004868.
11. **Malik, M.** Measurement of the orbital-angular-momentum spectrum of fields with partial angular coherence using double-angular-slit interference / M. Malik, S. Murugkar, J. Leach, R.W. Boyd // *Physical Review A*. – 2012. – Vol. 86. – 063806. – DOI: 10.1103/PhysRevA.86.063806.
12. **Franke-Arnold, S.** Uncertainty principle for angular position and angular momentum / S. Franke-Arnold, S. Barnett, E. Yao, J. Leach, J. Courtial, M. Padgett // *New Journal of Physics*. – 2004. – Vol. 6. – P. 1-8. – DOI: 10.1088/1367-2630/6/1/103.
13. **Yao, E.** Fourier relationship between angular position and optical orbital angular momentum / E. Yao, S. Franke-Arnold, J. Courtial, S. Barnett, M. Padgett // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, Issue 20. – P. 9071-9076. – DOI: 10.1364/OE.14.009071.
14. **Yu, F.T.S.** Entropy and information optics / F.T.S. Yu. – New York: Marcel Dekker Inc., 2000. – 528 p. – ISBN: 978-0-8247-0363-9.
15. **Mandel, L.** Optical coherence and quantum optics / L. Mandel, E. Wolf. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1192 p. – DOI: 10.1017/CBO9781139644105.
16. **Zeng, J.** Review on partially coherent vortex beams / J. Zeng, R. Lin, X. Liu, C. Zhao, Y. Cai // *Frontiers of Optoelectronics*. – 2019. – Vol. 12, Issue 3. – P. 229-248. – DOI: 10.1007/s12200-019-0901-x.
17. **Wang, F.** Self-reconstruction of partially coherent light beams scattered by opaque obstacles / F. Wang, Y. Chen, X. Liu, Y. Cai, S.A. Ponarenko // *Optics Express*. – 2016. – Vol. 24, Issue 21. – P. 23735-23746. – DOI: 10.1364/OE.24.023735.
18. **Agarwal, G.S.** Spatial coherence and information entropy in optical vortex fields / G.S. Agarwal, J. Banerji // *Optics Letters*. – 2002. – Vol. 27, Issue 10. – P. 800-802. – DOI: 10.1364/OL.27.000800.
19. **Kumar, A.** Information content of optical vortex fields / A. Kumar, S. Prabhakar, P. Vaity, R.P. Singh // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36, Issue 7. – P. 1161-1163. – DOI: 10.1364/OL.36.001161.
20. **Bastiaans, M.J.** Uncertainty principle and informational entropy for partially coherent light / M.J. Bastiaans // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1986. – Vol. 3, Issue 8. – P. 1243-1246. – DOI: 10.1364/JOSAA.3.001243.
21. **Barnett, S.M.** On the Hermitian optical phase operator / S.M. Barnett, D.T. Pegg. – In: *The quantum phase operator: a review* / ed. by S.M. Barnett, J.A. Vaccaro. – London: Taylor & Francis, 2007. – 499 p.
22. **Abramochkin, E.** Beam transformations and non-transformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
23. **Volyar, A.V.** Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 22. – P. 5635-5638. – DOI: 10.1364/OL.43.005635.
24. **Volyar, A.** Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Y. Akimova, Y. Egorov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2019. – Vol. 36, Issue 6. – P. 1064-1071. – DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
25. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A*. – 2004. – Vol. 6. – P. 259-269. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
26. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // *Proceedings of the Royal Society A*. – 1974. – Vol. 336. – P. 165-190. – DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
27. **Izdebskaya, Y.** Focusing of wedge-generated higher-order optical vortices / Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar // *Optics Letters*. – 2005. – Vol. 30, Issue 19. – P. 2530-2532. – DOI: 10.1364/OL.30.002530.
28. **Volyar, A.V.** Optical eddies in small-mode fibers: II. The spin-orbit interaction / A.V. Volyar, V.Z. Zhilaitis, V.G. Shvedov // *Optika i Spektroskopiya*. – 1999. – Vol. 86, Issue 4. – P. 664-670.
29. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 96. – 063807. – DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.
30. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.

31. **Wang, Z.** High-volume optical vortex multiplexing and demultiplexing for free-space optical communication / Z. Wang, N. Zhang, X.-C. Yuan // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19, Issue 2. – P. 482-492. – DOI: 10.1364/OE.19.000482.
32. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
33. **Воляр, А.В.** Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 517-527. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
34. **Гонсалес, Р.** Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс, под ред. П.А. Чочиа; пер. с англ. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.

### Сведения об авторах

**Воляр Александр Владимирович** – 1949 года рождения. Выпускник Симферопольского государственного университета (1972), а после окончания – его сотрудник. Доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Брецько Михаил Владимирович** – 1994 года рождения. С 2012 года студент Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. На данный момент аспирант второго курса кафедры общей физики Физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, обработка графических изображений, программирование. E-mail: [mikhailbretcko4@gmail.com](mailto:mikhailbretcko4@gmail.com).

**Акимова Яна Евгеньевна** – 1994 года рождения. С 2012 года студент Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. На данный момент аспирант второго курса кафедры общей физики, физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Егоров Юрий Александрович** – 1975 года рождения. Выпускник Таврического национального университета (в настоящее время КФУ). Получил степень кандидата физико-математических наук в области оптики и лазерной физики в Таврическом национальном университете в 2005 году. Начиная с 2006 года доцент кафедры общей физики. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптика анизотропных сред. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

**Миллюков Виктор Васильевич** – 1955 года рождения. Выпускник Симферопольского государственного университета (1976), а после окончания – его сотрудник. Кандидат технических наук (1987). С 1994 г. – доцент, с 2015 г. – заведующий кафедрой компьютерной инженерии и моделирования. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование в физике. E-mail: [milyukov.vv@cfuv.ru](mailto:milyukov.vv@cfuv.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 23 июля 2019 г. Окончательный вариант – 26 августа 2019 г.

## Sectorial perturbation of vortex beams: Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge

*A.V. Volyar<sup>1</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>, Yu.A. Egorov<sup>1</sup>, V.V. Milyukov<sup>1</sup>*  
<sup>1</sup> *Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Academician Vernadsky 4, 295007, Simferopol, Russia*

### Abstract

Transformations of the vortex beams structure subjected to sectorial perturbation were theoretically and experimentally studied. The analysis was based on computing (measuring) the vortex spectrum that enables us to find the orbital angular momentum (OAM) and Shannon entropy (informational entropy). We have revealed that, in the general case, the number of vortices caused by an external perturbation is not related to the topological charge. For arbitrary perturbation, the topological charge remains equal to the initial topological charge of the unperturbed vortex beam. Growth of the vortex number induced by perturbations is associated with the optical uncertainty principle between the sectorial angle and the OAM. The computer simulation has shown that OAM does not depend on the number of vortices induced by perturbations. Moreover, two maxima are formed both in the posi-

tive and negative regions of the vortex spectrum. As a result, the OAM does not practically change in a wide range of perturbation angles from 0 to 90°. However, at large perturbation angles, when the energy is almost equally redistributed between the vortex modes with opposite signs of the topological charge, the OAM rapidly decreases. At the same time, the Shannon entropy monotonically increases with growing perturbation angle. This is due to the fact that the entropy depends only on the number of vortex states caused by external perturbations.

**Keywords:** diffractive optics, optical vortices, orbital angular momentum, moments of intensity.

**Citation:** Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA, Milyukov VV. Sectorial perturbation of vortex beams: Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge. *Computer Optics* 2019; 43(5): 723-734. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.

**Acknowledgements:** The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research under RFBR grant No. 19-29-01233 and grant BF24, "V.I. Vernadsky Crimean Federal University Development Program in 2015–2024".

### References

- [1] Yao AM, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Adv Opt Photon* 2011; 3: 161-204. DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
- [2] Willner AE, Huang H, Yan Y, Ren Y, Ahmed N, Xie G, Bao C, Li L, Cao Y, Zhao Z, Wang J, Lavery MPJ, Tur M, Ramachandran S, Molisch AF, Ashrafi N, Ashrafi S. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Adv Opt Photon* 2015; 7: 66-106. DOI: 10.1364/AOP.7.000066.
- [3] Li S, Wang J. Adaptive free-space optical communications through turbulence using self-healing Bessel beams. *Sci Rep* 2017; 7: 43233. DOI: 10.1038/srep43233.
- [4] Vyas S, Kozawa Y, Sato S. Self-healing of tightly focused scalar and vector Bessel–Gauss beams at the focal plane. *J Opt Soc Am A* 2011; 28(5): 835-843. DOI: 10.1364/JOSAA.28.000837.
- [5] McLaren M, Mhlanga T, Padgett MJ, Roux FS, Forbes A. Self-healing of quantum entanglement after an obstruction. *Nat Commun* 2014; 5: 3248. DOI: 10.1038/ncomms4248.
- [6] Broky J, Siviloglou GA, Dogariu A, Christodoulides DN. Self-healing properties of optical Airy beams. *Opt Express* 2008; 16(17): 12880-12891. DOI: 10.1364/OE.16.012880.
- [7] Aiello A, Agarwal GS, Paúr M, Stoklasa B, Hradil Z, Řeháček J, de la Hoz P, Leuchs G, Sánchez-Soto LL. Unravelling beam self-healing. *Opt Express* 2017; 25(16): 19147-19157. DOI: 10.1364/OE.25.019147.
- [8] Ring JD, Lindberg J, Mourka A, Mazilu M, Dholakia K, Dennis MR. Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams. *Opt Express* 2012; 20(17): 18955-18966. DOI: 10.1364/OE.20.018955.
- [9] Mphuthi N, Boltha R, Forbes A. Are Bessel beams resilient to aberrations and turbulence? *J Opt Soc Am A* 2018; 35(6): 1021-1027. DOI: 10.1364/JOSAA.35.001021.
- [10] Chen R, Zhang X, Zhou Y, Ming H, Wang A, Zhan Q. Detecting the topological charge of optical vortex beams using a sectorial screen. *Appl Opt* 2017; 56(16): 4868-4872. DOI: 10.1364/AO.56.004868.
- [11] Malik M, Murugkar S, Leach J, Boyd RW. Measurement of the orbital-angular-momentum spectrum of fields with partial angular coherence using double-angular-slit interference. *Phys Rev A* 2012; 86: 063806. DOI: 10.1103/PhysRevA.86.063806.
- [12] Franke-Arnold S, Barnett S, Yao E, Leach J, Courtial J, Padgett M. Uncertainty principle for angular position and angular momentum. *New J Phys* 2004; 6: 1-8. DOI: 10.1088/1367-2630/6/1/103.
- [13] Yao E, Franke-Arnold S, Courtial J, Barnett S, Padgett M. Fourier relationship between angular position and optical orbital angular momentum. *Opt Express* 2006; 14(20): 9071-9076. DOI: 10.1364/OE.14.009071.
- [14] Yu FTS. *Entropy and information optics*. New York: Marcel Dekker Inc; 2000: 528. ISBN: 978-0-8247-0363-9.
- [15] Mandel L, Wolf E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1995: 1192. DOI: 10.1017/CBO9781139644105.
- [16] Zeng J, Lin R, Liu X, Zhao C, Cai Y. Review on partially coherent vortex beams. *Frontiers of Optoelectronics* 2019; 12(3): 229-248. DOI: 10.1007/s12200-019-0901-x.
- [17] Wang F, Chen Y, Liu X, Cai Y, Ponarenko SA. Self-reconstruction of partially coherent light beams scattered by opaque obstacles. *Opt Express* 2016; 24(21): 23735-23746. DOI: 10.1364/OE.24.023735.
- [18] Agarwal GS, Banerji J. Spatial coherence and information entropy in optical vortex fields. *Opt Lett* 2002; 27(10): 800-802. DOI: 10.1364/OL.27.000800.
- [19] Kumar A, Prabhakar S, Vaity P, Singh RP. Information content of optical vortex fields. *Opt Lett* 2011; 36(7): 1161-1163. DOI: 10.1364/OL.36.001161.
- [20] Bastiaans MJ. Uncertainty principle and informational entropy for partially coherent light. *J Opt Soc Am A* 1986; 3(8): 1243-1246. DOI: 10.1364/JOSAA.3.001243.
- [21] Barnett SM, Pegg DT. On the Hermitian optical phase operator. In Book: Barnett SM, Vaccaro JA, eds. *The quantum phase operator: a review*. London: Taylor & Francis; 2007.
- [22] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and non-transformed beams. *Opt Comm* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [23] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
- [24] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Vortex avalanche in the perturbed singular beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(6): 1064-1071. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
- [25] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A* 2004; 6: 259-269. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [26] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proc R Soc A* 1974; 336: 165-190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
- [27] Izdebskaya Y, Shvedov V, Volyar A. Focusing of wedge-generated higher-order optical vortices. *Opt Lett* 2005; 30(19): 2530-2532. DOI: 10.1364/OL.30.002530.
- [28] Volyar AV, Zhilaitis VZ, Shvedov VG. Optical eddies in small-mode fibers: II. The spin-orbit interaction. *Optika i Spektroskopiya* 1999; 86(4): 664-670.
- [29] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices.

- ces. Phys Rev A 2017; 96: 063807. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.
- [30] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. J Mod Opt 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
- [31] Wang Z, Zhang N, Yuan X-C. High-volume optical vortex multiplexing and de-multiplexing for free-space optical communication. Opt Express 2011; 19(2): 482-492. DOI: 10.1364/OE.19.000482.
- [32] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. Appl Opt 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [33] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum. Computer Optics 2019; 43(4): 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
- [34] Gonzalez RC, Woods RE. Digital image processing. New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River; 2002.

### Author's information

**Alexander Vladimirovich Volyar** – born in 1949. A graduate of Simferopol State University (1972), and after graduation – his employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993, he has been a professor, since 1999, he has become the head of the General Physics department. The sphere of scientific interests is optics, laser physics. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** – born in 1994. Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the first-year postgraduate student of the General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Co-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, processing of graphic images, programming. E-mail: [mikhailbretsko4@gmail.com](mailto:mikhailbretsko4@gmail.com).

**Yana Evgenievna Akimova** – born in 1994. Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the first-year postgraduate student of the of General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, diffraction optics. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Yuriy Alexandrovich Egorov** – born in 1975. A graduate of Taurida National University (2001). Received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the field of Optics and Laser Physics at the Taurida National V.I. Vernadsky University (Crimean Federal University is now) in 2005. Since 2006, he has been a Associate Professor at the Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The sphere of scientific interests is singular optics, diffraction optics. E-mail: [yurivegorov@cfuv.ru](mailto:yurivegorov@cfuv.ru).

**Viktor Vasilievich Milyukov** – born in 1955. A graduate of Simferopol State University (1976), and after graduation – his employee. Candidate of Technical Sciences (1987). Since 1994 – Associate Professor, from 2015 – Head of Computer Engineering and Modeling department. His research interests are computer modeling in physics. E-mail: [milyukov.vv@cfuv.ru](mailto:milyukov.vv@cfuv.ru).

*Received July 23, 2019. The final version – August 26, 2019.*