

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Топологический заряд оптических вихрей и их суперпозиций

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.В. Воляр³¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34,³ КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,
295007, Россия, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

Аннотация

Показано, что целый топологический заряд оптического вихря сохраняется при искажении оптического вихря любой амплитудной диафрагмой (но без точек с нулевым пропусканием) и при смещении оптического вихря с оси любого несущего осесимметричного пучка. Если в пучке имеется конечное число смещённых с оси оптических вихрей с разными топологическими зарядами одного знака, то суммарный топологический заряд всего пучка будет равен сумме всех топологических зарядов. Топологический заряд осевой суперпозиции, состоящей из конечного числа мод Лагерра–Гаусса с номерами $(n, 0)$, равен номеру моды с максимальным топологическим зарядом (вместе со знаком). Если максимальные положительный и отрицательный топологические заряды мод в комбинации равны, то «побеждает» тот топологический заряд, у которого весовой коэффициент по модулю больше. Если эти коэффициенты равны, то топологический заряд пучка равен нулю. При осевом сложении двух Гауссовых оптических вихрей с разными топологическими зарядами и разными амплитудами топологический заряд суперпозиции будет равен топологическому заряду Гауссова вихря с большим по модулю весовым амплитудным коэффициентом, независимо от соотношения топологических зарядов каждого пучка.

Ключевые слова: топологический заряд, оптический вихрь, диафрагма, смещение, суперпозиция оптических вихрей.

Цитирование: Котляр, В.В. Топологический заряд оптических вихрей и их суперпозиций / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.В. Воляр // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 2. – С. 145-154. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-685.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of optical vortices and their superpositions. Computer Optics 2020; 44(2): 145-154. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-685.

Введение

Лазерные оптические вихри (ОВ) – это особый тип лазерных пучков, обладающих орбитальным угловым моментом (ОУМ) [1]. Исследованию ОУМ параксиальных, непараксиальных и векторных пучков посвящено множество работ, например, работы 2019 года [2–7]. Хорошо известные примеры лазерных оптических вихрей – это моды Лагерра–Гаусса [8], Бесселя [9], Бесселя–Гаусса [10], гипергеометрические [11] и круговые пучки [12]. Они все обладают радиальной симметрией и имеют одинаковый нормированный на мощность пучка ОУМ, который равен целому топологическому заряду этих пучков n . Известны и оптические вихри без круговой симметрии, у которых ОУМ разный, и для каждого типа асимметричных пучков получены разные формулы для ОУМ [13, 14]. Но, кроме ОУМ, оптические вихри характеризуются топологическим зарядом (ТЗ, или TC , *topological charge*), определение которого дано в [15]. Расчёту ТЗ сложных оптических вихрей посвящено

очень мало работ. Например, в [16] исследуется изменение ТЗ при ограничении ОВ секторными диафрагмами.

В данной работе предпринята попытка рассчитать ТЗ для некоторых типов оптических вихрей. Показано, что ТЗ оптического вихря сохраняется при амплитудных искажениях и при смещении центра ОВ по сечению пучка-носителя. А также показано, что при линейной суперпозиции простых оптических вихрей, амплитуда которых описывается функцией $A(r)\exp(in\varphi)$, где (r, φ) – полярные координаты в сечении пучка, между ними возникает «конкуренция». ТЗ всего пучка определяется и величиной, и знаком ТЗ простого вихря $+n$, $-n$, и амплитудой весовых коэффициентов в линейной комбинации.

1. Топологический заряд оптического вихря, прошедшего амплитудную маску

Рассмотрим, как изменяется ТЗ при «вырезании» из оптического вихря сектора. Оптические вихри с «вырезанным» сектором подробно исследованы в ра-

боте А.В. Воляра с соавторами [16]. Эта работа послужила толчком для исследования вопроса о сохранении топологического заряда ОВ при разного рода искажениях или преобразованиях. Определение ТЗ оптического вихря (и любого параксиального светового поля) дано в работе М.В. Берри [15]. Для произвольного светового поля с комплексной амплитудой $E(r, \varphi)$ ТЗ равен:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (1)$$

Рассмотрим комплексную амплитуду $E(r, \varphi)$ с секторным вырезом:

$$E(r, \varphi) = A(r) \exp(in\varphi) f(\varphi), \quad (2)$$

где функция сектора имеет вид:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \varphi < \alpha, \\ \delta \ll 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Подставим (2) в (1) и получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inE(r, \varphi) + A(r) \exp(in\varphi) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}}{E(r, \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(in + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{1}{f(\varphi)} \right) = n. \quad (4)$$

Последнее равенство в (4) получается из-за того, что второе слагаемое в круглых скобках – действительное. Получается, что если диафрагма зависит только от угла φ , то ТЗ оптического вихря не меняется.

Доказательство (4) можно просто повторить, если амплитудная диафрагма имеет произвольную форму, то есть её функция пропускания зависит и от угла φ , и от радиуса r :

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & (r, \varphi) \in \Omega, \\ \delta \ll 1, & (r, \varphi) \notin \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

где Ω – область пропускания диафрагмы. Тогда вместо (4) получим аналогично:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(in + \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{1}{f(r, \varphi)} \right) = n. \quad (6)$$

В (3) и (5) введено слабое пропускание ($\delta \ll 1$) в области, где диафрагма не должна пропускать свет, чтобы в (4) и (6) избежать возникновения неопределённости 0/0 при делении производной $\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi$ на комплексную амплитуду поля $E(r, \varphi)$.

Из (6) следует, что умножение комплексной амплитуды ОВ (2) на любую действительную функцию не изменяет ТЗ исходного ОВ, так как действительная

функция не изменяет аргумент комплексной амплитуды в (1). Оптически умножение амплитуды светового поля на действительную функцию эквивалентно прохождению света через тонкую амплитудную маску. Заметим, что вместо условий (3) и (5) достаточно потребовать, чтобы центр сингулярности можно было обойти вдоль замкнутого контура, на котором нет нулей интенсивности.

2. Топологический заряд внеосевого оптического вихря

Рассмотрим теперь, как изменяется ТЗ при смещении центра ОВ с оптической оси пучка с радиально-симметричной амплитудой $A(r)$. Рассмотрим смещение ОВ на произвольный вектор $(r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$. Тогда комплексная амплитуда $E(r, \varphi)$ запишется в виде:

$$E(r, \varphi) = \left(\frac{r \exp(i\varphi) - r_0 \exp(i\varphi_0)}{w} \right)^n A(r). \quad (7)$$

Подставим (7) в (1) и получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inr \exp(i\varphi)}{r e^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inr \exp(i\varphi)}{r \exp(i\varphi) - r_0 \exp(i\varphi_0)} = n. \quad (8)$$

Последнее равенство в (8) получается из-за того, что для больших радиусов ($r \gg r_0$) в знаменателе остаётся только первое слагаемое. Из (8) следует, что смещение центра ОВ с оптической оси пучка с радиально-симметрично амплитудой (например, Гауссова пучка) не изменяет ТЗ. Хотя нормированный на мощность ОУМ пучка со смещённым центром фазовой сингулярности меньше, чем ТЗ всего пучка и убывает с увеличением величины смещения r_0 [17, 18].

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы Гауссова пучка с внеосевым оптическим вихрем в начальной плоскости и после распространения в пространстве для разного смещения вихря от оптической оси. Комплексная амплитуда в начальной плоскости равна

$$E(r, \varphi) = \left[\frac{(r \exp(i\varphi) - r_0 \exp(i\varphi_0))}{w} \right]^n \exp(-r^2/w^2),$$

где w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n и (r_0, φ_0) – соответственно топологический заряд оптического вихря и вектор (в полярных координатах) его смещения с оптической оси. Комплексная амплитуда после распространения в пространстве рассчитана с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки на основе быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: $w = 1$ мм, $n = 7$, $\varphi_0 = 0$, $r_0 = w/4$ (рис. 1а-г), $r_0 = w/2$ (рис. 1д-з), $r_0 = 2w$ (рис. 1и-м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ ($z_0 = kw^2/2$ – рас-

стояние Рэлея, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R=5$ мм). Топологический заряд в начальной плоскости, рассчитанный численно по формуле (1) (по кольцу радиуса $0,8R$), равен 6,9997

при $r_0=w/4$ и $r_0=w/2$, 6,9995 при $r_0=2w$, то есть во всех случаях примерно 7. На расстоянии $z=z_0/2$ ТЗ оказался равен соответственно 6,9989, 6,9989 и 6,9986, то есть $TC=7$.

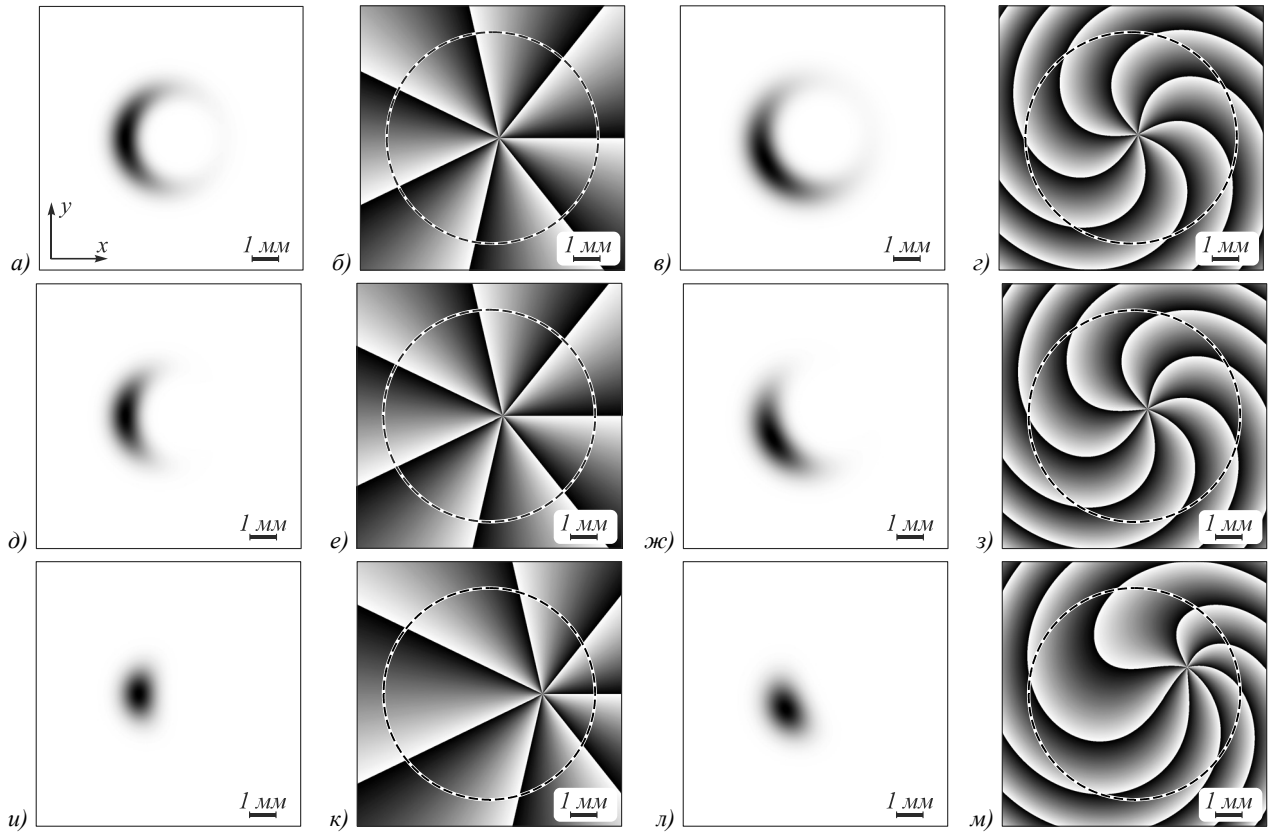


Рис. 1. Распределения интенсивности (а, в, д, ж, и, л) (негатив) и фазы (б, г, е, з, к, м) Гауссова пучка с внеосевым оптическим вихрем в начальной плоскости (а, б, д, е, и, к) и после распространения в пространстве (в, г, ж, з, л, м) для разного поперечного смещения вихря от оптической оси. Параметры расчёта: радиус перетяжки $w = 1$ мм, топологический заряд $n = 7$, смещение $r_0 = w/4$ (а–г), $r_0 = w/2$ (д–ж), $r_0 = 2w$ (и–м); $\varphi_0 = 0$ на всех рисунках, расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея). Пунктирные кольца на распределениях фазы обозначают радиус кругового контура в формуле (1), по которому рассчитывался топологический заряд

3. Топологический заряд оптического вихря с несколькими центрами фазовой сингулярности

Рассмотрим случай, когда в Гауссов лазерный пучок внедрены m простых (с топологическим зарядом +1) фазовых сингулярностей, расположенных равномерно на окружности радиуса a , то есть в точках с декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi_p, \\ y = a \sin \varphi_p, \end{cases} \quad (9)$$

где $\varphi_p = 2\pi p/m$, $p = 0, \dots, m-1$. Можно показать, что комплексная амплитуда такого ОВ на любом расстоянии от перетяжки равна:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma w_0^2}\right) \left(\frac{r^m \exp(im\varphi)}{\sigma^m} - a^m \right), \quad (10)$$

где $\sigma = 1 + iz/z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – расстояние Рэлея. Подставив в (1) комплексную амплитуду (10), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{im\sigma^{-m} r^m \exp(im\varphi)}{\sigma^{-m} r^m \exp(im\varphi) - a^m} d\varphi \right\} = m. \quad (11)$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ слагаемым a^m в знаменателе можно пренебречь, получаем, что ТЗ пучка (10) не зависит от пройденного расстояния z и от радиуса a окружности, на которой расположены центры оптических вихрей, а равен числу простых вихрей в пучке. Полученный результат можно обобщить на произвольный случай, когда центры m вихрей с кратностью m_p расположены в точках (r_p, φ_p) , где $p = 0, \dots, m-1$ и несущая амплитуда имеет осевую симметрию $A(r)$. Тогда комплексная амплитуда такого сложного ОВ запишется в виде [19, 20]:

$$E(r, \varphi, z = 0) = A(r) \prod_{p=0}^{m-1} (r \exp(i\varphi) - r_p \exp(i\varphi_p))^{m_p}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (1), получим

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} i r \exp(i\varphi) \times \sum_{p=0}^{m-1} \frac{m_p}{r \exp(i\varphi) - r_p \exp(i\varphi_p)} d\varphi \right\} = \sum_{p=0}^{m-1} m_p. \quad (13)$$

Из (13) следует, что ТЗ пучка с осесимметричной амплитудой и несколькими вырожденными простыми оптическими вихрями (12), центры которых расположены в произвольных точках в сечении пучка, равен сумме величин кратности (вырожденности) всех вихрей.

4. Топологический заряд осевой линейной комбинации оптических вихрей

Рассмотрим световое поле, комплексная амплитуда которого описывается линейной комбинацией конечного числа мод Лагерра-Гаусса (ЛГ) с номерами $(n, 0)$:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{n=-M}^N C_n \left(\frac{r}{w}\right)^{|n|} \exp(in\varphi). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (1), получим следующее выражение для ТЗ:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} i \frac{\sum_{n=-M}^N n C_n \left(\frac{r}{w}\right)^{|n|} \exp(in\varphi)}{\sum_{n=-M}^N C_n \left(\frac{r}{w}\right)^{|n|} \exp(in\varphi)} d\varphi \right\}. \quad (15)$$

В (15), выполняя предельный переход $r \rightarrow \infty$ под интегралом, в числителе и знаменателе под знаком суммы останутся по одному слагаемому с максимальным показателем степени.

Если $M > N$, то ТЗ (14) равен $TC = -M$, если $M < N$, то ТЗ (14) равен $TC = N$. Если $M = N$, то вместо (15) получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} iN \frac{(C_N \exp(iN\varphi) - C_{-N} \exp(-iN\varphi))}{(C_N \exp(iN\varphi) + C_{-N} \exp(-iN\varphi))} d\varphi \right\}. \quad (16)$$

Итак, если в осевой линейной комбинации из конечного числа мод ЛГ с разными ТЗ максимальный положительный ТЗ больше по амплитуде максимального отрицательного ТЗ, то ТЗ всего пучка будет равен этому положительному ТЗ ($TC = N$). Если, наоборот, максимальный отрицательный ТЗ в комбинации по модулю больше, чем максимальный положительный, то ТЗ всего пучка равен отрицательному ТЗ ($TC = -M$). Для случая $M = N$ в следующем параграфе мы покажем, что интеграл в (16) вычисляется и ТЗ (16), на основании (22), равен N , если $|C_N| > |C_{-N}|$ или $-N$, если $|C_N| < |C_{-N}|$. При равенстве этих коэффициентов $|C_N| = |C_{-N}|$ ТЗ всего пучка равен нулю.

5. Топологический заряд суммы двух Гауссовых оптических вихрей

Рассмотрим простой, но интересный случай, который приводит к неожиданному результату. Пусть световое поле в начальной плоскости имеет комплексную амплитуду, которая описывает осевую суперпозицию двух Гауссовых оптических вихрей с разными топологическими зарядами и разными амплитудами:

$$E(r, \varphi) = (a \exp(in\varphi) + b \exp(im\varphi)) \exp(-r^2/w^2), \quad (17)$$

где w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n и m – целочисленные топологические заряды оптических вихрей, a и b – весовые коэффициенты суперпозиции, в общем случае комплексные. Подставив (17) в (1), получим выражение для ТЗ:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} d\varphi \right\} = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{na \exp(in\varphi) + mb \exp(im\varphi)}{a \exp(in\varphi) + b \exp(im\varphi)} d\varphi \right\}. \quad (18)$$

Интеграл в правой части (18) можно свести к сумме двух интегралов:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \left(\frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos t} \right) dt. \quad (19)$$

Интеграл от первого слагаемого в (19) тривиален, а интеграл от второго слагаемого перепишем в ином виде:

$$TC = \frac{n+m}{2} + \frac{1}{2\pi} \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2} \times \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + (2|a||b|/(|a|^2 + |b|^2)) \cos t}. \quad (20)$$

Коэффициент при косинусе в знаменателе не может превышать единицу, поэтому этот интеграл является справочным (выражение 3.613.1 в [21]):

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nx) dx}{1 + a \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} \right)^n, \quad (21)$$

где $a^2 < 1, n \geq 0$.

Если интеграл от нуля не до π , а до 2π , то это выражение надо умножить на два. Тогда (20) примет вид:

$$TC = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 - |b|^2}. \quad (22)$$

Для полноты картины запишем нормированный ОУМ для пучка (17):

$$OAM = \frac{na^2 + mb^2}{a^2 + b^2}. \quad (23)$$

Из (22) следует, что если $|a| > |b|$, то $TC = n$, а если $|a| < |b|$, то $TC = m$. Если $m = n$, то также получаем ожидаемый результат $TC = n$. То есть ТЗ суммарного пучка (17) равен ТЗ того ОВ, у которого больше амплитуда. Если $|a| = |b|$, то наступает вырождение (возникает перепутанность) и выражением (22) пользоваться нельзя из-за неопределённости 0/0. Поэтому преобразуем поле (17) при условии $|a| = |b|$ к виду:

$$E(r, \varphi) = |a| (\exp(in\varphi + i \arg a) + \exp(im\varphi + i \arg b)) \exp(-r^2/w^2) = 2|a| \cos\left(\frac{n\varphi - m\varphi + \arg a - \arg b}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i \frac{n\varphi + m\varphi + \arg a + \arg b}{2}\right). \quad (24)$$

Подставив (24) в (1), получим

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{n\varphi + m\varphi + \arg a + \arg b}{2} \right) d\varphi = (n + m)/2. \quad (25)$$

Из (25) следует, что если складываются два оптических вихря с равной амплитудой и ТЗ, чётным и нечётным, то суммарный пучок будет иметь дробный (полуцелый) ТЗ. Дробный ТЗ у лазерного пучка может существовать только в начальной (граничной) плоскости, а при распространении в пространстве ТЗ должен быть целым, чтобы амплитуда светового поля

была непрерывной. Заметим, что ОУМ (23) будет совпадать с ТЗ (22) и (25) только при $a = 0$, или $b = 0$, или $a = b$. Заметим также, что в случае вырожденной ситуации ($a = b$) знание целого топологического заряда не позволяет определить, какие угловые гармоники составляют этот пучок. Действительно, например, все приведённые ниже пучки имеют одинаковый ТЗ и одинаковый ОУМ, равный 4:

$$\begin{aligned} E_1(r, \varphi) &= (\exp(i\varphi) + \exp(i7\varphi)) \exp(-r^2/w^2), \\ E_2(r, \varphi) &= (\exp(i2\varphi) + \exp(i6\varphi)) \exp(-r^2/w^2), \\ E_3(r, \varphi) &= (\exp(i3\varphi) + \exp(i5\varphi)) \exp(-r^2/w^2), \\ E_4(r, \varphi) &= \exp(i4\varphi) \exp(-r^2/w^2). \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 2а, б показаны интенсивность и фаза суперпозиции двух Гауссовых вихрей в начальной плоскости при следующих параметрах расчёта: радиус перетяжки $w = 1$ мм, топологические заряды $n = 12$ и $m = 7$, весовые коэффициенты единичны по модулю, но со случайной фазой: ($a = e^{2,9616i}$, $b = e^{0,2247i}$), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 1$ мм). Топологический заряд, рассчитанный численно по формуле (1), равен 9,4708, то есть примерно $(12 + 7)/2$. На рис. 2в, г показаны интенсивность и фаза этой же суперпозиции, но на расстоянии Рэлея (для длины волны $\lambda = 532$ нм) и в более широкой расчётной области ($R = 10$ мм). Топологический заряд, рассчитанный численно по формуле (1), равен 11,8167, то есть примерно 12. В обоих случаях топологический заряд рассчитывался путём интегрирования по кольцу радиуса 0,8R. Этот пример соответствует ситуации, описываемой амплитудой (32), и при равенстве модулей амплитуд $|a| = |b|$ двух вихрей ТЗ всего пучка будет равен большому из двух ТЗ, то есть 12.

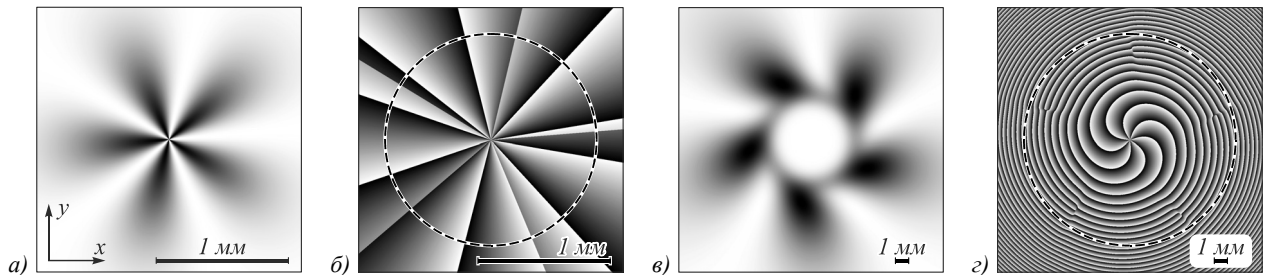


Рис. 2. Интенсивность (а, в) (негатив) и фаза (б, г) осевой суперпозиции двух Гауссовых оптических вихрей с ТЗ 12 и 7, но с одинаковыми весовыми амплитудами ($|a| = |b|$ в (17)) в начальной плоскости (а, б) и на расстоянии Рэлея (в, г). Пунктирные кольца на распределениях фазы обозначают радиус кольца, по которому рассчитывался топологический заряд по формуле (1)

6. Топологический заряд в произвольной плоскости

В этом параграфе мы покажем, что линейная комбинация двух Гауссовых оптических вихрей (17) с разными ТЗ, но одинаковыми амплитудными весами ($a = b$), которая приводит к полуцелому ТЗ в начальной плоскости (25), при распространении формирует оптический вихрь с целым ТЗ. Действительно, если в начальной плоскости имеется Гауссов ОВ:

$$E(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2 + in\varphi), \quad (27)$$

то после прохождения через параксиальную ABCD-систему его комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_z(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{Bq_1} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B} + in\theta\right) \times \sqrt{\xi} \exp(-\xi) [I_{(n-1)/2}(\xi) - I_{(n+1)/2}(\xi)], \quad (28)$$

где

$$\xi = \left(\frac{z_0}{B}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right)^2 \left(\frac{1}{2q_1}\right), \quad q_1 = 1 - i \frac{A}{B} z_0. \quad (29)$$

В (28) $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Следовательно, в случае суперпозиции (17) комплексная амплитуда равна

$$E_z(\rho, \theta) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{Bq_1} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B}\right) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \\ \times \left\{ a(-i)^n \exp(in\theta) [I_{(n-1)/2}(\xi) - I_{(n+1)/2}(\xi)] + \right. \\ \left. + b(-i)^m \exp(im\theta) [I_{(m-1)/2}(\xi) - I_{(m+1)/2}(\xi)] \right\}. \quad (30)$$

Используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя и оставив в нём только первые два слагаемых, получим приближённое выражение для разности двух модифицированных функций Бесселя соседних порядков при больших значениях аргументов:

$$I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\} - \\ - \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\} = \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}}. \quad (31)$$

Тогда (30) при больших значениях ρ примет вид:

$$E_z(\rho, \theta) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{Bq_1} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B}\right) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \\ \times \left[a(-i)^n \exp(in\theta) \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}} + \right. \\ \left. + b(-i)^m \exp(im\theta) \frac{me^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}} \right] = \\ = \frac{-iz_0}{4Bq_1\xi} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B}\right) \times \\ \times \left[an(-i)^n \exp(in\theta) + bm(-i)^m \exp(im\theta) \right]. \quad (32)$$

Из (32) (с учётом (18) и (22)) следует, что если $|a|=|b|$, то в начальной плоскости топологический заряд равен $(m+n)/2$, но в любой другой плоскости модули коэффициентов при $\exp(in\theta)$ и $\exp(im\theta)$ пропорциональны $|n|$ и $|m|$, то есть уже не равны друг другу (при $n \neq m$), поэтому топологический заряд, согласно (22), равен $\max(n, m)$. Заметим, однако, что при равенстве в (32) множителей $|an|=|bm|$, опять возникает вырожденная ситуация, при которой на основании формулы (22) ТЗ суммы двух оптических вихрей (17) при $z > 0$ равен среднему арифметическому (25): $TC = (n+m)/2$. Эта проблема разрешается следующим образом: если имеет место равенство $|an|=|bm|$, то это означает, что $|a| \neq |b|$ и

согласно (22) ТЗ всего поля в начальной плоскости равен ТЗ того вихря, у которого амплитуда ($|a|$ или $|b|$) больше. А целый ТЗ в начальной плоскости сохраняется и при распространении.

7. Топологический заряд для оптического вихря с начальным дробным зарядом

Для ОВ с начальным дробным топологическим зарядом μ (μ – произвольное действительное число) в [22, 23] получена формула для дробного ОУМ такого пучка. Разложим ОВ с дробным ТЗ, который может существовать только в начальной плоскости, по оптическим вихрям с целыми топологическими зарядами n (μ – произвольное действительное число):

$$E(r, \varphi, z) = \exp(i\mu\varphi) \Psi(r, z) = \\ = \frac{\exp(i\pi\mu) \sin \pi\mu}{\pi} \Psi(r, z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in\varphi)}{\mu - n}. \quad (33)$$

В (33) функция $\Psi(r, z)$ действительная. Подставим правую часть (33) в общее выражение для ОУМ

$$J_z = \text{Im} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{E}(r, \varphi, z) \left(\frac{\partial E(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi, \quad (34)$$

получим:

$$J_z = W \frac{\sin^2(\pi\mu)}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(\mu - n)^2}, \quad (35)$$

где W – энергия (мощность) пучка

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} E(r, \varphi, z) \bar{E}(r, \varphi, z) r dr d\varphi. \quad (36)$$

Ряд в правой части (35) можно свести к справочному ряду [21]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 \pm a^2)^2} = \\ = \frac{\pi}{4a} \left[\pm \left\{ \text{cth } \pi a \right\} \mp a \left\{ \text{cosech}^2 \pi a \right\} \right], \quad (37)$$

с помощью которого можно получить окончательное выражение для нормированного ОУМ поля (33):

$$\frac{J_z}{W} = \mu - \frac{\sin 2\pi\mu}{2\pi}. \quad (38)$$

Из (38) следует, что ОУМ равен ТЗ μ , только если μ целое или полуцелое число. Это согласуется с выражениями (23) и (25) для линейной комбинации только двух угловых гармоник.

Получим выражение для ТЗ оптического вихря в зоне дифракции Френеля для начального поля с дробным топологическим зарядом (33), но для определённости амплитудную функцию выберем в виде Гауссовой. Тогда вместо (33) получим

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp \left[-i\mu\varphi - \left(\frac{r}{w} \right)^2 \right] = \frac{\exp(i\pi\mu) \sin \pi\mu}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in\varphi - r^2/w^2)}{\mu - n}. \quad (39)$$

С учётом (28) амплитуда оптического вихря (39) при любом z будет равна ($B = z, A = D = 1$):

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-iz_0}{q_1 z} \right) \exp \left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu \right) \times \sin(\pi\mu) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m|} \frac{\exp(im\theta)}{\mu - m} \times \left[I_{(|m|-1)/2}(\xi) - I_{(|m|+1)/2}(\xi) \right], \quad (40)$$

где ξ из (29). Подставим (40) в (1) и при переходе к пределу в (1) учтём асимптотику (31), тогда получим выражение для расчёта ТЗ оптического вихря (39):

$$TC = \frac{\text{Re}}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{|n|} |n| \exp(in\varphi)}{\mu - n}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{|n|} |n| \exp(in\varphi)}{\mu - n}} d\varphi \right\}. \quad (41)$$

При $z_0 \ll z$ в ближней зоне вместо (41) получим выражение:

$$TC = \frac{\text{Re}}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \exp(in\varphi)}{\mu - n} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in\varphi)}{\mu - n} \right)^{-1} d\varphi \right\}. \quad (42)$$

Выражение (42) замечательно тем, что известен ответ, который численно был получен в [15], но до сих пор не получен аналитически. Вычисление (42) можно назвать задачей Берри [15]. Правая часть (42) должна давать только целые ТЗ, ближайшие к величине μ :

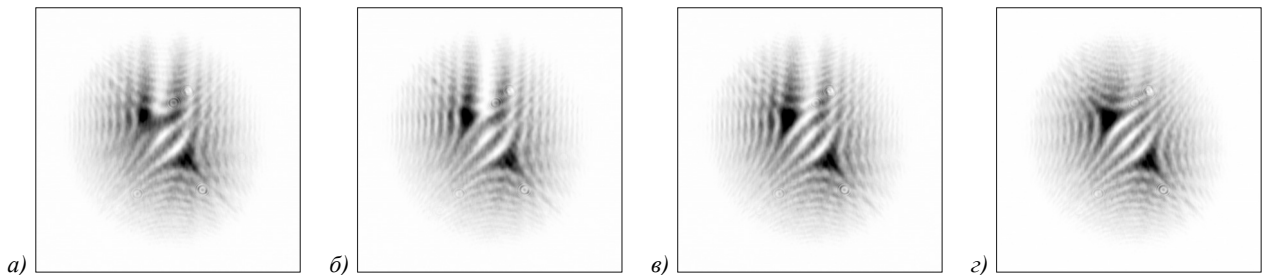


Рис. 3. Распределения интенсивности (негатив), измеренные на расстоянии $z = 200$ мм (на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы) от спиральной фазовой пластинки с дробным порядком: $\mu = 2,3$ (а), $\mu = 2,5$ (б), $\mu = 2,7$ (в), $\mu = 2,9$ (г). Размеры картинок – 4×4 мм

Подставляя (45) в (1), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[n \arctg(\alpha \operatorname{tg} \varphi) \right] = \left(\frac{n\alpha}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi} = n. \quad (46)$$

Заметим, что результат, аналогичный (46), но только для $n = 1$, ранее был получен в [25].

$$TC = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \operatorname{rect}(\mu - n), \quad \operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases} \quad (43)$$

Из сравнения (42) и (43) можно сказать, что ТЗ (42) равен ТЗ той угловой гармоники в рядах в числителе и знаменателе, у которой весовой коэффициент по модулю больше. Это согласуется также с результатами для конечной линейной комбинации мод ЛГ (16) и для суммы двух угловых гармоник (18).

На рис. 3, взятом из [24], показаны распределения интенсивности на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы для оптических вихрей с начальным дробным топологическим зарядом. Видно, что на линии, проведённой под углом -45° в центре картины, находятся два нуля (две светлых линии) (рис. 3а) при $\mu < 2,5$ и три нуля (три светлых линии) при $\mu \geq 2,5$ (рис. 3б–г). Эксперимент на рис. 3 подтверждает численный результат (42).

8. Топологический заряд эллиптического вихря в Гауссовом пучке

Рассмотрим простой пример фазового искажения оптического вихря – придание вихрю эллиптической формы. Если обычный простой оптический вихрь имеет комплексную амплитуду в начальной плоскости вида

$$E(r, \varphi) = A(r) \exp(in\varphi), \quad (44)$$

то комплексная амплитуда эллиптического вихря, внедрённого, например, в Гауссов пучок (или любой другой пучок с радиальной симметрией), будет иметь вид:

$$E(r, \varphi) = A(r) (r \cos \varphi + i\alpha r \sin \varphi)^n = A(r) r^n (\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi)^{n/2} \times \exp(in \arctg(\alpha \operatorname{tg} \varphi)). \quad (45)$$

Из (46) следует, что эллиптичность оптического вихря (или эллиптичность спиральной фазовой пла-

стинки) не изменяет ТЗ исходного простого оптического вихря (44). У эллиптического вихря при любой степени эллиптичности (при любом α) ТЗ равен n . При этом нормированный ОУМ эллиптического вихря всегда меньше n и равен:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{nP_{n-1}(y)}{P_n(y)} < n, \tag{47}$$

где $y = (1 + \alpha^2)/(2\alpha) > 1$ и $P_n(y)$ – многочлен Лежандра.

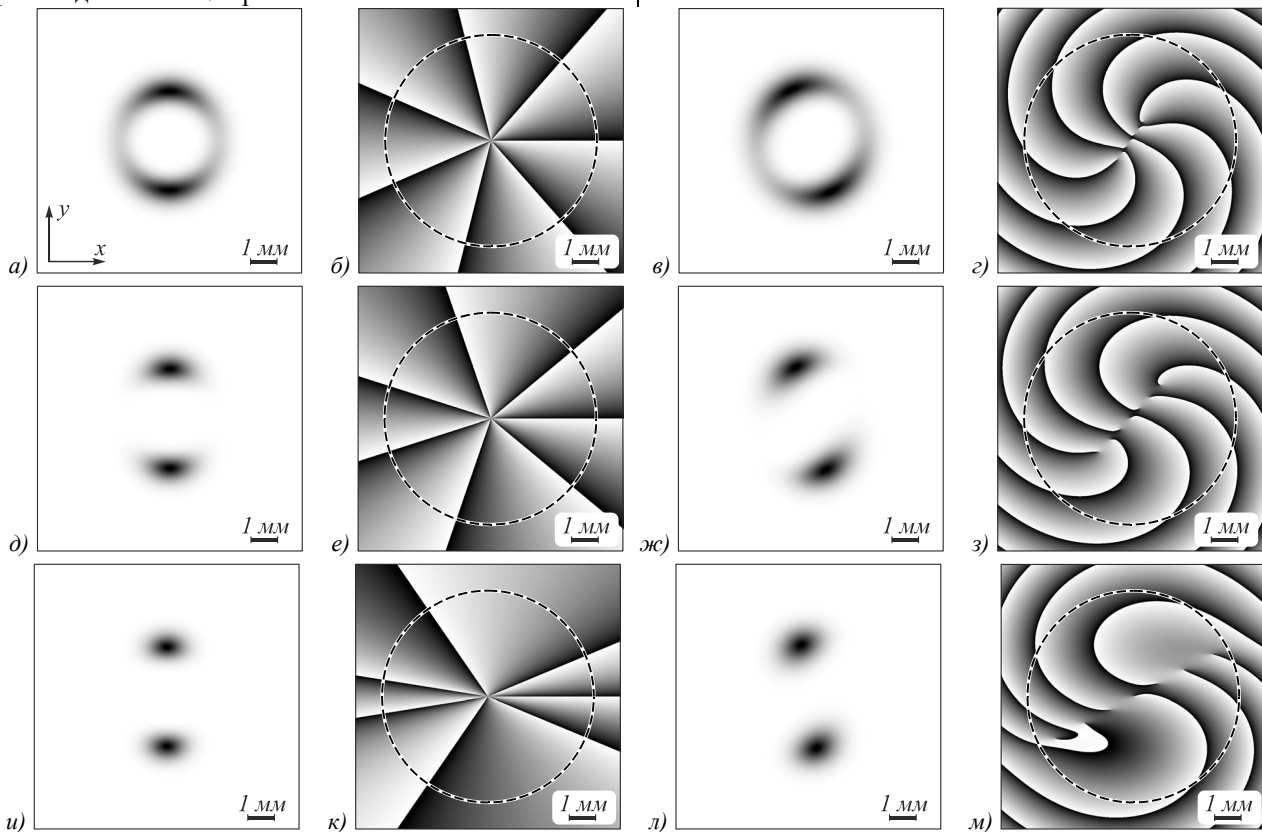


Рис. 4. Распределения интенсивности (а, в, д, ж, и, л) и фазы (б, г, е, з, к, м) Гауссова пучка с эллиптическим вихрем в начальной плоскости (а, б, д, е, и, к) и после распространения в пространстве (в, г, ж, з, л, м) для разной эллиптичности.

Параметры расчёта: радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 1$ мм, топологический заряд оптического вихря $n = 7$, эллиптичность вихря $\alpha = 1,1$ (а–г), $\alpha = 1,5$ (д–з), $\alpha = 3$ (и–м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея). Пунктирные кольца на распределениях фазы обозначают радиус кольца, по которому рассчитывался топологический заряд по формуле (1)

На рис. 4 показаны распределения интенсивности и фазы Гауссова пучка с эллиптическим вихрем в начальной плоскости и после распространения в пространстве для разной эллиптичности. Комплексная амплитуда в начальной плоскости равна

$$E(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2) r^n (\cos \varphi + i\alpha \sin \varphi)^n,$$

где w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n и α – соответственно топологический заряд и эллиптичность оптического вихря. Комплексная амплитуда после распространения в пространстве рассчитана с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки на основе быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: $w = 1$ мм, $n = 7$, $\alpha = 1,1$ (рис. 4а–г), $\alpha = 1,5$ (рис. 4д–з), $\alpha = 3$ (рис. 4и–м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 5$ мм). Топологический заряд в начальной плоскости, рассчитанный

численно по формуле (1) (по кольцу радиуса $0,8R$), равен 6,9997 при $\alpha = 1,1$, 6,9996 при $\alpha = 1,5$, 6,9987 при $\alpha = 3$, то есть во всех случаях примерно 7. На расстоянии $z = z_0/2$ ТЗ оказался равен соответственно 6,9989, 6,9988 и 6,9979, то есть $TC = 7$.

Заключение

Теоретически показано, что целый ТЗ оптического вихря сохраняется при ограничении ОВ любой амплитудной диафрагмой (но без нулей в функции пропускания), и при смещении ОВ с оси любого несущего осесимметричного пучка. Если в пучке имеется конечное число смещённых с оптической оси простых оптических вихрей с разными ТЗ одного знака (+1 или -1), то суммарный ТЗ всего пучка будет равен сумме всех ТЗ. Здесь нет топологической конкуренции, она возникает при осевом сложении вихрей. Так, ТЗ осевой суперпозиции, состоящей из конечного числа мод Лагерра–Гаусса с номерами $(n, 0)$, равен номеру моды с максимальным ТЗ (вместе со знаком).

Если максимальный положительный и отрицательный ТЗ мод в комбинации равны, то «побеждает» тот ТЗ, у кого весовой коэффициент по модулю больше. Если и эти коэффициенты равны, то ТЗ пучка равен нулю. При осевом сложении двух Гауссовых оптических вихрей с разными ТЗ и разными амплитудами ТЗ суперпозиции будет равен ТЗ Гауссова вихря с большим по модулю весовым амплитудным коэффициентом, независимо от соотношения ТЗ каждого пучка. Если весовые коэффициенты равны, возникает вырождение и ТЗ суперпозиции равен среднему арифметическому ТЗ Гауссовых вихрей. Если ТЗ у Гауссовых вихрей равны чётному и нечётному числам, то ТЗ суперпозиции в начальной плоскости равен полуцелому числу. При распространении вырождение снимается и ТЗ всего пучка равен большему (положительному) целому ТЗ. Этот эффект мы назвали топологической конкуренцией оптических вихрей. Численное моделирование и эксперимент подтверждают теоретические предсказания.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003 в частях «Топологический заряд оптического вихря, прошедшего амплитудную маску» и «Топологический заряд осевой линейной комбинации оптических вихрей», грант 19-29-01233 в части «Топологический заряд для оптического вихря с начальным дробным зарядом» и грант 18-07-01129 в частях «Топологический заряд оптического вихря с несколькими центрами фазовой сингулярности» и «Топологический заряд в произвольной плоскости»), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Топологический заряд суммы двух Гауссовых оптических вихрей».

Литература

1. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45. – 8185.
2. **Volyar, A.** Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2019. – Vol. 36, Issue 6. – P. 1064-1071.
3. **Zhang, Y.** Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminium metasurfaces / Y. Zhang, X. Yang, J. Gao // *Scientific Reports*. – 2019. – Vol. 9. – 9133.
4. **Zhang, H.** Grafted optical vortex with controllable orbital angular momentum distribution / H. Zhang, X. Li, H. Ma, M. Tang, H. Li, J. Tang, Y. Cai // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 16. – P. 22930-22938.
5. **Воляр, А.В.** Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 517-527. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
6. **Kotlyar, V.V.** Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 8. – P. 11236-11251. – DOI: 10.1364/OE.27.011236.
7. **Kotlyar, V.V.** Orbital angular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.S. Kozlova // *Optics Letters*. – 2019. – Vol. 44, Issue 15. – P. 3673-3676. – DOI: 10.1364/OL.44.003673.
8. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – University Science, 1986.
9. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // *Physical Review Letters*. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499-1501.
10. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattary, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64, Issue 6. – P. 491-495.
11. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32, Issue 7. – P. 742-744.
12. **Bandres, M.A.** Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2008. – Vol. 33. – P. 177-179.
13. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
14. **Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 93, Issue 6. – 063858. – DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
15. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6. – P. 259-268.
16. **Воляр, А.В.** Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров, В.В. Милуков // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 722-733. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
17. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Gaussian optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42, Issue 1. – P. 139-142. – DOI: 10.1364/OL.42.000139.
18. **Котляр, В.В.** Дробный орбитальный угловой момент Гауссова пучка с внедрённым внеосевым оптическим вихрем / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев, Е.Г. Абрамочкин // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 1. – С. 22-29. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
19. **Indebetouw, G.** Optical vortices and their propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40, Issue 1. – P. 73-87.
20. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1993. – Vol. 102. – P. 336-350.
21. **Gradshteyn, I.S.** Table of integrals, series, and products / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. – New York: Academic, 1965.
22. **Gotte, J.B.** Quantum formulation of fractional orbital angular momentum / J.B. Gotte, S. Franke-Arnold, R. Zambrini, S.M. Barnett // *Journal of Modern Optics*. – 2007. – Vol. 54, Issue 12. – P. 1723-1738.
23. **Gutiérrez-Vega, J.C.** Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutiérrez-Vega, C. López-Mariscal // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2008. – Vol. 10. – 015009.

24. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Pofirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.

25. **Liang, G.** Splitting and rotating of optical vortices due to non-circular symmetry in amplitude and phase distributions of the host beams / G. Liang, W. Cheng // *Physics Letters A*. – 2020. – Vol. 384. – 126046.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

Воляр Александр Владимирович, 1949 года рождения. Выпускник Симферопольского государственного университета (1972), а после окончания – его сотрудник. Доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 25 декабря 2019 г. Окончательный вариант – 25 января 2020 г.

Topological charge of optical vortices and their superpositions

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.V. Volyar³

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia,

³ Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
Academician Vernadsky 4, 295007, Simferopol, Russia

Abstract

An optical vortex passed through an arbitrary aperture (with the vortex center found within the aperture) or shifted from the optical axis of an arbitrary axisymmetric carrier beam is shown to conserve the integer topological charge (TC). If the beam contains a finite number of off-axis optical vortices with different TCs of the same sign, the resulting TC of the beam is shown to be equal to the sum of all constituent TCs. For a coaxial superposition of a finite number of the Laguerre-Gaussian modes ($n, 0$), the resulting TC equals that of the mode with the highest TC (including sign). If the highest positive and negative TCs of the constituent modes are equal in magnitude, then TC of the superposition is equal to that of the mode with the larger (in absolute value) weight coefficient. If both weight coefficients are the same, the resulting TC equals zero. For a coaxial superposition of two different-amplitude Gaussian vortices, the resulting TC equals that of the constituent vortex with the larger absolute value of the weight coefficient amplitude, irrespective of the relation between the individual TCs.

Keywords: topological charge (TC), optical vortex, diaphragm, displacement, optical vortices superposition.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under RFBR grants ## 18-29-20003 ("TC of an optical vortex passing through an amplitude mask" and "TC of a coaxial superposition of optical vortices"), 19-29-01233 ("TC of an optical vortex with the initially fractional charge"), and 18-07-01129 ("TC of an optical vortex with multiple phase-singularity centers" and "TC in an arbitrary plane"), the Russian Science Foundation under # grant 17-19-01186 ("TC of an off-axis optical vortex" and "TC of an elliptic vortex in the Gaussian beam"), and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within a government project of the Federal Research Center for Crystallography and Photonics of the Russian Academy of Sciences under agreement 007-Г3/Ч3363/26 ("TC of superposition of two Gaussian optical vortices").

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of optical vortices and their superpositions. *Computer Optics* 2020; 44(2): 145-154. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-685.

References

- [1] Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R, Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45: 8185.
 - [2] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Vortex avalanche in the perturbed singular beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(6): 1064-1071.
 - [3] Zhang Y, Yang X, Gao J. Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminium metasurfaces. *Sci Rep* 2019; 9: 9133.
 - [4] Zhang H, Li X, Ma H, Tang M, Li H, Tang J, Cai Y. Grafted optical vortex with controllable orbital angular momentum distribution. *Opt Express* 2019; 27(16): 22930-22938.
 - [5] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum. *Computer Optics* 2019; 43(4): 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
 - [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments. *Opt Express* 2019; 27(8): 11236-11251. DOI: 10.1364/OE.27.011236.
 - [7] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Kozlova ES. Orbital angular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate. *Opt Lett* 2019; 44(15): 3673-3676. DOI: 10.1364/OL.44.003673.
 - [8] Siegman AE. *Lasers*. University Science; 1986.
 - [9] Durnin J, Miceli JJ, Eberly JH. Diffraction-free beams. *Phys Rev Lett* 1987; 58: 1499-1501.
 - [10] Gori F, Guattary G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64(6): 491-495.
 - [11] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. *Opt Lett* 2007; 32(7): 742-744.
 - [12] Bandres MA, Gutierrez-Vega JC. Circular beams. *Opt Lett* 2008; 33: 177-179.
 - [13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
 - [14] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. *Phys Rev A* 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
 - [15] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A* 2004; 6: 259-268.
 - [16] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA, Milyukov VV. Sectorial perturbation of vortex beams:
-

-
- Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge. *Computer Optics* 2019; 43(5): 723-34. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
- [17] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Asymmetric Gaussian optical vortex. *Opt Lett* 2017; 42(1): 139-142. DOI: 10.1364/OL.42.000139.
- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Abramochkin EG. Fractional orbital angular momentum of a Gaussian beam with an embedded off-axis optical vortex. *Computer Optics* 2017; 41(1): 22-29. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
- [19] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87.
- [20] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams. *Opt Commun* 1993; 102: 336-350.
- [21] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Table of integrals, series, and products. New York: Academic; 1965.
- [22] Gotte JB, Franke-Arnold S, Zambrini R, Barnett SM. Quantum formulation of fractional orbital angular momentum. *J Mod Opt* 2007; 54(12): 1723-1738.
- [23] Gutiérrez-Vega JC, López-Mariscal C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence. *J Opt A Opt* 2008; 10: 015009.
- [24] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [25] Liang G, Cheng W. Splitting and rotating of optical vortices due to non-circular symmetry in amplitude and phase distributions of the host beams. *Phys Lett A* 2020; 384: 126046.
-

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

Alexander Vladimirovich Volyar – born in 1949. A graduate of Simferopol State University (1972), and after graduation – its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993, he has been a professor, since 1999, he has become the head of the General Physics department. The sphere of scientific interests is optics, laser physics. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com.

Received December 25, 2019. The final version – January 25, 2020.
