ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

Дискретные ортогональные преобразования на решетках целых элементов квадратичных полей

В.М. Чернов [1,2]
[1] *ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,*
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,
[2] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,*
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе вводится новый класс (двумерных) дискретных ортогональных преобразований, определенных на решетках целых элементов квадратичных полей. Метод синтеза таких преобразований существенно использует специфику представления целых квадратичных элементов в так называемых квазиканонических системах счисления. В данной статье, представляющей результаты первой части исследований автора, рассматриваются дискретные ортогональные преобразования, связанные исключительно с бинарными системами счисления в квадратичных полях. Рассматриваются также вопросы синтеза быстрых алгоритмов введенных дискретных ортогональных преобразований и возможность их применения к анализу фрактальных (или самоподобных) объектов.

Ключевые слова: дискретные ортогональные преобразования, системы счисления, квадратичные поля, машинная арифметика.

Цитирование: **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования на решетках целых элементов квадратичных полей / В.М. Чернов // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 1. – С. 142-148. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-809.

Citation: Chernov VM. Discrete orthogonal transformations on lattices of integer elements of quadratic fields. Computer Optics 2021; 45(1): 142-148. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-809.

Введение

Как известно [1], при *статистическом* подходе к описанию сигналов оптимальным конечномерным базисом для представления отдельных реализаций сигналов обычно считается базис, при котором норма ошибки, усредненная по ансамблю реализаций, минимальна. В этом случае необходимые и достаточные условия минимума нормы ошибки представления сигнала в виде линейной комбинации базисных функций определяет теорема Карунена – Лоэва. Следующее из нее дискретное преобразование, во-первых, не обязано обладать быстрым алгоритмом вычисления, а во-вторых, даже в случае наличия для определенного класса сигналов быстрых алгоритмов вычисления оптимального (или близкого к нему преобразования (*обратная задача Карунена – Лоэва* [2])), упомянутая оптимальность, скорее всего, будет пониматься по отношению к некоторым усредненным, интегральным характеристикам класса обрабатываемых сигналов, что прямо следует из интегральной природы дискретных ортогональных преобразований (ДОП). Спектры преобразований, даже наиболее популярных в ЦОС (Фурье, косинусного и т.п.), «чувствительны» лишь к простейшим симметриям сигналов, соответствующим простейшим геометрическим преобразованиям двумерного пространства $\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$ или немногочисленным автоморфизмам поля $\mathbf{C}$.

1. Постановка задачи, основные идеи

Еще большее потенциальное разнообразие, к сожалению, плохо формализуемое на уровне связи «наблюдаемый объект – адекватное (оптимальное) ДОП», порождается равенствами работы [3]:

$$\begin{aligned}&\prod_{k=0}^{d-1} f(z^{m^k})=\sum_{n=0}^{m^p-1} a(n)z^n=\\&=(c_0+\ldots+c_{m-1}z^{m-1})\ldots\left(c_0+c_1z^{m^{d-1}}+\ldots+c_{m-1}z^{m^{d-1}(m-1)}\right).\end{aligned}\quad(1)$$

Пример 1. Рассмотрим при $m=2$, $c_0=c_1=1$ равенство (1) в форме

$$\prod_{k=0}^{d-1}\left(1+z^{2^k}\right)=\sum_{n=0}^{2^d-1} a(n)z^n. \quad(2)$$

Так как для чисел n рассматриваемого диапазона $0\le n\ge 2^d-1$ справедливы однозначные представления в двоичной системе счисления

$$n=n_0 2^0+\ldots+n_{d-1}2^{d-1},\quad n_k\in\{0,1\}, \quad(3)$$

то $a(n)=(+1)^{n_0}\times\ldots\times(+1)^{n_{d-1}}$, то есть $a(n)=1$ для всех $0\le n\ge 2^d-1$.

Полагая $z=\exp\{2\pi i 2^{-d}\}$, $2^d=N$, получаем последовательность степеней z^n в форме $z^0=1$, $z^1=\exp\{2\pi \mathrm{i} 2^{-d}\},\ldots$ и далее матрицу

$$\begin{pmatrix} z^{0\bullet 0} & \dots & z^{0\bullet(N-1)} \\ z^{1\bullet 0} & \dots & z^{1\bullet(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ z^{(N-1)\bullet 0} & \dots & z^{(N-1)\bullet(N-1)} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{2\pi i N^{-1}} & \dots & \mathrm{e}^{2\pi i (N-1) N^{-1}} \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \mathrm{e}^{2\pi i (N-1) N^{-1}} & \dots & \mathrm{e}^{2\pi i (N-1)^2 N^{-1}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

то есть матрицу обычного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) длины $N=2^d$ с базисными функциями $\Psi_m(n)=\exp\{2\pi inm 2^{-d}\}$.

$$\widehat{z}(m)=\sum_{n=o}^{N-1} z(n)\Psi_m(n). \quad (5)$$

Примечательно (и это будет учтено в дальнейшем при синтезе базисов новых дискретных ортогональных преобразований (ДОП)), что ортогональность базисных функций ДПФ в форме

$$\langle \Psi_m, \Psi_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \Psi_m(n)\overline{\Psi_k(n)} = N \bullet \delta(m,k)$$

легко следует из равенства (1).

Действительно, если при некотором $\delta\,(0 \le \delta < d)$ и нечетном ρ выполняется равенство $(m-k)=2^{\delta}\rho$, то при выбранном $z=\exp\{2\pi i 2^{-d}\}$ один из сомножителей произведения (1) обращается в нуль.

Пример 2. Следует также отметить, что с произведениями, аналогичными (1), и представлениями отсчетов входного сигнала в позиционной g - ичной системе счисления связана также и структура базисных функций ДПФ длины $N=g^d$ (например, для $g=3$ роль, аналогичную (1), играет равенство

$$\prod_{k=0}^{d-1}\left(1+z^{1\cdot 3^k}+z^{2\cdot 3^k}\right)=\sum_{n=0}^{3^d-1} a(n) z^n \quad (6)$$

и т.д. В работе [3] рассматриваются примеры и других ДОП, определенных на подмножествах целых рациональных чисел **Z**, порождаемых равенствами более общими, чем (1). Приложения подобных равенств рассматривались впервые в [4] вне связи с прикладными задачами цифровой обработки сигналов и далее в контексте возможности применения ассоциированных конструкций к анализу некоторых фрактальных объектов и были анонсированы в работах [5 – 6].

Пример 3. Рассмотрение преобразования, ассоциированного с равенством (6) (то есть с ДПФ длины $N=3^d$), даже при минимальном изменении множества показателей степеней на $1+z^{\nu_1 \cdot 3^k}+z^{\nu_2 \cdot 3^k}$ существенно изменит геометрические свойства области определения ДОП, а при $v^1=0$ или $v^2=0$ превратит эти область определения ДПФ в лакунарное множество («пыль Кантора», [7]).

Привлекательной и актуальной, но, скорее всего, полностью не решаемой в общем виде является экстраполяция подхода работы [3] на синтез ДОП, базисные функции которых определены не только на **Z**, но и на более общих алгебраических структурах, для элементов которых существуют системы счисления, причем такие, что основные алгоритмы операций в этих системах счисления «дружественны к компьютеру» с точки зрения программной и / или аппаратной реализации соответствующей машинной арифметики [8]. Например, заманчивым является перенесение подхода работы [3] на двумерный случай. По мнению автора, в подобном подходе могут заключаться некоторые новые возможности создания программно-аппаратных средств анализа изображений не только традиционно периодических моделей, но и изображений «самоподобной» или фрактальной структуры.

Потребность в таких методах анализа объектов самой различной природы достаточно высока. В частности, в работе [9] весьма убедительно показано, что «…природа наномасштабных изображений (НМИ) диктует необходимость модификации базовых операций и приводит к постановке новых задач анализа и распознавания изображений». С другой стороны, самоподобные или фрактальные процессы уже достаточно давно используются как модели, например, в экономике при анализе движения финансовых потоков и т.п.

В то же время первоначальный энтузиазм, вызванный появлением чисто теоретических работ, посвящённых фракталам – объектам, которые в классических учебниках математического анализа фигурировали лишь в качестве «патологических» контрпримеров к теоремам («ковёр Серпинского», «сапог Шварца» и т.п.), постепенно пошёл на убыль. Между тем, как уже было сказано выше, самоподобные, ветвящиеся структуры/объекты на изображениях достаточно типичны и естественны. Эта естественность может объективно определяться как спецификой предметной области, так и субъективным визуальным восприятием или моделью наблюдений. Именно такие структуры характерны, например, для наномасштабных изображений натурных образцов, для обработки которых приходится использовать традиционный, но всё же паллиативный математический аппарат цифрового спектрального анализа: дискретные спектральные методы, хорошо зарекомендовавшие себя при обработке и анализе изображений, ориентированы, прежде всего, на применение к изображениям, определённым на прямоугольных областях. Хотя исследователя очень часто интересуют спектральные характеристики объекта, а не «объекта на фоне». В частности, особое место занимают изображения, для которых особенности психофизиологического восприятия человеком порождают оптические иллюзии из-за наличия фона, формирующего в сознании неадекватную интерпретацию изображения. Между тем даже при наличии априорной информации именно о «ветвистом», «самоподобном» характере анализируемого объекта, его спектральная специфика может быть учтена только при предварительном «вырезании» этого объекта из малоинформативного (для анализа именно данного объекта) прямоугольного изображения с естественными для такого подхода искажениями спектральных характеристик.

Естественно, если ставить задачу разработки альтернативной («непрямоугольной», «самоподобной») версии дискретного спектрального анализа, то в первую очередь следует синтезировать новые двумерные ДОП, определенные на таких непрямоугольных областях и наследующие свойства, характерные для численных методов классического дискретного спектрального анализа, в частности, возможность синтеза быстрых алгоритмов их вычисления.

Примеры синтеза таких преобразований рассматривались, например, в работах [10], [11], где в качестве областей определения базисных функций преобразований рассматривались т.н. фундаментальные области канонических систем счисления квадратичных полей. Следует также подчеркнуть принципиальное отличие ДОП, синтезируемых в данной работе, от ДОП работ [10 – 11], в которых рассматривались по сути одномерные индексации как аргументов базисных функций ДОП, так и аргументов-номеров полученных спектральных компонент. В настоящей работе оба аргумента являются двумерными – элементами некоторого мнимого квадратичного поля.

2. Некоторые сведения о системах счисления в квадратичных полях

Пусть $\mathbf{Z}\left(\sqrt{D}\right)$ – кольцо целых элементов w мнимого (целое $D<0$ свободно от квадратов) квадратичного поля $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)=\left\{w=a+b\sqrt{D};\, a,b\in\mathbf{Q}\right\}$:

$$Norm(w)=Norm(a+b\sqrt{D})=a^2-Db^2\in\mathbf{Z},$$

$$Tr(w)=(a+b\sqrt{D})+(a-b\sqrt{D})=2a\in\mathbf{Z}.$$

Согласно [12], элемент $\alpha\in\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ *называется основанием канонической системы счисления* в $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$, если любой элемент z этого кольца представим в виде

$$z=\sum_{k=0}^{k(z))} z_k\alpha^k,\; z_k\in\Omega\subset\mathbf{Z}(\sqrt{D}). \tag{7}$$

Числа z_k называются *цифрами*, множество Ω – *цифровым алфавитом,* а пара (α,Ω) – *системой счисления* в кольце $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$.

Если $\Omega=\{0,1,\ldots|Norm(\alpha)|-1\}$, то система счисления называется *канонической системой счисления.* Исчерпывающее описание канонических систем счисления для мнимых квадратичных полей приведено в [12]. В [13] было предложено обобщение понятия канонической системы счисления, а именно: допускался цифровой алфавит Ω, являющийся конечным подмножеством множества $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$. Такие системы счисления, следуя [13], будем называть *квазиканоническими системами счисления*.

Из классификационных теорем работы [12] и [13] следует, что *бинарные канонические и квазиканонические* системы счисления существуют только в кольцах $\mathbf{Z}(i)$, $\mathbf{Z}(i\sqrt{2})$, $\mathbf{Z}(i\sqrt{7})$. Определить цифры z_k разложения (7) в канонической системе счисления можно, например, с помощью рекуррентных соотношений работы [14], а для квазиканонических систем – и с помощью стандартного алгоритма деления по норме на основании системы счисления [15] в случае возможности реализации такого алгоритма (то есть в случае евклидовости кольца целых именно для данного квадратичного поля). Такой алгоритм реализуем, как известно [15], лишь для пяти значений $D<0$, а именно: $D=-1,-2,-3,-7,-11$, то есть и для всех рассматриваемых колец.

3. Бинарные квазиканонические системы счисления в кольцах целых квадратичных чисел

Пусть $\mathbf{Z}(i\sqrt{D})$ – кольцо целых поля $\mathbf{Z}(i)$, $\mathbf{Z}(i\sqrt{2})$, $\mathbf{Z}(i\sqrt{7})$. Пусть $\Omega_D\subseteq\{0,-1,+1,-i,+i\}$ – возможный бинарный цифровой алфавит квазиканонической системы счисления с основанием α.

Табл.1. Возможные параметры бинарных систем счисления для рассматриваемых евклидовых колец

$\mathbf{Z}(i\sqrt{D})$	α	Возможные бинарные цифровые алфавиты Ω_D
$\mathbf{Z}(i)$	$\alpha=\pm1\pm i$	$\{0,+1\}$, $\{0,-1\}$, $\{0,+i\}$, $\{0,-i\}$
$\mathbf{Z}(i\sqrt{2})$	$\alpha=\pm i\sqrt{2}$	$\{0,+1\}$, $\{0,-1\}$
$\mathbf{Z}(i\sqrt{7})$	$\alpha=2^{-1}\left(\pm1\pm i\sqrt{7}\right)$	$\{0,+1\}$, $\{0,-1\}$

Несмотря на то, что евклидовость рассматриваемых колец $\mathbf{Z}\left(\sqrt{D}\right): D=-1,-2,-7$, а следовательно, и *существование* алгоритма деления с остатком по норме является известным теоретическим фактом, пользователю желательно иметь описание этого алгоритма в форме, приводящей, в конце концов, к получению представления (7).

Переобозначим для компактности последующих выкладок:

$$Norm(w)=Norm(a+b\sqrt{D})=$$
$$=\mathrm{Re}^2(w)-D\cdot\mathrm{Im}^2(z)\doteq\mathrm{N}\left(w\right).$$

Утверждение 1. Пусть $\alpha,w\in\mathbf{Z}(\sqrt{D});\mathrm{N}\left(\alpha\right)=2$, $\Omega_D=\{0,\varepsilon\}$ – соответствующий бинарный цифровой алфавит. Для всех $w=w_q\in\mathbf{Z}(\sqrt{D})$, за исключением элементов из некоторого конечного множества $\Delta=\Delta_{\alpha,\varepsilon,D}\subseteq\mathbf{Z}(\sqrt{D})$, справедливо одно из двух равенств:

$$\begin{aligned}&\text{или } w_q=\alpha w_{q+1} \text{ и } \mathrm{N}\left(w_q\right)=2\cdot\mathrm{N}\left(w_{q+1}\right),\\ &\qquad\text{где } w_{q+1}=\alpha^{-1}w_q,\end{aligned} \tag{8}$$

или

$$\begin{aligned} & w_q = \alpha w_{q+1} + \varepsilon, \text{ и } \mathrm{N}\left(w_q\right) > 2\cdot \mathrm{N}\left(w_{q+1}\right), \\ & \text{где } w_{q+1} = \alpha^{-1}\left(w_q - \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $2 < \mathrm{N}(w_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$. В силу мультипликативности нормы $\mathrm{N}(w)$ элемент $w_{q+1} = \alpha^{-1} w_q$ является целым и, следовательно, в этом случае справедливы соотношения (8).

Пусть теперь $2 < \mathrm{N}(w_q) \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$. Тогда

$$\begin{aligned} & w_q = \alpha w_{q+1} + \varepsilon, w_{q+1} = \alpha^{-1}\left(w_q - \varepsilon\right) \text{ и} \\ & \mathrm{N}\left(w_{q+1}\right) = 2^{-1}\cdot \mathrm{N}\left(w_q - \varepsilon\right), \\ & \Omega = \left\{0, \varepsilon\right\} = \left\{0, 1\right\}, D \in \left(-1, -2, -7\right). \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 1$, $w_q = x + y\sqrt{D}$ имеем:

$$\mathrm{N}\left(w_{q+1}\right) = \mathrm{N}\left(\alpha^{-1}\left(w_q - 1\right)\right) = \left\{\left(x-1\right)^2 - D\cdot y^2\right\}2^{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathrm{N}\left(w_q\right) - 2^{-1}\cdot \mathrm{N}\left(w_q - \varepsilon\right) = \\ & = \left(x^2 - D\cdot y^2\right) - \left\{\left(x-1\right)^2 - D\cdot y^2\right\}2^{-1} = \\ & = 2^{-1}\left(2\left(x^2 - D\cdot y^2\right) - \left(x-1\right)^2 - D\cdot y^2\right) = \\ & = 2^{-1}\left(\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - Dy^2\right) = \\ & = 2^{-1}\left(\left(x+1\right)^2 - 2 - Dy^2\right) = \\ & = 2^{-1}\left(\left(x+1\right)^2 - Dy^2\right) - 1 = 2^{-1}\mathrm{N}\left(w_q + 1\right) - 1. \end{aligned} \tag{10}$$

И выражение в правой части (10) положительно для всех w_q, кроме элементов исключительного множества

$$\Delta = \Delta_{\alpha,1,D} = \left\{w_q : \mathrm{N}\left(w_q + 1\right) \le 2\right\}.$$

И, более подробно, имеем для различных D:

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha,1,(-1)} = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \le 2\right\} = \\ = \left\{(0,0),(0,1),(0,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,-1)\right\} \cup \\ \cup \left\{(-2,0),(-2,1),(-2,-1)\right\} = \Delta_{\bar{\alpha},1,(-1)}; \\ \Delta_{\alpha,1,(-2)} = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + 2y^2 \le 2\right\} = \\ = \left\{(-1,1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(-2,0)\right\} = \Delta_{\bar{\alpha},1,(-2)}; \\ \Delta_{\alpha,1,(-7)} = \Delta_{\bar{\alpha},1,(-7)} = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + 7y^2 \le 2\right\} = \\ = \left\{(1,0),(-1,0),(0,0)\right\}. \end{cases} \tag{11}$$

Аналогично, при $\varepsilon = (-1)$, $w = x + y\sqrt{D}$ имеем:

$$\mathrm{N}\left(w_{q+1}\right) = \mathrm{N}\left(\alpha^{-1}\left(w_q + 1\right)\right) = \left\{\left(x+1\right)^2 - D\cdot y^2\right\}2^{-1}, \tag{12}$$

и выражение в правой части (10) положительно для всех w_q, кроме элементов исключительного множества

$$\Delta = \Delta_{\alpha,(-1),D} = \left\{w_q : \mathrm{N}\left(w_q - 1\right) \le 2\right\}.$$

Поэтому, как и ранее, имеем для различных D:

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha,(-1),(-1)} = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \le 2\right\} = \\ = \left\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(1,1),(1,-1)\right\} \cup \\ \cup \left\{(2,0),(2,1),(2,-1)\right\} = \Delta_{\bar{\alpha},(-1),(-1)}; \\ \Delta_{\alpha,(-1),(-2)} = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + 2y^2 \le 2\right\} = \\ = \left\{(-1,1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(-2,0)\right\} = \Delta_{\bar{\alpha},(-),(-2)}; \\ \Delta_{\alpha,(-1),(-7)} = \Delta_{\bar{\alpha},(-1),(-7)} = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + 7y^2 \le 2\right\} = \\ = \left\{\left(+1/2, \pm 1/2\right),(1,0),(-1,0),(0,0)\right\}. \end{cases} \tag{13}$$

Точно так же, если в случае целых Гауссовых чисел $\mathbf{Z}(\sqrt{-1})$ рассматриваются бинарные алфавиты $\Omega = \{0, +i\}$ или $\Omega = \{0, -i\}$, то

$$\mathrm{N}\left(w_{q+1}\right) = \mathrm{N}\left(\alpha^{-1}\left(w_q\,(\pm)i\right)\right) = \left\{\left(x\right)^2 + \left(y\,(\pm)1\right)^2\right\}2^{-1}$$

и далее

$$\begin{aligned} & \mathrm{N}\left(w_q\right) - 2^{-1}\cdot \mathrm{N}\left(w_q\left(\pm\right)1\right) = \\ & = 2^{-1}\left(2\left(x^2 + y^2\right) - \left(x\right)^2 - \left(y\left(\pm\right)1\right)^2\right) = \\ & = 2^{-1}\left(x^2 + \left(y \mp 1\right)^2 - 2\right) = 2^{-1}\left(x^2 + \left(y \mp 1\right)^2\right) - 1. \end{aligned}$$

Поэтому, так же как и в случаях $\varepsilon = \pm 1$, имеем для $D = -1$ в качестве исключительных множеств:

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\alpha,(+1),(-1)} = \left\{w : x^2 + \left(y-1\right)^2 \le 2\right\} = \\ & = \left\{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,2),(0,1)\right\} \cup \\ & \cup \{(0,0),(1,0),(1,1),(1,2) \\ & \Lambda_{\alpha,(-1),(-1)} = \left\{w : x^2 + \left(y+1\right)^2 \le 2\right\} = \\ & = \{(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(0,0),(0,-1)\} \cup \\ & \cup \left\{(0,0),(1,0),(1,1),(1,2)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

■

Замечание 1. Утверждение 1 неявно индуцирует построение последовательности с убывающими нормами неполных частных от деления по норме элементов колец $\mathbf{Z}(i), \mathbf{Z}(i\sqrt{2}), \mathbf{Z}(i\sqrt{7})$ на элемент α с условием $\mathrm{N}(\alpha) = 2$:

$$w = w_0 = \left(\alpha^{-1}\left(w_0 - \varepsilon_0\right)\alpha + \varepsilon_0\right) \mapsto w_1\alpha \mapsto w_1 \mapsto \ldots \mapsto w_s \ldots$$

Цепочка сгенерированных таким образом w_s продолжается до тех пор, пока

(а) либо $w_s = \alpha$ или $w_s = \varepsilon$ (и в этом случае искомое представление получено);

(б) либо w_s есть элемент исключительного множества, и тогда *монотонный* процесс Утверждения 1 прекращается.

Это не означает безусловной невозможности использования пары (Ω, α) в качестве бинарной системы счисления. В ряде случаев удается выразить элементы исключительного множества в виде линейной комбинации степеней α с коэффициентами из множества Ω. Чтобы не перегружать содержательную часть работы рутинными выкладками, ограничимся примером.

Пример 4. Пусть $\alpha=-1+i$, $\varepsilon=1$, $D=-1$. Тогда элементы исключительного множества

$$\Delta_{\alpha,1,(-1)}=\left\{(x,y):(x+1)^2+y^2\le 2\right\}=$$
$$=\left\{(0,0),(0,1),(0,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,-1)\right\}\cup$$
$$\cup\left\{(-2,0),(-2,1),(-2,-1)\right\}$$

можно представить в виде

$$(0,0)\leftrightarrow 0$$
$$(0,1)\leftrightarrow 1+(-1+i)=\varepsilon+\alpha$$
$$(0,-1)\leftrightarrow \varepsilon+\alpha+\alpha^2$$
$$(-1,0)\leftrightarrow \varepsilon+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$
$$(-1,1)\leftrightarrow \alpha$$
$$(-1,-1)\leftrightarrow \varepsilon\cdot\alpha+\alpha^2+\alpha^3$$
$$(-2,0)\leftrightarrow(-2i)(-i)=\alpha^2\cdot\left(\varepsilon+\alpha+\alpha^2\right)=$$
$$=(-2,1)\leftrightarrow\left(\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4\right)+\left(\varepsilon+\alpha\right)$$
$$(-2,-1)\leftrightarrow\left(\varepsilon\cdot\alpha+\alpha^2+\alpha^3\right)+\left(\varepsilon+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4\right),$$

что является дополнительными действиями для построения представления целого Гауссового числа в системе счисления при $\Omega=\{0,+1\}$, $\alpha=-1+i$, несмотря на то, что использование рассуждений *только* Утверждения 1 не позволяет получить такое представление для всех целых Гауссовых чисел.

Заметим, что подобная ситуация имеет место не для всех потенциально возможных пар (Ω,α). В частности, из результатов работы [12] следует, что параметры $\Omega=\{0,+1\}$, $\alpha=+1+i$ не являются параметрами канонической (следовательно, и квазиканонической) системы счисления в кольце $\mathbf{Z}\left(\sqrt{-1}\right)$.

4. Самоподобные дискретные ортогональные преобразования (СДОП)

Пусть элемент α является основанием (бинарной) квазиканонической системы счисления в $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ с двухэлементным цифровым алфавитом Ω; пусть $z\in\mathbf{C}$.

Рассмотрим равенство

$$\prod_{k=0}^{d-1}\left(1+\xi z^{m\varepsilon\alpha^k}\right)=\sum_{n=0}^{2^d-1}a(n)z^{mn},\qquad(15)$$

где ε – ненулевой элемент цифрового алфавита бинарной квазиканонической системы счисления кольца $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$; $\xi\in\mathbf{C}$, $|\xi|=1$. Тогда $a(n)=\xi^v$, где $v=v(n)$ – число ненулевых «цифр» в представлении числа n в системе счисления с основанием α.

Для множества

$$\Gamma_d=\left\{t\in\mathbf{Z}(\sqrt{D}):t=\tau_0\alpha^0+\ldots+\tau_{d-1}\alpha^{d-1};\ \tau_j\in\Omega\right\}$$

определим массив базисных функций $\left\{\Psi_m(n)\right\}_{m,n\in\Gamma_d}$ дискретного преобразования $\{y(n)\}\mapsto\{Y(m)\}$:

$$\Upsilon(m)=\sum_{n\in\Gamma_d}y(n)\Psi_m(n),\quad m\in\Gamma_d\qquad(16)$$

равенствами $\Psi_m(n)=a(n)z^{mn};\ m,n\in\Gamma_d$.

Утверждение 2. Для функций

$$\Psi_m(n)=a(n)z^{mn}=a(n)\exp\left\{2\pi i\sigma nm\alpha^{-d}\right\}=$$
$$=\xi^v\exp\left\{2\pi i\sigma nm\alpha^{-d}\right\}$$

при $\sigma=\alpha/2$ и при всех $m,k\in\Gamma_d$ выполняется условие ортогональности в форме

$$\left\langle\Psi_m,\Psi_k\right\rangle=\sum_{n=0}^{2^d-1}\Psi_m(n)\overline{\Psi_k(n)}=2^d\bullet\delta(m,k),$$

($\delta(m,k)$) – «дельта Кронекера») (т.е. преобразование является дискретным ортогональным преобразованием).

Далее дискретные преобразования (15), ортогональные в силу Утверждения 2, будем называть самоподобными дискретными ортогональными преобразованиями (СДОП).

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\left\langle\Psi_m,\Psi_k\right\rangle=\sum_{j=0}^{2^d-1}|a(n)|^2\Psi_m(n)\overline{\Psi_k(n)}=\sum_{n=0}^{2^d-1}\Psi_{m-k}(n)=$$
$$=\prod_{\tau=0}^{d-1}\left(1+\Psi_{m-k}\left(\alpha^\tau\right)\right)=\prod_{\tau=0}^{d-1}\left(1+\exp\left\{2\pi i\sigma\alpha^\tau(m-k)\alpha^{-d}\varepsilon\right\}\right).$$

Как уже отмечалось во Введении, ортогональность легко следует из (1) и вида функций $\Psi_m(n)$. Действительно, если при некотором $\delta\,(0\le\delta<d)$ и нечетном ρ выполняется равенство $(m-k)=2^\delta\rho$, то при выбранном z один из сомножителей произведения (1), а именно, сомножитель

$$\ldots\times\left(1+\exp\left\{2\pi i\sigma 2^{d-\delta-1}(m-k)\alpha^{-d}\right\}\right)\times\ldots$$

обращается в нуль. ■

5. Быстрые алгоритмы СДОП

Существенной особенностью рассмотренных ДОП является то, что для них можно синтезировать быстрые алгоритмы (БА) их вычисления, причем используя широко известные схемы таких алгоритмов.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример адаптаций «БПФ с прореживанием по времени» к рассмотренным СДОП.

Алгоритм «с прореживанием по времени»

Пусть $y(n)$ – входной сигнал,

$$\Gamma_d=\left\{t\in\mathbf{Z}(\sqrt{D}):t=\tau_0\alpha^0+\ldots+\tau_{d-1}\alpha^{d-1};\ \tau_j\in\Omega\right\}.$$

Пусть в соответствии с обозначениями Утверждения 2 базисные функции $\Psi_m(n)$ определены как

$$\Psi_m(n) = \xi^{v} \exp\left\{2\pi i \sigma n m \alpha^{-d}\right\},$$

где, как и выше, $\sigma = \alpha/2$, $v = v(n)$ – число ненулевых «цифр» в представлении числа n в системе счисления с параметрами (α, Ω), где $\Omega = \{0, \varepsilon \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}
\Upsilon(m) &= \sum_{n\in\Gamma_d} y(n)\Psi_m(n) = \\
&= \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n)\Psi_m(\alpha n) + \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n+\varepsilon)\Psi_m(\alpha n+\varepsilon) = \\
&= \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n)\Psi_m(\alpha n) + \\
&+\Psi_m(\varepsilon) \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n+\varepsilon)\Psi_m(\alpha n) = \\
&= \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n)\Psi_m(\alpha n) + \\
&+\xi^{v(\varepsilon)} \exp\left\{2\pi i \sigma \varepsilon m \alpha^{-d}\right\} \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n+\varepsilon)\Psi_m(\alpha n) = \\
&= \begin{cases}
\displaystyle\sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n)\Psi_m(\alpha n) + \\
\displaystyle +\left(\xi \exp\left\{\pi i \varepsilon m \alpha^{-d+1}\right\} \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n+\varepsilon)\Psi_m(\alpha n)\right) \\
\text{для } m = \mu \in \Gamma_{d-1}; \\
\\
\displaystyle\sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n)\Psi_m(\alpha n) + \\
\displaystyle +\exp\{\pi i\}\left(\xi \exp\left\{\pi i \varepsilon \mu \alpha^{-d+1}\right\} \sum_{n\in\Gamma_{d-1}} y(\alpha n+\varepsilon)\Psi_m(\alpha n)\right) \\
\text{для } m = \mu \in \Gamma_{d-1} + \varepsilon\alpha^{d-1}.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Последнее соотношение структурно аналогично базовому редукционному соотношению алгоритма Кули–Тьюки (БПФ) и также приводит к квазилинейным оценкам числа операций $M(N)$, необходимых для вычисления преобразования: $M(N) = O(N \cdot \log N)$.

Нетрудно показать также существование алгоритмов-аналогов быстрых алгоритмов классических ДОП [16–18], в частности алгоритма «с прореживанием по частоте» или алгоритма Гуда–Томаса для соответствующей модификации СДОП.

Заключение

Утверждения 1 и 2 данной работы определяют класс (двумерных) ДОП объема $M = 2^d$, включающий в себя, в частности, ДПФ, но не сводящийся к нему, а в перспективе (а именно, в общем небинарном случае) – достаточно широкий класс ДОП, включающий в себя класс ДПФ, но не сводящийся к нему и зависящий от варьируемых параметров:

- кольцо целых элементов $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ квадратичного поля $\mathrm{Q}(\sqrt{D})$;
- параметры системы счисления (основание α и алфавит цифр Ω;
- коэффициенты полинома f в равенстве (1) (в описанном частном случае в качестве коэффициентов рассматривались комплексные $1, \xi \in \mathbf{C}$).

Следует также отметить, что подход, разрабатываемый в данной работе, предполагает определенную «первичность» понятия «системы счисления», которая, как показано во Введении, индексируя входные и выходные данные, определяет и структуру базисных функций преобразования, и значения параметров, гарантирующих ортогональность преобразований, синтезируемых как обобщения преобразования (15) с учетом Примеров 1–3. Использование исключительно свойств именно систем счисления не является принципиальным. В реальности во многих случаях достаточно существования аддитивного базиса, т.е. такой фиксированной последовательности, что каждый индекс входного (и выходного) сигналов может быть выражен в виде суммы значений из последовательности, при этом каждое значение последовательности для фиксированного индекса можно использовать только один раз. Примеры таких базисов приводятся в [20], где, наряду с уже традиционными системами счисления, *n*-Фибоначчи рассматривается в качестве индексирующей последовательности *центральные многоугольные числа* $L(k)$ – максимальное число частей плоскости, которое можно получить её разбиением с помощью k прямых. (*Lazy caterer's sequence* – «последовательность ленивого поставщика»).

Как уже отмечалось выше, подход данной работы может быть как экстраполирован на случай систем счисления с другими основаниями, так и применен для синтеза дискретных ортогональных преобразований на дискретных множествах при наличии достаточно убедительной формальной аргументации в отношении «самоподобия», «рекуррентности» и т.п. [7].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части исследования систем счисления и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты РФФИ №19-07-00357 А № 18-29-03135_ мк) в части исследования машинной арифметики.

Литература

1. **Френкс, Л.** Теория сигналов / Л. Френкс; пер. с англ. – М.: Советское радио, 1974. – 399 с.
2. **Агаян, С.** Успехи и проблемы ортогональных преобразований (для обработки сигналов-изображений) / С. Агаян. – В кн.: Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение / под ред. Ю.И. Журавлева. – Вып. 3. – М.: Наука, 1990. – С. 246-215.
3. **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования с базисами, порожденными самоподобными после-

довательностями / В.М. Чернов // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 904-911. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-904-911.
4. **Чернов, В.М.** Об одном классе рядов Дирихле с конечными функциями Линделёфа / В.М. Чернов // Исследования по теории чисел: Межвузовский научный сборник. – 1982. – № 8. – С. 92-95.
5. **Chernov, V.M.** Some spectral properties of fractal curves / V.M. Chernov // Machine Graphics & Vision. – 1996. – Vol. 5, Nos. 1/2. – P. 413-422.
6. **Chernov, V.M.** Tauber theorems for Dirichlet series and fractals / V.M. Chernov // Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition. – 1996. – Vol. 2. – P. 656-661. – DOI: 10.1109/ICPR.1996.546905.
7. **Шредер, М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер; пер. с англ. – Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 528 с.
8. **Вариченко, Л.В.** Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов / Л.В. Вариченко, В.Г. Лабунец, М.А. Раков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 247 с.
9. **Сойфер, В.А.** Анализ и распознавание наномасштабных изображений: Традиционные подходы и новые постановки задач / В.А. Сойфер, А.В. Куприянов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 136-144.
10. **Kasparyan, M.** Discrete cosine transform on pre-fractal domains / M. Kasparyan, V. Chernov // Proceedings of 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2013). – 2013. –P. 431.
11. **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования на фундаментальных областях канонических систем счисления / В.М. Чернов, М.С. Каспарьян // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 4. – С. 484-488.
12. **Katai, I.** Canonical number systems in imaginary quadratic fields / I. Katai, B. Kovacs // Acta Mathematica Hungarica. – 1981. – Vol. 37. – P. 159-164.
13. **Богданов, П.С.** Классификация бинарных квазиканонических систем счисления в мнимых квадратичных полях / П.С. Богданов, В.М. Чернов // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 3. – С. 391-400.
14. **Thuswardner, J.** Elementary properties of canonical numder systems inquadratic fields / J. Thuswaldner. – In: Application of Fibonacci numbers / ed. by G.E. Bergum. – Vol. 7. – Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1998. – P. 405-414.
15. **Wang, R.** Introduction to orthogonal transforms: With applications in data processing and analysis / R. Wang. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
16. **Боревич, З.И.** Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
17. **Нуссбаумер, Г.** Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер; пер. с англ. – М.:Радио и связь, 1985. – 248 с.
18. **Блейхут, Р.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут; пер. с англ. – М: Мир, 1989. – 448 с.
19. **Чернов, В.М.** Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований / В.М. Чернов. – М.: Физматлит, 2007. – 264 с.
20. **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования на мультимножествах, ассоциированных с полными последовательностями / В.М. Чернов, М.А. Чичева // Труды Института Математики и Механики УРО РАН. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 249-257.

Сведения об авторе

Чернов Владимир Михайлович. Доктор физико-математических наук. Главный научный сотрудник лаборатории математических методов обработки изображений Института систем обработки изображений РАН (филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН); профессор кафедры геоинформатики и информационной безопасности Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Область научных интересов: алгебраические методы в цифровой обработке сигналов, криптография, машинная арифметика. E-mail: vche@smr.ru .

ГРНТИ:27.41.41 .
Поступила в редакцию 16 сентября 2020 г. Окончательный вариант – 28 сентября 2020 г.

Discrete orthogonal transforms on lattices of integer elements of quadratic fields

V.M.Chernov [1,2]

[1] *IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,*

[2] *Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

Abstract

In this paper, we introduce a new class of discrete orthogonal transforms (DOT) defined on lattices of integer elements of quadratic fields. The method of synthesis of such transforms essentially uses the specifics of the representation of integer quadratic elements in the so-called quasi-canonical number systems. This article, which presents the results of the first part of the author's research, deals exclusively with problems related to binary number systems in quadratic fields. We also consider the issues of synthesis of fast algorithms of the introduced and the possibility of their application to the analysis of fractal (or self-similar) objects. We also consider the issues of synthesis of fast algorithms of the introduced methods and the possibility of their application for the analysis of fractal (or self-similar) objects.

Keywords: discrete orthogonal transformations, number systems, quadratic fields, machine arithmetic.

Citation: Chernov VM. Discrete orthogonal transformations on lattices of integer elements of quadratic fields. Computer Optics 2021; 45(1): 142-148. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-809.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Federation Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the "Crystallography and Photonics" Research Center of the RAS under agreement 007-ГЗ/Ч3363/26 in part of «number systems» and by Russian Foundation for Basic Research (Grants 19-07-00357 A and 18-29-03135_ мк) in part of «machine arithmetic».

References

[1] Franks LE. Signal theory. Prentice-Hall Inc; 1969.

[2] Agayan S. Successes and problems of orthogonal transformations for signal-image processing. In Book: Zhuravlev YuI, ed. Pattern recognition. Classification. Forecasting. Mathematical tecniques and their application [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1990: 246-215.

[3] Chernov VM. Discrete orthogonal transforms with bases generated by self-similar sequences. Computer Optics 2018; 42(5): 904-911. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-904-911.

[4] Chernov VM. On a class of Dirichlet series with finite Lindelef functions. Research on Number Theory 1982; 8: 92-95

[5] Chernov VM. Some spectral properties of fractal curves. Mach Graph Vis 1996; 5(1/2): 413-422.

[6] Chernov VM. Tauber theorems for Dirichlet series and fractals. Proc 13th ICPR 1996; 2: 656-661. DOI: 10.1109/ICPR.1996.546905.

[7] Schroeder M. Fractal, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise. New York: WH Freeman&Co; 1991: 456.

[8] Varichenko LV, Labunets VG, Rakov MA. Abstract algebraic systems and digital signal processing [In Russian]. Kyiv: "Naukova Dumka" Publisher; 1986.

[9] Soifer VA, Kupriyanov AV. Analysis and recognition of the nanoscale images: conventional approach and novel problem statement. Computer Optics 2011; 35(2):136-144.

[10] Kasparyan M, Chernov V. Discrete cosine transform on pre-fractal domains. Proc 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2013) 2013: 431.

[11] Chernov VM, Kasparyan MS. Discrete orthogonal transforms on fundamental domains of canonical number systems. Computer Optics 2013; 37(4): 484-488.

[12] Katai I, Kovacs B. Canonical number systems in imaginary quadratic fields. Acta Mathematica Hungarica 1981; 37: 159-164.

[13] Bogdanov PS, Chernov VM. Classification of binary quasicanonical number systems in imaginary quadratic fields. Computer Optics 2013; 37(3): 391-400.

[14] Thuswardner J. Elementary properties of canonical numder systems inquadratic fields. In Book: Bergum GE, Philippou A, Horadam AF, eds. Application of Fibonacci numbers. Vol 7. Dordrecht: Springer Science+Business Media; 1998: 405-414.

[15] Wang R. Introduction to orthogonal transforms: With applications in data processing and analysis. Cambridge: Cambridge University Press; 2012.

[16] Borevich ZI, Shafarevich IR. Number theory. New York, London: Academic Press; 1966.

[17] Nussbaumer HJ. Fast Fourier transform and convolution algorithms. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1982.

[18] Blahut RE. Fast algorithms for digital signal processing. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company Inc; 1985.

[19] Chernov VM. Arithmetic methods of fast algorithm of discrete orthogonal transforms synthesis. Moscow: "Fizmathlit" Publisher; 2007.

[20] Chernov VM, Chicheva MA. Discrete orthogonal transforms on multisets associated with complete sequences. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN 2020; 26(3): P. 249-257.

Author's information

Vladimir Mikhailovich Chernov. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Chief researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS (Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS) and a professor of Geo-Information Science and Information Protection department at Samara National Research University (SSAU). Research interests are algebraic methods in digital signal processing, cryptography, computer arithmetic.

Received September 16, 2020. The final version – September 28, 2020.