

# Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя–Гаусса

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

## Аннотация

В работе теоретически показано, что у суперпозиции двух пучков Бесселя–Гаусса с разными топологическими зарядами и разными масштабными множителями (радиальными проекциями волновых векторов) топологический заряд равен топологическому заряду того пучка Бесселя–Гаусса, у которого больше масштабный множитель. Если у пучков Бесселя–Гаусса масштабные множители равны, то топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду того пучка Бесселя–Гаусса, у которого больше модуль весового коэффициента (больше мощность). Если и мощности пучков одинаковы, то топологический заряд суперпозиции равен среднему арифметическому от топологических зарядов каждого пучка Бесселя–Гаусса в суперпозиции. При условии, что сумма топологических зарядов обоих пучков нечётная, топологический заряд суперпозиции будет полуцелым числом. Но на практике из-за конечного радиуса окружности, на котором рассчитывается топологический заряд, полуцелого топологического заряда для вырожденного случая не получается. Вместо полуцелого топологического заряда, получается целый топологический заряд, меньший из двух. Моделирование показывает, что при небольшой разнице в весовых коэффициентах топологический заряд суперпозиции не сохраняется: в ближней зоне и зоне Френеля топологический заряд равен большему из двух, а в дальней зоне – меньшему. При этом переход топологического заряда от большего к меньшему происходит не скачком, а непрерывно на некотором расстоянии. В переходной зоне топологический заряд дробный.

**Ключевые слова:** топологический заряд, пучок Бесселя–Гаусса, дифракция Френеля, дальняя зона.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя–Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 1. – С. 19–28. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-816.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of a superposition of two Bessel-Gaussian beams. Computer Optics 2021; 45(1): 19–28. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-816.

## Введение

Лазерные вихревые пучки характеризуются двумя основными величинами: орбитальным угловым моментом (ОУМ) и топологическим зарядом (ТЗ). Хотя работ по исследованию ОУМ вихревых пучков достаточно много (например, [1–9]), изучению ТЗ вихревых пучков уделяется мало внимания [10–12]. Современное состояние исследований по оптическим вихрям можно увидеть из обзора [13]. Изучение ТЗ оптических вихрей важно хотя бы потому, что при амплитудных и фазовых искажениях оптического вихря (ОВ), например, при распространении в турбулентной атмосфере, его ОУМ изменяется (как правило, уменьшается) непрерывно (малые искажения приводят к малым изменениям ОУМ, большие – к большим), а ТЗ при этом изменяется дискретно, так как ТЗ должен оставаться целой величиной. И нужны существенные искажения ОВ, чтобы ТЗ изменился на единицу. То есть ТЗ – более устойчивая величина к искажениям ОВ, чем ОУМ. Еще одна особенность ТЗ заключается в том, что он не всегда сохраняется при распространении ОВ в свободном пространстве, в от-

личие от ОУМ оптических вихрей, который сохраняется при распространении. Известны работы, в которых показано, как меняется ТЗ некоторых ОВ [14–17]. Например, оптический вихрь с начальным дробным ТЗ при распространении в свободном пространстве имеет всегда целый ТЗ. Хотя, как показано в [15, 16], этот целый ТЗ может изменяться на единицу в зоне дифракции Френеля и в дальней зоне дифракции.

Среди всех дробных ТЗ полуцелый ТЗ стоит особняком. В [17] показано, что ТЗ дробных вихрей при распространении целый. Но полуцелые вихри выделяются среди других дробных, так как для ТЗ  $(2n+1)/2$  так и не ясно из [17], какой будет у него ТЗ при распространении:  $(n+1)$  или  $n$ . Орбитальный угловой момент ОВ с начальным полуцелым ТЗ равен этому полуцелому ТЗ [18, 19] и остаётся таким при распространении. Но сохраняется ли полуцелый ТЗ при распространении, не было известно. Например, в работе [20] рассматривалась суперпозиция  $r \exp(-r^2)(\exp(-i\varphi)-1)$  двух пучков (смесь винтовой и краевой дислокаций), у которой ТЗ равен  $-1/2$ . Но из-за того, что второе слагаемое не является модой и в дальней зоне на оптической оси нет нуля интенсивности, в дальней зоне

ТЗ суперпозиции равен  $-1$ . Полуцелые вихри рассматривались также в [21], они названы Гамма-Гауссовыми пучками. Но явно они описаны только в начальной плоскости. Как изменяется ТЗ таких пучков при распространении, в [21] не рассматривалось. Также в [21] рассматриваются моды с полуцелым ТЗ в волноводах с двулучепреломлением.

В данной работе мы теоретически рассмотрим ТЗ линейной соосной комбинации двух пучков Бесселя–Гаусса (БГ) с разными амплитудами, разными ТЗ и разными масштабными факторами (разными радиальными проекциями волновых векторов). И покажем, что ТЗ сохраняется при распространении и равен ТЗ того пучка БГ, у которого больше масштабный фактор. Также мы показали, что у оптического вихря может быть полуцелый ТЗ на любом расстоянии от начальной плоскости, и он сохраняется при распространении пучка, но при этом дробная часть ТЗ «скрыта» на бесконечности. В [21] аналогичный эффект называют «скрытой фазой».

$$E_1(r, \varphi, z) = \frac{E_0}{q(z)} J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \exp \left( ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + i\varphi \right) + \frac{E_1}{q(z)} J_m \left( \frac{\beta r}{q(z)} \right) \exp \left( ikz - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + i\varphi \right). \quad (2)$$

Найдём ТЗ такой суперпозиции пучков (2) для любого  $z$ . Для этого воспользуемся известной формулой для расчета ТЗ [17]:

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (3)$$

Подставим (2) в (3), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{E_0 n \exp \left( i\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} \right) J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) + E_1 m \exp \left( i\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} \right) J_m \left( \frac{\beta r}{q(z)} \right)}{E_0 \exp \left( i\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} \right) J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) + E_1 \exp \left( i\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} \right) J_m \left( \frac{\beta r}{q(z)} \right)}. \quad (4)$$

В пределе при  $r \rightarrow \infty$  заменим функции Бесселя в (4) на их асимптотики:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (5)$$

И так как аргумент функции Бесселя в (4) комплексный, то вместо (5) получим:

## 1. Расчет топологического заряда суммы двух пучков БГ

Пучок Бесселя–Гаусса в любой поперечной плоскости на расстоянии  $z$  имеет комплексную амплитуду вида [22]:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{E_0}{q(z)} J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \times \exp \left( ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + i\varphi \right), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $E_0$  – положительная постоянная,  $J_n(x)$  – функция Бесселя,  $\alpha$  – масштабный параметр,  $k$  – волновое число,  $w$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $n$  – топологический заряд оптического вихря,  $q(z) = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw^2/2$  – длина Рэлея. Рассмотрим суперпозицию двух соосных пучков Бесселя–Гаусса с разными топологическими зарядами и разными масштабными параметрами:

$$J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \approx \sqrt{\frac{q(z)}{2\pi\alpha r}} \exp \left( \frac{\alpha r z}{z_0 (1 + (z^2/z_0^2))} - \frac{i n \pi}{2} - \frac{i \pi}{4} \right). \quad (6)$$

В (6) при представлении косинуса из (5) как суммы двух экспонент вторая экспонента стремится к нулю в пределе  $r \rightarrow \infty$ . Заменим в (4) функции Бесселя экспонентами (6), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\frac{E_0 n (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp \left( i\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} + \frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2} \right) + \frac{E_1 m (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp \left( i\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta r z}{z_0 |q(z)|^2} \right)}{\frac{E_0 (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp \left( i\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} + \frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2} \right) + \frac{E_1 (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp \left( i\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta r z}{z_0 |q(z)|^2} \right)}. \quad (7)$$

Поделив числитель и знаменатель в (7) на третью экспоненту в первом слагаемом, получим вместо (7):

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\frac{E_0 n(-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) + \frac{E_1 m(-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{(\beta - \alpha)rz}{z_0 |q(z)|^2}\right)}{\frac{E_0 (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) + \frac{E_1 (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{(\beta - \alpha)rz}{z_0 |q(z)|^2}\right)}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что если  $\alpha > \beta$ , то в числителе и знаменателе (8) останутся при  $r \rightarrow \infty$  только первые слагаемые, которые после сокращения подобных сомножителей дадут  $TC = n$ . И наоборот, если  $\alpha < \beta$ , то в числителе и знаменателе (8) останутся при  $r \rightarrow \infty$  только вторые слагаемые, которые после сокращения подобных сомножителей дадут  $TC = m$ . То есть какой ТЗ будет у суперпозиции двух пучков Бесселя–Гаусса, зависит от «конкуренции» масштабных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  у функции Бесселя, независимо от амплитуды ( $E_0, E_1$ ) каждого пучка. Особый случай возникает, когда  $\alpha = \beta$ . Тогда вместо (8) можно записать:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{E_0 n(-i)^n e^{in\varphi} + E_1 m(-i)^m e^{im\varphi}}{E_0 (-i)^n e^{in\varphi} + E_1 (-i)^m e^{im\varphi}}. \quad (9)$$

В [23] показано, что ТЗ выражения (9) равен  $TC = n$ , если  $E_0 > E_1$ , и равен  $TC = m$ , если  $E_0 < E_1$ . Если  $E_0 = E_1$ , то из (9) следует, что  $TC = (n + m)/2$ . Действительно, если  $E_0 = E_1$  и  $\alpha = \beta$ , то суперпозиция двух пучков БГ (1) при больших  $r$  будет иметь амплитуду вида:

$$\begin{aligned} E_2(r \rightarrow \infty, \varphi, z) \approx & E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r q(z)}} \times \\ & \times \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)}\right) \times \\ & \times \exp\left(\frac{i\alpha r}{|q(z)|^2} + \frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2} - \frac{i\pi}{4}\right) \times \\ & \times \exp\left[\frac{i(n+m)}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \times \\ & \times \cos\left[\frac{(n-m)}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) видно, что получается оптический вихрь с  $TC = (n + m)/2$  и числом лепестков в распределении интенсивности, равным  $|n - m|$ . Заметим, что и нормированный на мощность пучка орбитальный угловой момент у линейной комбинации двух одинаковых оптических вихрей с разным топологическим зарядом равен топологическому заряду суммы двух пучков  $(n + m)/2$ . Если  $n$  и  $m$  – чётные и нечётные (или наоборот) целые числа, то ТЗ линейной комбинации (10) будет полуцелым числом, хотя число лепестков распределения интенсивности будет целым. Пусть  $m < n$ , тогда у поля (2)  $\alpha = \beta$  и  $E_0 = E_1$  на оптической оси останется изолированный ноль интенсивности  $m$ -го порядка (оптический вихрь с  $TC = m$ ) и на бесконечности остаются  $n - m$  вихрей с  $TC = (n - m)/2$ . Поэто-

му ТЗ (10) будет равен  $TC = (n + m)/2$ . Таким образом, у оптического вихря может быть полуцелый ТЗ при любом  $z$ , но при этом дробная часть ТЗ «скрыта» на бесконечности. В [21] аналогичный эффект называют «скрытой фазой». Для случая (10) эти лучи нулевой интенсивности расходятся от центра (от оптической оси,  $r = 0$ ) до бесконечности вдоль радиусов, для которых полярный угол равен

$$\varphi_p = \left(\frac{4p + |m - n| + 2}{2|m - n|}\right)\pi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

На лучах, исходящих из центра по радиусу под углами  $\varphi = \varphi_p + \pi$ , лежат максимумы интенсивности  $|n - m|$  лепестков. Заметим, что при сложении двух любых одинаковых оптических вихрей, но с разными топологическими зарядами возникает такая картина интенсивности в виде «ромашки» [24]. Функция фазы поля (10) от полярного угла является периодической функцией с разрывом, равным  $\pi$ , если  $m + n$  – нечётное число. Но комплексная амплитуда (10) будет непрерывная. И при разложении в ряд Фурье по угловым гармоникам функции (10) получится только два слагаемых (две угловых гармоники):  $\exp(im\varphi)$  и  $\exp(in\varphi)$ .

Понятно, что доказательство, аналогичное (8) для суммы двух пучков БГ, можно провести для линейной комбинации из любого конечного числа пучков. При этом ТЗ у всей суперпозиции будет равен ТЗ того пучка из суперпозиции, у которого масштабный коэффициент больше. Поэтому ТЗ суперпозиции

$$\begin{aligned} E_2(r, \varphi, z) = & \sum_{n=-N}^N \frac{E_n}{q(z)} J_n(\alpha_n r) \times \\ & \times \exp\left(ikz - \frac{i\alpha_n^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + in\varphi\right) \end{aligned} \quad (12)$$

будет равен  $TC = m$ , если  $\alpha_m = \max(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_N)$ .

## 2. Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя–Гаусса с одинаковыми весовыми и масштабными коэффициентами

Пусть имеется суперпозиция двух пучков Бесселя–Гаусса с одинаковыми весовыми и масштабными коэффициентами (весовые будем считать равными единице):

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z) = & \frac{1}{q} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{qw_0^2}\right) \times \\ & \times \left[J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) \exp(im\varphi) + J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) \exp(in\varphi)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В начальной плоскости ( $z=0$ ) ТЗ пучка (13) неопределенный (не существует), так как  $q=1$ , аргумент функции Бесселя в (13) вещественный и поэтому при  $r=\gamma_{m,p}/\alpha$  ( $\gamma_{m,p}$  –  $p$ -й ноль функции Бесселя  $m$ -го порядка) ТЗ (13) равен  $n$ , а при  $r=\gamma_{n,p}/\alpha$  ТЗ (13) равен  $m$ . И так как нулей (корней) функции Бесселя счетное число, такое чередование ТЗ (то  $n$ , то  $m$ ) будет и при  $r$ , стремящемся к бесконечности. При распространении пучка (13) в пространстве аргумент функций Бесселя становится комплексным и нулевых значений у них нет.

Найдём ТЗ суперпозиции (13) при  $z>0$ , рассчитав его на окружности радиуса  $r$ . Для определённости положим, что  $n>m$  (случай  $n=m$  тривиален). Подставим (13) в (3), получим:

$$TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{m J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + n J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) e^{i(n-m)\varphi}}{J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) e^{i(n-m)\varphi}} d\varphi. \quad (14)$$

Заменив  $\varphi$  на  $\varphi/(n-m)$ , получим этот же интеграл, но с экспонентами  $e^{i\varphi}$ . Заменив  $e^{i\varphi}$  на комплексную переменную  $Z$ , получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{m+n(-i)^{n-m} Z}{1+(-i)^{n-m} Z} \frac{1}{Z}, Z=0 \right\} + \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{m+n(-i)^{n-m} Z}{1+(-i)^{n-m} Z} \frac{1}{Z}, Z=-i^{n-m} \right\} \right] = m + \frac{n-m}{2} = \frac{n+m}{2}. \quad (18)$$

На практике, однако, ТЗ вычисляется по окружности конечного радиуса. И численно установлено, что даже при очень большом радиусе соотношение (16) даёт число, по модулю близкое к единице, но меньшее её (при  $n>m$ ) (рис. 1). Из-за этого в интеграле (17) остаётся только один полюс  $z=0$  и численный расчёт ТЗ даёт значение  $m$ , то есть меньший из двух ТЗ.

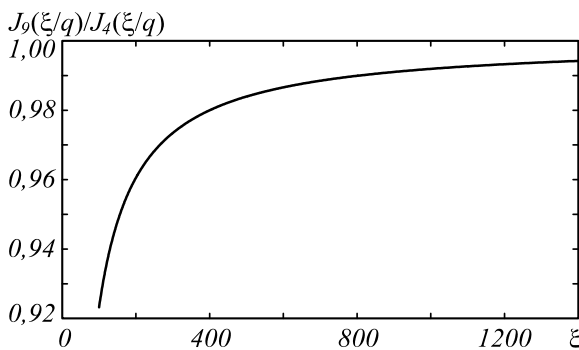


Рис. 1. Модуль соотношения  $J_9(\xi/q)/J_4(\xi/q)$  при  $q = 1 + i/4$ ,  $100 \leq \xi \leq 1400$

Таким образом, в данном параграфе мы показали, что полуцелый ТЗ для суперпозиции двух пучков

$$TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{m J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + n J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) Z}{J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) Z} \frac{dZ}{Z}. \quad (15)$$

Интеграл (15) вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Число полюсов внутри окружности единичного радиуса зависит от соотношения  $J_m(\alpha r/q)/J_n(\alpha r/q)$ . Используя асимптотики функции Бесселя (5) и (6), получим, что отношение двух функций Бесселя разного порядка равно примерно

$$\frac{J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right)}{J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right)} \sim (-i)^{n-m}. \quad (16)$$

Тогда, по определению Берри (3), ТЗ равен

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{m+n(-i)^{n-m} Z}{1+(-i)^{n-m} Z} \frac{dZ}{Z}. \quad (17)$$

У подынтегрального выражения в (17) два полюса:  $Z=0$  и  $Z=-i^{n-m}$ . Первый полюс лежит внутри единичной окружности, а второй – на ней. Поэтому вычет во втором полюсе делится на два и ТЗ (13) равен

Бесселя с равными масштабными и весовыми коэффициентами (13) получается только при расчете его по окружности бесконечно большого радиуса. При расчете ТЗ (13) по окружности конечного радиуса ТЗ будет равен меньшему из двух чисел  $n$  или  $m$ .

Покажем, что в дальней зоне ТЗ будет равен меньшему из чисел  $m<n$ . Действительно, рассмотрим сумму двух пучков БГ (13) в дальней зоне:

$$E(r, \varphi, z \gg z_0) = \frac{-iz_0}{z} \exp\left(ikz - \frac{\alpha^2 z_0}{2k} + \frac{ikr^2}{2z}\right) \times \left[ E_0(-i)^n I_n\left(\frac{\alpha r z_0}{z}\right) \exp(in\varphi) + E_1(-i)^m I_m\left(\frac{\alpha r z_0}{z}\right) \exp(im\varphi) \right], \quad (19)$$

где  $I_\nu(y)$  – модифицированная функция Бесселя:

$$I_n(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(n+p)!} \left(\frac{y}{2}\right)^{n+2p}. \quad (20)$$

Тогда в дальней зоне вместо (15) для расчета ТЗ пучка (19) можно записать выражение:

$$TC(r) = \frac{1}{2\pi} \times \times \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{nE_0(-i)^n I_n(\gamma r) + mE_1(-i)^m I_m(\gamma r) Z}{E_0(-i)^n I_n(\gamma r) + E_1(-i)^m I_m(\gamma r) Z} \frac{dZ}{Z}, \quad (21)$$

где  $\gamma = k\alpha w_0^2/(2z)$ . Преобразуем (21) к виду, аналогичному (17), получим:

$$TC(\rho) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{m+n(-i)^{n-m} \frac{E_0}{E_1} \frac{I_n(\gamma \rho)}{I_m(\gamma \rho)} \frac{Z}{Z}}{1+(-i)^{n-m} \frac{E_0}{E_1} \frac{I_n(\gamma \rho)}{I_m(\gamma \rho)} \frac{Z}{Z}} dZ. \quad (22)$$

Если  $E_0 = E_1$ , то отношение двух модифицированных функций Бесселя  $I_n(\gamma \rho) I_m^{-1}(\gamma \rho)$  в (22), как следует из (20), будет меньше единицы, если  $n > m$ . То есть второй полюс в (22) будет находиться вне окружности единичного радиуса, а вычет в нуле в (22) даст значение ТЗ, равное меньшему номеру  $m < n$ . Такой вывод подтверждается и с помощью численного моделирования. Если  $E_0 < E_1$ , то по-прежнему в (22) будет только один полюс и, значит, ТЗ будет равен  $m$  ( $m < n$ ). Но, как показано раньше, в этом случае ( $E_0 < E_1$ ) ТЗ равен  $m$  не только в дальней зоне, но при любом  $z$ . Если, наоборот,  $E_0 > E_1$ , то отношение из (22) будет зависеть от расстояния  $z$ :

$$E_0 E_1^{-1} I_n(\gamma \rho) I_m^{-1}(\gamma \rho) \approx E_0 E_1^{-1} (z_0/z)^{n-m},$$

и при  $z > z_0 (E_0 E_1^{-1})^{1/(n-m)}$  это отношение станет меньше 1. И в (22) будет только один полюс в нуле. То есть если пучок БГ с большим номером  $n$  имеет весовой коэффициент немного больший, чем весовой коэффициент пучка БГ с меньшим номером  $m$  ( $E_0 > E_1$ ), то ТЗ всего пучка (19) не будет сохраняться при распространении. При небольших  $z$  ТЗ будет равен  $n$ , а при больших  $z$  ТЗ будет равен  $m$ . Этот вывод будет подтвержден с помощью моделирования.

### 3. Моделирование

Расчёт комплексной амплитуды суперпозиции двух пучков БГ осуществлялся по формуле (2), а расчёт ТЗ – по формуле (3). Использовались следующие параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 1,55$  мкм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 1$  мм, ТЗ первого пучка  $n = 0$ , ТЗ второго пучка  $m = 1$ , расстояния распространения  $z = z_0/10$  (ближняя зона,  $z_0 = 2,027$  м),  $z = z_0$  (расстояние Рэлея) и  $z = 5z_0$  (дальняя зона). Интенсивность и фаза рассчитывались в области  $-R \leq x, y \leq R$  ( $R = 2$  мм для  $z = z_0/10$ ,  $R = 10$  мм для  $z = z_0$  и  $R = 25$  мм для  $z = 5z_0$ ), число отсчётов  $N = 1024 \times 1024$ , радиус окружности для расчёта ТЗ  $R_1 = 2R$ , число отсчётов на окружности  $N_1 = 10^7$ .

На рис. 2 показана интенсивность и фаза суперпозиции двух пучков БГ. Первый пучок БГ шире, его масштабный параметр меньше  $\alpha = 0,001k$ , чем у второго пучка  $\beta = 0,002k$ . Амплитуда пучков в суперпо-

зиции одинаковая ( $E_0 = E_1 = 1$ ). Из рис. 2б видно, что есть три внеосевых вихря, но два из них противоположного знака, а из рис. 2г,е видно, что есть один внеосевой вихрь (в нижней части картины). Поэтому, как и предсказывает теория, ТЗ должен быть равен 1. Численный расчёт по формуле (3) дает единицу до четвертого знака ( $TC = 1,0000$ ) во всех трёх случаях.

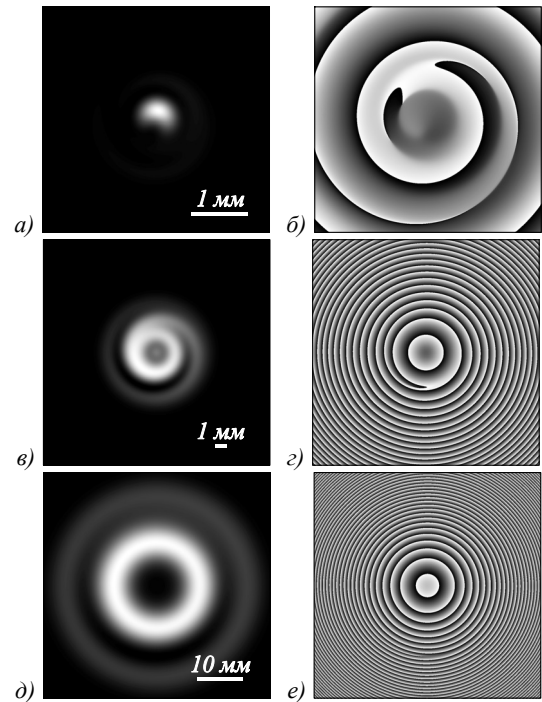


Рис. 2. Распределение интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) (белый цвет – 0, черный –  $2\pi$ ) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ  $n = 0$ ,  $m = 1$ , с одинаковой амплитудой ( $E_0 = E_1 = 1$ ), но разными масштабирующими коэффициентами  $\alpha = 0,001k$  и  $\beta = 0,002k$ , на расстояниях  $z = z_0/10$  (а, б),  $z = z_0$  (в, г) и  $z = 5z_0$  (д, е)

На рис. 3 показаны интенсивность и фаза суперпозиции тех же двух пучков БГ, но, наоборот, первый пучок БГ уже ( $\alpha = 0,002k$ ), чем второй ( $\beta = 0,001k$ ), а веса по-прежнему одинаковые ( $E_0 = E_1 = 1$ ). Из рис. 3в видно, что спираль интенсивности изменила направление своего закручивания на противоположенное по сравнению с рис. 2в. На распределении фазы в ближней зоне (рис. 3б) имеется две пары вихрей противоположных знаков, а на распределениях фазы в зоне Френеля и дальней зоне (рис. 3г, е) по сравнению с рис. 2г, е имеется два оптических вихря – один осевой вихрь с ТЗ +1 и один внеосевой вихрь с ТЗ –1. Поэтому суммарный ТЗ должен быть равен нулю, как и предсказывает теория. Численно рассчитанный ТЗ дает очень малые значения: на рис. 3а,б  $TC = -0,000000022700 \approx 0$ , на рис. 3в,г  $TC = 2,0680e-32 \approx 0$  и на рис. 3д,е  $TC = -3,0812e-29 \approx 0$ .

Из сравнения рис. 2д, е и рис. 3д, е видны интересные особенности таких пучков. Видно, что распределения интенсивности в дальней зоне в обоих случаях почти одинаковые и имеют вид кольца, хотя фазовое распределение внутри кольца разное. На рис. 2е фаза

внутри кольца без вихря (параболическая), хотя ТЗ пучка равен 1, а на рис. 3е фаза внутри кольца вихревая, хотя ТЗ пучка равен нулю.

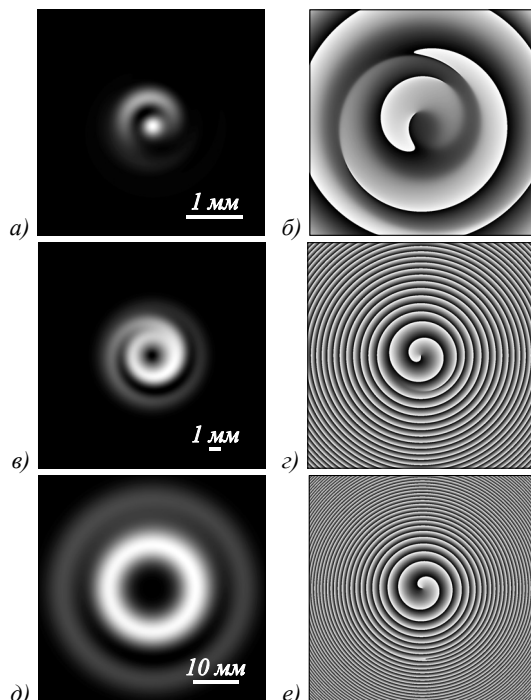


Рис. 3. Распределение интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) (белый цвет – 0, черный –  $2\pi$ ) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ  $n=0$ ,  $t=1$ , с одинаковой амплитудой ( $E_0=E_1=1$ ), но разными масштабирующими коэффициентами  $\alpha=0,002k$  и  $\beta=0,001k$ , на расстояниях  $z=z_0/10$  (а, б),  $z=z_0$  (в, г) и  $z=5z_0$  (д, е)

На рис. 4 показаны интенсивность и фаза двух пучков БГ, у которых ширина одинаковая ( $\alpha=\beta=0,001k$ ), а амплитуды (веса) разные: вес первого пучка больше ( $E_0=2$ ,  $E_1=1$ ). Как и предсказывает теория, пучок БГ с большим весом доминирует в суперпозиции. И так как ТЗ первого пучка равен нулю, то у суперпозиции распределение интенсивности в дальней зоне в виде кольца, а фаза безвихревая. Численный расчет дает очень малое значение ТЗ для всех трёх расстояний (на рис. 4а,б ТЗ=0,0000000046873 $\approx$ 0, на рис. 4в,г ТЗ=0,0000000059396 $\approx$ 0 и на рис. 4д,е ТЗ=0,0000000058414 $\approx$ 0).

На рис. 5 показаны интенсивность и фаза суперпозиции тех же двух пучков БГ с одинаковой шириной ( $\alpha=\beta=0,001k$ ), но теперь вес второго пучка больше, чем у первого ( $E_0=1$ ,  $E_1=2$ ). Из рис. 5а,в,д видно, что распределение интенсивности есть неравномерное кольцо с нулем на оси. Второй пучок (вихревой с  $t=1$ ) доминирует в суперпозиции, и на всех трёх распределениях фазы (рис. 5б,г,е) имеется только один вихрь на оптической оси. Поэтому, как предсказывает теория, ТЗ всей суперпозиции должен быть равен ТЗ второго пучка (ТЗ=1). Численный расчет по фазе на рис. 5б,г,е дает во всех трёх случаях единичное значение ТЗ до четвертого знака ТЗ=1,0000.

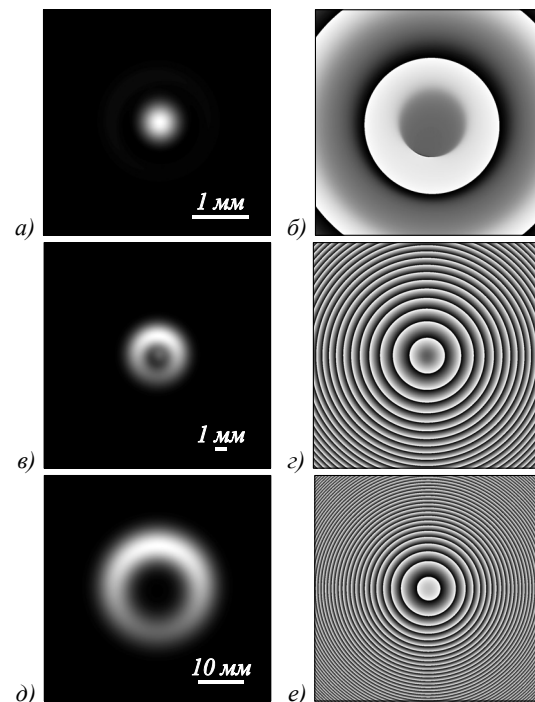


Рис. 4. Распределение интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) (белый цвет – 0, черный –  $2\pi$ ) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ  $n=0$ ,  $t=1$ , с одинаковыми масштабирующими коэффициентами  $\alpha=\beta=0,001k$ , но разными амплитудами ( $E_0=2$ ,  $E_1=1$ ), на расстояниях  $z=z_0/10$  (а, б),  $z=z_0$  (в, г) и  $z=5z_0$  (д, е)

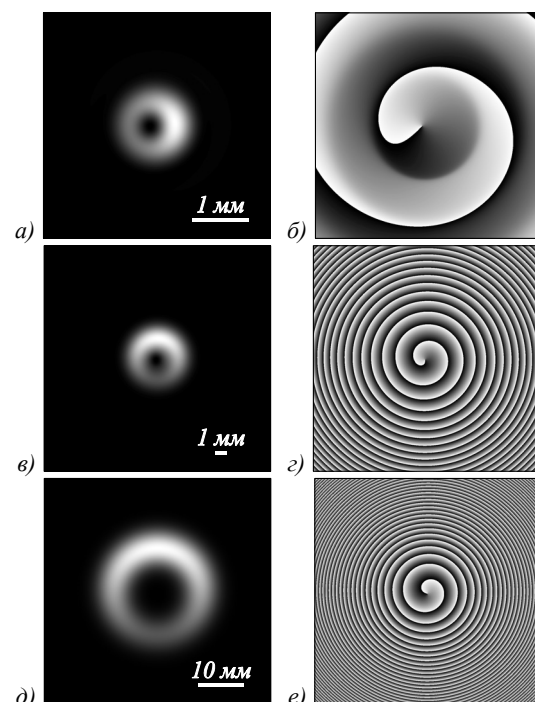


Рис. 5. Распределение интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) (белый цвет – 0, черный –  $2\pi$ ) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ  $n=0$ ,  $t=1$ , с одинаковыми масштабирующими коэффициентами  $\alpha=\beta=0,001k$ , но разными амплитудами ( $E_0=1$ ,  $E_1=2$ ), на расстояниях  $z=z_0/10$  (а, б),  $z=z_0$  (в, г) и  $z=5z_0$  (д, е)

На рис. 6 показаны интенсивность и фаза суперпозиции тех же двух пучков БГ, но и ширины, и амплитуды (веса) у обоих пучков БГ одинаковы ( $\alpha = \beta = 0,001k$ ,  $E_0 = E_1 = 1$ ). Теория предсказывает (9), что в этом случае у суперпозиции должен быть полуцелый ТЗ, в данном случае  $TC = 1/2$ . Но при расчете ТЗ по окружности конечного радиуса, как предсказывает теория (18), ТЗ должен быть равен меньшему из двух чисел  $n$  и  $m$ . В нашем случае ТЗ должен быть равен нулю.

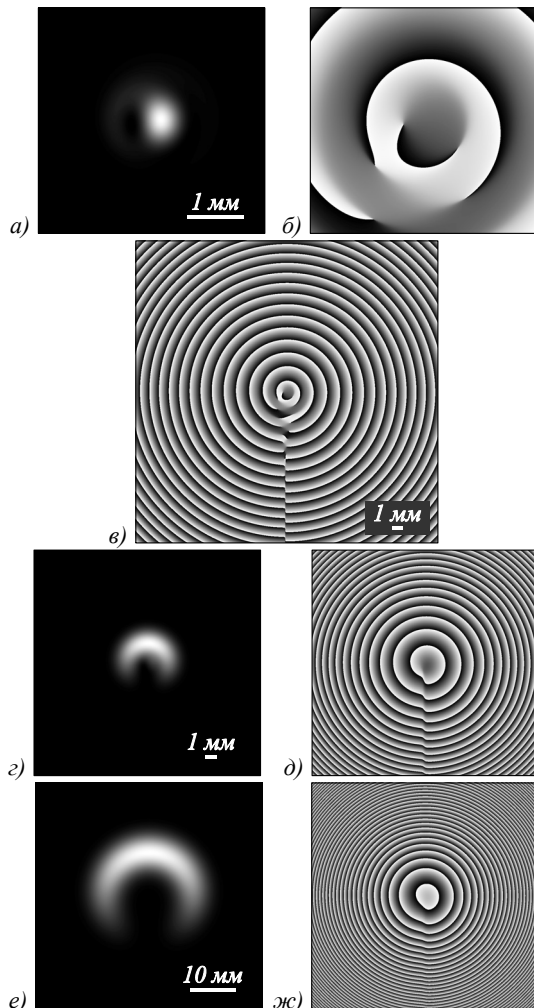


Рис. 6. Распределение интенсивности (а, с, е) и фазы (б, в, д, ж) (белый цвет – 0, черный –  $2\pi$ ) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ  $n = 0$ ,  $m = 1$ , с одинаковыми масштабирующими коэффициентами  $\alpha = \beta = 0,001k$  и одинаковыми амплитудами ( $E_0 = E_1 = 1$ ), на расстояниях  $z = z_0/10$  (а-в),  $z = z_0$  (с, д) и  $z = 5z_0$  (е, ж) (на рис. 6б, в показана одна и та же фаза, но в областях разного размера)

Из рис. 6а видно, что в ближней зоне доминирует первый пучок (с нулевым ТЗ), а из рис. 6г, е видно, что интенсивность имеет вид разорванного кольца. На рис. 6б кажется, что ТЗ в ближней зоне равен 1 (три вихря порядка +1 и два вихря порядка –1), но если взять область шире ( $R = 15$  мм, рис. 6в), то видно, что при удалении от центра линии постоянной фазы имеют вид разомкнутых окружностей. На луче, идущем от центра картины вертикально вниз, интенсив-

ность равна нулю. На этом луче нулевой интенсивности ( $\varphi = 3\pi/2$ ) видны скачки фазы (рис. 6в). Но каждый вихрь порядка +1 компенсируется вихрем порядка –1, и при точном равенстве нулю весов ( $E_0 = 1$ ,  $E_1 = 1$ ) численный расчет дает нулевое значение ТЗ ( $TC = 0$ ). В зоне Френеля и в дальней зоне разрывы в разомкнутых кольцах постоянной фазы устраняются и оптические вихри пропадают, поэтому в этих плоскостях ТЗ получился также примерно равным нулю:  $TC = 0,000000049984$  (рис. 6д) и  $TC = 0,000000049827$  (рис. 6ж).

На рис. 6в видно, что фаза имеет вид «разорванных» спиралей, которые показывают, что в пучке присутствует «смесь винтовой и краевой дислокаций», которая присуща полуцелым оптическим вихрям [20]. Также на рис. 6е видно, что интенсивность пучка с ТЗ = 1/2 имеет вид подковы или разомкнутого круга [21]. На рис. 6ж видно, что вихрей нет, а единственный вихрь с  $m = 1$  «скрылся» на бесконечности. И поскольку этот вихрь лежит на окружности «бесконечного» радиуса, то он дает вклад в ТЗ только половину.

#### 4. Моделирование в случае примерного равенства весовых коэффициентов

При моделировании расчет ТЗ осуществляется по окружности конечного радиуса. Это приводит к ряду особенностей, которые были рассмотрены в параграфе 2. В этом параграфе рассмотрим, как влияет на величину ТЗ небольшое отклонение от равенства двух весовых коэффициентов у суперпозиции двух пучков БГ с одинаковым масштабом. Численный расчет показал, что переход от целого ТЗ к полуцелому происходит не мгновенно скачком, а плавно (рис. 7).

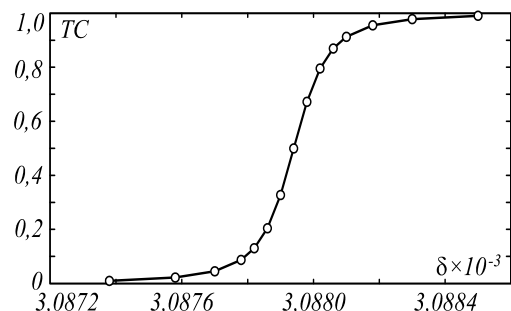


Рис. 7. Зависимость ТЗ от разницы весовых коэффициентов  $\delta$  в суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ  $n = 0$ ,  $m = 1$ , с одинаковыми масштабирующими коэффициентами  $\alpha = \beta = 0,001k$  и почти одинаковыми амплитудами ( $E_0 = 1$ ,  $E_1 = 1 + \delta$ ,  $\delta \ll 1$ ) на расстоянии  $z = z_0$

На рис. 8 показаны распределения фаз суперпозиции пучков БГ при  $E_1 = 1,00308794$  ( $E_0 = 1$ ) в разных поперечных плоскостях.

Полученное значение ТЗ на рис. 8 составляет 1,0000 ( $z = 0,1z_0$ ,  $z = 0,9z_0$ ,  $z = 0,95z_0$ ), 0,63782 ( $z = 0,99999z_0$ ), 0,49967 ( $z = z_0$ ), 0,36111 ( $z = 1,00001z_0$ ), 0,00000017636 ( $z = 1,05z_0$ ), 0,000000081473 ( $z = 1,1z_0$ ), 0,000000050365 ( $z = 5,0z_0$ ). Согласно вычисленным

значениям ТЗ, он спадает: при  $z < z_0$  он равен 1, при приближении к  $z_0$  начинает быстро падать и при  $z > z_0$  ТЗ становится равен нулю (рис. 9). В зоне перехода ТЗ дробный. Сама зона перехода примерно равна  $\Delta z \approx 0,0001z_0 \approx 10^{-4} \times 2 \times 10^6 \text{ мкм} \approx 200 \text{ мкм}$  ( $z_0 \approx 2 \text{ м}$ ). Согласно расчётам, расстояние, где происходит плав-

ный переход от 1 к 0, возрастает с увеличением весового коэффициента второго пучка БГ. Это объясняет, почему на рис. 7 ТЗ оказался равен нулю: при одинаковых коэффициентах  $E_0 = E_1 = 1$  спад ТЗ произошёл на малом расстоянии  $z \approx 0$ . Это также подтверждается рассуждениями по поводу выражения (22).

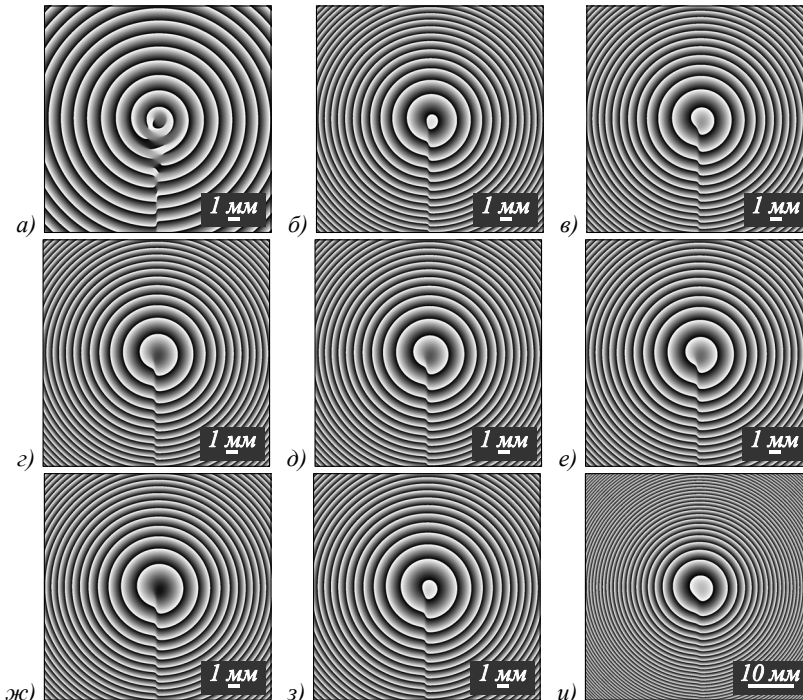


Рис. 8. Распределения фаз суперпозиции пучков БГ при  $E_1 = 1,00308794$  ( $TC \approx 0,5$  при  $z = z_0$ ) в плоскостях  $z = 0,1z_0$  (а),  $z = 0,9z_0$  (б),  $z = 0,95z_0$  (в),  $z = 0,9999z_0$  (г),  $z = z_0$  (д),  $z = 1,00001z_0$  (е),  $z = 1,05z_0$  (ж),  $z = 1,1z_0$  (з),  $z = 5,0z_0$  (и). Расчётная область на всех рисунках  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 10 \text{ мм}$  (а–г) и  $R = 25 \text{ мм}$  (и), радиус окружности для расчёта ТЗ  $R_1 = 2R$

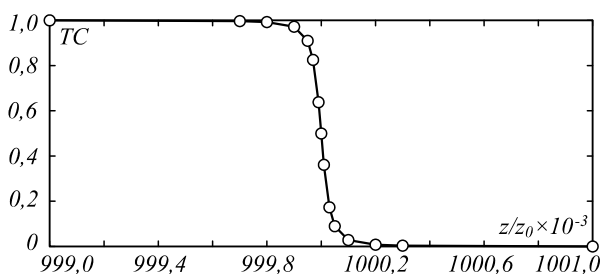


Рис. 9. Спад ТЗ с единицы до нуля в области  $0,9999z_0 \leq z \leq 1,0001z_0$

Используем аналогию с квантовой механикой (параксиальное уравнение распространения совпадает с уравнением Шредингера) с учетом замены эволюции квантовой системы во времени, на распространение света в свободном пространстве. Рис. 8 и рассуждения после выражения (22) показывают, что суперпозицию из двух пучков БГ можно рассматривать как квантовую систему, находящуюся либо на верхнем энергетическом уровне, либо на нижнем. Если система находится в начальный момент времени на верхнем энергетическом уровне ( $E_0 > E_1$  и  $n > m$ ), то какое-то время система будет находиться в этом состоянии ( $TZ = n$ ), но потом перейдет на нижний энергетический уровень ( $TZ = m$ ). Если же система в начальном

состоянии находилась на нижнем энергетическом уровне ( $E_0 < E_1$  и  $m < n$ ), то она будет все время находиться на этом уровне ( $TZ = m$ ).

### Заключение

В работе теоретически и с помощью моделирования показано, что у соосной суперпозиции нескольких пучков Бесселя–Гаусса с разными топологическими зарядами и разными масштабными параметрами (радиальными проекциями волновых векторов) топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду того пучка Бесселя–Гаусса из суперпозиции, у которого масштабный параметр больше. У суперпозиции только из двух пучков Бесселя–Гаусса с одинаковыми масштабными параметрами топологический заряд равен топологическому заряду того пучка Бесселя–Гаусса, у которого больше амплитуда. Если и амплитуды у двух пучков Бесселя–Гаусса равны, то топологический заряд такой суперпозиции равен среднему арифметическому топологических зарядов пучков. Если сумма топологических зарядов двух пучков нечётная, то топологический заряд суперпозиции будет полуцелым. Но на практике из-за конечного радиуса окружности, на котором рассчитывается ТЗ, полуцелого ТЗ для вырожденного слу-



чая не получается. Вместо полупецелого ТЗ, получается целый ТЗ, меньший из двух. Моделирование показывает, что при небольшой разнице в весовых коэффициентах ТЗ суперпозиции не сохраняется: в ближней зоне и зоне Френеля ТЗ равен большему из двух, а в дальней зоне – меньшему. Причем переход ТЗ от большего к меньшему происходит не скачком, а непрерывно на некотором расстоянии. В переходной зоне ТЗ дробный, и в том числе полупецелый.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003 в частях «Расчет топологического заряда суммы двух пучков БГ» и «Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя–Гаусса с одинаковыми весовыми и масштабными коэффициентами»), Российского научного фонда (грант 18-19-00595 в частях «Моделирование» и «Моделирование в случае примерного равенства весовых коэффициентов»), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Введение» и «Заключение».

### Литература

1. **Zhang, Y.** Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminum metasurfaces / Y. Zhang, X. Yang, J. Gao // *Scientific Reports*. – 2019. – Vol. 9. – 9133.
2. **Волярь, А.В.** Лавинная неустойчивость орбитального углового момента оптических вихрей высших порядков / А.В. Волярь, М.В. Брецко, Я.Е. Акимов, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 14-24. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-14-24.
3. **Zhang, H.** Grafted optical vortex with controllable orbital angular momentum distribution / H. Zhang, X. Li, H. Ma, M. Tang, H. Li, J. Tang, Y. Cai // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 16. – P. 22930-22938.
4. **Wei, D.** Generating controllable Laguerre-Gaussian laser modes through intercavity spin-orbital angular momentum conversion of light / D. Wei, Y. Cheng, R. Ni, Y. Zhang, X. Hu, S. Zhu, M. Xiao // *Physical Review Applied*. – 2019. – Vol. 11. – 014038.
5. **Kotlyar, V.V.** Orbital angular momentum of laser beam behind an off-axis spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.S. Kozlova // *Optical Letters*. – 2019. – Vol. 44, Issue 15. – P. 3673-3676. – DOI: 10.1364/OL.44.003673.
6. **Ruffalo, G.** Multiplication and division of the orbital angular momentum of light with diffractive transformation optics / G. Ruffalo, M. Massari, F. Romanato // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – 113.
7. **Gong, L.** Optical orbital-angular-momentum multiplexed data transmission under high scattering / L. Gong, Q. Zhao, H. Zheng, X. Hu, K. Huang, J. Yang, Y. Li // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – 27.
8. **Kazemi, S.H.** Identifying orbital angular momentum of light in quantum wells / S.H. Kazemi, M. Mahmoudi // *Laser Physics Letters*. – 2019. – Vol. 16. – 076001.
9. **Konzelmann, A.M.** Interaction of orbital angular momentum light with Rydberg excitons: modifying dipole selection rules / A.M. Konzelmann, S.O. Kruger, H. Giessen // *Physical Review B*. – 2019. – Vol. 100. – 115308.
10. **Rybakov, F.N.** Chiral magnetic skyrmions with arbitrary topological charge / F.N. Rybakov, N.S. Kiselev // *Physical Review B*. – 2019. – Vol. 99. – 064437.
11. **Zhang, L.** Dynamical detection of topological charges / L. Zhang, L. Zhang, X. Liu // *Physical Review A*. – 2019. – Vol. 99. – 053606.
12. **Волярь, А.В.** Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд / А.В. Волярь, М.В. Брецко, Я.Е. Акимов, Ю.А. Егоров, В.В. Милуков // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 723-734. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
13. **Shen, Y.** Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities / Y. Chen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – 90.
14. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vastnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1987. – Vol. 56. – 4064.
15. **Jesus-Silva, A.J.** Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone / A.J. Jesus-Silva, E.J.S. Fonseca, J.M. Hickmann // *Optics Letters*. – 2012. – Vol. 37. – P. 4552-4554.
16. **Wen, J.** Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27. – P. 5893-5904.
17. **Wang, H.** Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit / H. Wang, L. Liu, C. Zhou, J. Xu, M. Zhang, S. Teng, Y. Cai // *Nanophotonics*. – 2019. – Vol. 8. – P. 317-324.
18. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6. – P. 259-268.
19. **Gotte, J.B.** Quantum formulation of fractional orbital angular momentum / J.B. Gotte, S. Franke-Arnold, R. Zambrini, S.M. Barnett // *Journal of Modern Optics*. – 2007. – Vol. 54, Issue 12. – P. 1723-1738.
20. **Basistiy, I.V.** Optical wavefront dislocations and their properties / I.V. Basistiy, M.S. Soskin, M.V. Vastnetsov // *Optics Communications*. – 1995. – Vol. 119. – P. 604-612.
21. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 96. – 063807.
22. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattary, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64, Issue 6. – P. 491-495.
23. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28, Issue 6. – P. 8266-8281.
24. **Kotlyar, V.V.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.

---

**Сведения об авторах**

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** – см. стр. 12 этого номера.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

---

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 29 сентября 2020 г. Окончательный вариант – 17 ноября 2020 г.

---

---

# Topological charge of a superposition of two Bessel-Gaussian beams

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,*

<sup>2</sup>*Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

## Abstract

Here we show theoretically that a superposition of two Bessel-Gaussian (BG) beams with different topological charges (TC) and different scaling factors (radial components of the wave vectors) has the TC equal to that of the BG beam with the larger scaling factor. If the scaling factors of the BG beams are equal, then TC of the whole superposition equals TC of the BG beam with the larger (in absolute value) weight coefficient in the superposition (i.e. with larger power). If the constituent BG beams are also same-power, TC of the superposition equals the average TC of the two BG beams. Therefore, if the sum of TCs of both beams is odd, TC of the superposition is a half-integer number. In practice, however, TC is calculated over a finite radius circle and, hence, the half-integer TC for the degenerated case cannot be obtained. Instead of the half-integer TC, the lower of the two integer TCs is obtained. Numerical simulation reveals that if the weight coefficients in the superposition are slightly different, TC of the superposition is not conserved on propagation. In the near field and in the Fresnel diffraction zone, TC is equal to the highest TC of the two BG beams, while in the far field it is equal to the lower TC. What is more, TC changes its value from high to low not instantly, but continuously at some propagation distance. In the intermediate zone TC is fractional.

**Keywords:** topological charge, Bessel-Gaussian beam, Fresnel diffraction, far field.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of a superposition of two Bessel-Gaussian beams. *Computer Optics* 2021; 45(1): 19-28. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-816.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under projects No. 18-29-20003 (Sections "Calculation of the topological charge of the sum of two BG-beams" and "Topological charge of a superposition of two Bessel-Gaussian beams with the same weight and scaling coefficients") and No. 20-57-56006 (Sections "Simulation" and "Simulation in the case of nearly equal weight coefficients"), as well as the Ministry of Science and Higher Education within the government project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (Sections "Introduction" and "Conclusion").

## References

- |  |  |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>[1] Zhang Y, Yang X, Gao J. Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminum metasurfaces. <i>Sci Rep</i> 2019; 9: 9133.</li><li>[2] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Avalanche instability of the orbital angular momentum higher order optical vortices. <i>Computer Optics</i> 2019; 43(1): 14-24. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-14-24.</li><li>[3] Zhang H, Li X, Ma H, Tang M, Li H, Tang J, Cai Y. Grafted optical vortex with controllable orbital angular momentum distribution. <i>Opt Express</i> 2019; 27(16): 22930-22938.</li><li>[4] Wei D, Cheng Y, Ni R, Zhang Y, Hu X, Zhu S, Xiao M. Generating controllable Laguerre-Gaussian laser modes through intercavity spin-orbital angular momentum conversion of light. <i>Phys Rev Appl</i> 2019; 11: 014038.</li><li>[5] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Kozlova ES. Orbital angular momentum of laser beam behind an off-axis spiral phase plate. <i>Opt Lett</i> 2019; 44(15): 3673-3676. DOI: 10.1364/OL.44.003673.</li><li>[6] Ruffalo G, Massari M, Romanato F. Multiplication and division of the orbital angular momentum of light with diffractive transformation optics. <i>Light Sci Appl</i> 2019; 8: 113.</li><li>[7] Gong L, Zhao Q, Zheng H, Hu X, Huang K, Yang J, Li Y. Optical orbital-angular-momentum multiplexed data</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>transmission under high scattering. <i>Light Sci Appl</i> 2019; 8: 27.</li><li>[8] Kazemi SH, Mahmoudi M. Identifying orbital angular momentum of light in quantum wells. <i>Laser Phys Lett</i> 2019; 16: 076001.</li><li>[9] Konzelmann AM, Kruger SO, Giessen H. Interaction of orbital angular momentum light with Rydberg excitons: modifying dipole selection rules. <i>Phys Rev B</i> 2019; 100: 115308.</li><li>[10] Rybakov FN, Kiselev NS. Chiral magnetic skyrmions with arbitrary topological charge. <i>Phys Rev B</i> 2019; 99: 064437.</li><li>[11] Zhang L, Zhang L, Liu X. Dynamical detection of topological charges. <i>Phys Rev A</i> 2019; 99: 053606.</li><li>[12] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA, Milyukov VV. Sectoral perturbation of vortex beams: Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge. <i>Computer Optics</i> 2019; 43(5): 723-734. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.</li><li>[13] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. <i>Light Sci Appl</i> 2019; 8: 90.</li><li>[14] Soskin MS, Gorshkov VN, Vastnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex. <i>Phys Rev A</i> 1987; 36: 4064.</li></ul> |
|--|--|
-

- 
- |  |  |
|--|--|
| <p>[15] Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS, Hickmann JM. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone. <i>Opt Lett</i> 2012; 37: 4552-4554.</p> <p>[16] Wen J, Wang L, Yang X, Zhang J, Zhu S. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams. <i>Opt Express</i> 2019; 27: 5893-5904.</p> <p>[17] Wang H, Liu L, Zhou C, Xu J, Zhang M, Teng S, Cai Y. Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit. <i>Nanophotonics</i> 2019; 8: 317-324.</p> <p>[18] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. <i>J Opt A Pure Appl Opt</i> 2004; 6: 259-268.</p> <p>[19] Gotte JB, Franke-Arnold S, Zambrini R, Barnett SM. Quantum formulation of fractional orbital angular momentum. <i>J Mod Opt</i> 2007; 54(12): 1723-1738.</p> | <p>[20] Basistiy IV, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical wavefront dislocations and their properties. <i>Opt Commun</i> 1995; 119: 604-612.</p> <p>[21] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices. <i>Phys Rev A</i> 2017; 96: 063807.</p> <p>[22] Gori F, Guattary G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. <i>Opt Commun</i> 1987; 64(6): 491-495.</p> <p>[23] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. <i>Opt Express</i> 2020; 28(6): 8266-8281.</p> <p>[24] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. <i>J Mod Opt</i> 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.</p> |
|--|--|
- 

### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

---

*Received September 29, 2020. The final version – November 17, 2020.*

---