

# ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

## Структурная устойчивость спиральных пучков и тонкая структура потока энергии

А.В. Воляр<sup>1</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>2</sup>, Е.В. Разуева<sup>2</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, Физико-технический институт, 295007, Россия, Республика Крым, Симферополь, проспект академика Вернадского, д. 4;

<sup>2</sup> Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук, 443011, Россия, Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

### Аннотация

Проблема структурной устойчивости волновых систем с многими степенями свободы непосредственно касается вопроса перераспределения потоков энергии в структурированных вихревых пучках, обеспечивающих их устойчивость при распространении и фокусировке. Особое место в этом многообразии занимают спиральные вихревые пучки, способные отображать сложные фигуры, буквы и даже слова. Спиральные пучки содержат бесконечное множество пучков Лагерра–Гаусса со строгой последовательностью топологических зарядов и радиальных чисел, их амплитуды и фазы жестко согласованы.

Используя сочетание теории и компьютерного моделирования, подкрепленное экспериментом, мы проанализировали структуру критических точек в потоках энергии для двух основных типов спиральных пучков: треугольные пучки с нулевым радиальным числом и треугольные пучки со сложным обрамлением их граней и с обоими квантовыми числами. Структурная устойчивость обеспечивается триадами критических точек, как внутри, так и во внешней области треугольника, которые направляют световой поток вдоль треугольной образующей и удерживают обрамление при вращении пучка. Эксперимент показал, что простой треугольный спиральный пучок оказывается устойчивым даже при небольших неточностях юстировки, тогда как сложный треугольный пучок с обрамлением требует тщательной юстировки.

**Ключевые слова:** оптические вихри, спиральные пучки, оптические потоки.

**Цитирование:** Воляр, А.В. Структурная устойчивость спиральных пучков и тонкая структура потока энергии / А.В. Воляр, Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева, Я.Е. Акимова, М.В. Брецько // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 4. – С. 482-489. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-885.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Razueva EV, Akimova YE, Bretsko MV. Structural stability of spiral beams and fine structure of an energy flow. Computer Optics 2021; 45(4): 482-489. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-885.

### Введение

Впервые структуры сингулярных пучков в виде упорядоченных комбинаций оптических вихрей, способных принимать форму отдельных геометрических фигур, букв и даже слов, были представлены еще в 1996 г. и названы *спиральными пучками* [1]. Они относятся к структурированным пучкам (tailoring beams [2]), которые являются объектом исследования сингулярной оптики на протяжении последних 30 лет [3–8]. Спиральные пучки находят применение в задачах создания энергетически эффективных дифракционных оптических элементов [9], манипуляций микрочастицами [10] и микроскопии сверхвысокого разрешения [11]. Особый интерес вызывает свойство спиральных пучков формировать ограниченные волновые структуры типа узлов и петель из света [12], а не из структурированной темноты [13].

Спиральные пучки являются решениями параксиального волнового уравнения [14, 15], а эволюция их

поперечного распределения интенсивности при распространении в свободном пространстве выглядит как поворот:

$$I(r, \varphi, z) = \frac{1}{1+z^2} I\left(\frac{r}{\sqrt{1+z^2}}, \varphi + \theta \arctg z, 0\right), \quad (1)$$

где  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  – цилиндрические координаты, продольная координата  $z$  измеряется в единицах длины Рэлея  $z_R$ , т.е.  $z \rightarrow z/z_R$ , а радиальная координата  $r$  нормирована на радиус перетяжки  $w_0$  Гауссова пучка, т.е.  $r \rightarrow r/w_0$ . Параметр вращения  $\theta$  задаёт полный угол поворота  $\theta\pi/2$  интенсивности от плоскости перетяжки до Фурье-плоскости, причём это вращение замедляется с ростом  $z$ . (Следует отметить, что в непараксиальном варианте возможно *равномерное* вращение интенсивности светового поля [16].) Траектории оптических вихрей в спиральном пучке лежат на поверхности однополостного гиперboloида вращения. При  $|\theta| = 1$  траектории оптических вихрей являются

прямыми линиями, а при  $|\theta| > 1$  оптические вихри двигаются в пространстве по спиральным линиям [15]. Спиральные пучки также являются структурно устойчивыми волновыми конструкциями с точностью до линейных масштабных преобразований. Чтобы подтвердить это, необходимо внимательно взглянуть в скрытую тонкую волновую структуру пучка. Такую возможность дают как прямой эксперимент, так и теоретический анализ критических точек потока энергии.

Целью нашей статьи является детальный теоретический и экспериментальный анализ быстровращающихся скалярных спиральных пучков с параметрами вращения  $\theta = -1$  и  $\theta = -3$ , а также анализ критических точек потоков энергии. Пучки с такими значениями параметров имеют относительно простое математическое представление, что значительно упрощает их описание и понимание физических процессов, протекающих при их распространении.

### Базисные и симметричные спиральные пучки

Известно [15], что если параметр вращения является нечётным отрицательным числом,  $\theta = -2N - 1$ , то условие (1) позволяет записать спиральный пучок в виде разложения по вполне определённым набору ортонормированных мод Лагерра-Гаусса (ЛГ):

$$F_{-2N-1}(\mathbf{r}, z) = \sum_{n \geq 0} A_{N,n} f_n \text{LG}_{Nn,n}(\mathbf{r}, z). \quad (2)$$

Здесь и далее значение параметра вращения  $\theta$  будет указываться как нижний индекс  $F$ ,  $r = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ,

$$\text{LG}_{p,\ell}(\mathbf{r}, z) = C_{p,\ell} \times \left( \frac{2-\sigma}{\sigma} \right)^p \cdot \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma}\right) \left( \frac{re^{i\varphi}}{\sigma} \right)^\ell L_p^\ell \left( \frac{2r^2}{|\sigma|^2} \right) -$$

стандартные нормированные ЛГ-моды,  $p$  и  $\ell$  – радиальный и азимутальный индексы (нас интересует только случай  $\ell \geq 0$ ),  $\sigma = 1 + iz$  – вспомогательный комплексный параметр, используемый для краткости,

$$C_{p,\ell} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^\ell \ell!}{(p+\ell)!}} -$$

нормировочные коэффициенты. Коэффициенты разложения пучка  $F_{-2N-1}(\mathbf{r}, z)$  записаны в виде произведения двух множителей. Первый множитель,  $A_{N,n}$ , зависит от параметра вращения. Для рассматриваемых в данной статье случаев  $N=0$  и  $N=1$

$$A_{N,n} = 2^{Nn} (Nn)! \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n!}{2^n (Nn+n)!}}.$$

Второй множитель,  $f_n$ , не зависит от  $N$  и определяет форму распределения интенсивности спирального пучка.

Благодаря условию сохранения интенсивности (1) при распространении спирального пучка, мы можем

рассматривать комплексную амплитуду пучка только в плоскости перетяжки,  $z=0$ , и не записывать  $z$  среди аргументов:

$$F_{-2N-1}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} A_{N,n} f_n \text{LG}_{Nn,n}(\mathbf{r}). \quad (2')$$

Простейшим спиральным пучком для случая  $N=0$  является смещённый Гауссов пучок с линейной фазой,

$$F_{-1}(\mathbf{r} | c) = \exp(-r^2 + 2c^* r e^{i\varphi} - cc^*) = \sum_{n \geq 0} A_{0,n} f_n(c) \text{LG}_{0,n}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $f_n(c) = \exp(-cc^*) (2c^*)^n / n!$  и  $c$  – комплексный параметр, определяющий величину и направление смещения (звёздочка означает комплексное сопряжение). При  $N > 0$  спиральным пучком, родственным (3), является смещённый псевдогауссов пучок,

$$F_{-2N-1}(\mathbf{r} | c) = \sum_{n \geq 0} A_{N,n} f_n(c) \text{LG}_{Nn,n}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

который имеет форму циклоидальной замкнутой линии [15].

Если спиральный пучок обладает радиальной симметрией, его ЛГ-представление (2') можно упростить, исключая нулевые члены. Например, для суперпозиции трёх псевдогауссовых пучков, смещённых в вершины правильного треугольника с центром на оптической оси,  $\{c_1 = iR, c_2 = iRe^{2\pi i/3}, c_3 = iRe^{-2\pi i/3}\}$ , получаем  $f_{3n}(\cdot, R) = \exp(-R^2) (-2iR)^{3n} / (3n)!$  и нулевые коэффициенты  $f_{3n+1}$  и  $f_{3n+2}$ . В результате спиральный пучок принимает вид

$$F_{-2N-1}(\mathbf{r} | \cdot, R) = \sum_{n \geq 0} A_{N,3n} f_{3n}(\cdot, R) \text{LG}_{3Nn,3n}(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Подобным свойством обладают и коэффициенты спирального пучка в форме плоской кривой. Известно [14], что для  $\theta = -1$  комплексная амплитуда спирального пучка, поперечное распределение интенсивности которого локализовано вблизи плоской кривой, имеет форму

$$F_{-1}(\mathbf{r} | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp(-r^2) \times \int_0^T \exp\{2\zeta^*(t) r e^{i\varphi} - |\zeta(t)|^2 + 4iS(t)\} |\zeta'(t)| dt. \quad (6)$$

Здесь  $\zeta(t)$  – комплексное параметрическое представление кривой на плоскости,  $\zeta'(t)$  – её производная и

$$4S(t) = 2 \int_0^t \text{Im} \{ \zeta^*(\tau) \zeta'(\tau) \} d\tau -$$

учетверённая площадь сектора, заматаемого радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , соединяющим начало координат с точкой  $\zeta(t)$ , при движении вдоль кривой.

Чтобы получить представление пучка (6) в виде разложения по ЛГ-модам, запишем экспоненциальный множитель, содержащий  $re^{i\varphi}$ , в виде ряда Тейлора и воспользуемся определением ЛГ-моды:

$$\begin{aligned} \exp(-r^2 + 2\zeta^*(t)re^{i\varphi}) &= e^{-r^2} \sum_{n \geq 0} \frac{\{2\zeta^*(t)re^{i\varphi}\}^n}{n!} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\{2\zeta^*(t)\}^n}{n!} A_{0,n} \text{LG}_{0,n}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7)$$

Как следствие, пучок (6) принимает вид

$$\begin{aligned} F_{-1}(\mathbf{r} | \zeta(t), t \in [0, T]) &= \sum_{n \geq 0} A_{0,n} f_n(\zeta) \text{LG}_{0,n}(\mathbf{r}), \\ f_n(\zeta) &= \frac{2^n}{n!} \int_0^T \exp\{-|\zeta(t)|^2 + 4iS(t)\} \zeta^{*n}(t) |\zeta'(t)| dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Если кривая  $\zeta(t)$  замкнута (контур), то поперечное распределение интенсивности пучка (8) имеет форму кривой только в том случае, если площадь внутри контура,  $S(T)$ , удовлетворяет условию квантования:

$$4S(T) = 2\pi j, j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Например, для окружности,  $\zeta(t) = O(t) = Re^{it}$ ,  $T = 2\pi$ , из условия квантования,  $4\pi R^2 = 2\pi j$ , находим радиус. Окружность принимает вид  $O_j(t) = \sqrt{j/2} e^{it}$ , соответствующий спиральный пучок оказывается ЛГ-модой,  $F_{-1}(\mathbf{r} | O_j) = \text{LG}_{0,j}(\mathbf{r})$ , поскольку только один коэффициент отличен от нуля:  $f_n(O_j) = \delta_{n,j}$ . Один ненулевой коэффициент позволяет легко записать и общий случай:  $F_{-2N-1}(\mathbf{r} | O_j) = \text{LG}_{N,j}(\mathbf{r})$ , опуская несущественный постоянный множитель  $A_{N,j}$ .

Рассмотрим теперь спиральный пучок для случая, когда замкнутая кривая  $\zeta(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , обладает радиальной симметрией, т.е. для некоторого целого  $M$  выполняется условие  $\zeta(t + 2\pi/M) = \zeta(t) e^{2\pi i/M}$ . Если кривая удовлетворяет условию квантования,  $4S(2\pi) = 2\pi j$ , то коэффициенты  $f_n(\zeta)$  отличны от нуля только тогда, когда  $(n-j)/M$  является целым числом. Кроме того, симметрия пучка приводит к симметричному расположению оптических вихрей. Все оптические вихри, за исключением находящегося в центре (если он там есть), расположены в вершинах одного или нескольких правильных  $M$ -угольников.

Рассмотрим, например, кривую в форме границы правильного треугольника:  $\mathbf{r}(t) = iRe^{it}(2 + (1/2)e^{-3it})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Тогда  $M = 3$ . Величину  $R$  находим из условия квантования:  $R = \sqrt{j/7}$ . Пусть для простоты  $j = 7$ . Тогда для спирального пучка  $F_{-1}(\mathbf{r} | \Delta_7)$  только коэффициенты  $f_1, f_4, f_7, \dots$  отличны от нуля. Упрощая (8) и отбрасывая несущественный постоянный множитель, который входит во все  $f_n$ , мы получаем

$$F_{-2N-1}(\mathbf{r} | r_7) = \sum_{n \geq 0} A_{N,3n+1} f_{3n+1}(r_7) \text{LG}_{N(3n+1),3n+1}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f_{3n+1}(r_7) &= \frac{(-i)^{3n+1}}{(3n+1)!} \int_0^{2\pi} \exp(-2 \cos t - \frac{2}{3}i \sin t) \times \\ &\times e^{i(2-n)t} (4 + e^{it})^{3n+1} \sqrt{5 - 4 \cos t} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Пучок (10) имеет 7 оптических вихрей внутри контура  $\Delta_7$ : один на оси пучка и шесть – в вершинах двух правильных треугольников.

### Тонкая структура оптических токов

Фазовая функция комбинации вихревых пучков даёт исчерпывающую информацию об их скрытых свойствах, в частности, об их структурной устойчивости не только относительно пространственного и углового сдвига, но также их отклика потоков энергии на различные внешние возмущения. Берри тщательно проанализировал структурированную ткань потоков вектора Пойнтинга в сложных векторных полях и назвал их оптическими токами (или линиями тока) [17]. Он подчеркнул, что оптические токи не следует путать с оптическими лучами в геометрической оптике: лучи света распространяются в однородной среде по прямой, в то время как оптические токи могут вычерчивать порой весьма причудливые траектории в окрестности критических точек. Также Берри обнаружил [18], что критические точки в потоке разделяются на два типа сингулярностей: оптические вихри, в окрестности которых линии тока близки к окружностям, и седла, где линии тока асимптотически близки к гиперболам. Заметим, что замысловатая картина оптических токов характерна не только для оптических процессов, а имеет топологическую природу и является неотъемлемой частью потоков воздуха и жидкости в аэро- и гидродинамике [19]. Возникает вопрос, могут ли особенности структуры особых точек указать на причины устойчивости (или неустойчивости) сложных спиральных пучков?

В качестве примера рассмотрим спиральный пучок треугольной формы  $F_{-1}(\mathbf{r} | \Delta_7)$ , получающийся из (10) при  $N=0$ . Линии тока направлены вдоль локального волнового вектора  $\mathbf{k}$  и описываются вектором оптического тока  $\mathbf{J}$  в виде [17]

$$\mathbf{J} = \text{Im}\{F^*(\mathbf{r})\partial_x F(\mathbf{r}), F^*(\mathbf{r})\partial_y F(\mathbf{r})\}, \quad (12)$$

т.е. вектором, пропорциональным усреднённому по времени вектору Пойнтинга (см. также [20]).

Компьютерное моделирование картины линий тока, рассчитанное на основе формул (10)–(12), представлено на рис. 1. Здесь, наряду с вполне ожидаемым течением линий тока, появляются совершенно новые черты. Так, типичное поведение линий тока в окрестности оптических вихрей на рис. 1а сочетается с неожиданным масштабным эффектом (характерным для фрактальных структур [19]), когда крупный узор критических точек повторяется в мелких элементах картины. Сетка сепаратрис разделяет линии тока на несколько характерных участков (рис. 1б–ж). Каждый участок содержит четверку критических точек с аналогичным узором линий тока, что и в центральной области. Но если главный центральный участок, содержащий три устойчивые критические точки типа

центр, охватывает симметричная сепаратриса, проходящая через три седла, то сепаратрисы внешние более мелких участков проходят только через одно седло и слегка деформированы. Представленная геометрия критических точек построена таким образом, что внешний поток вытесняется к центру, а внутренний поток наоборот – на периферию. В результате формируется правильный треугольник интенсивности света, который можно рассматривать как аналог каустики [21]. Так как спиральный пучок  $F_{-1}(\mathbf{r}|\Delta_7)$  соответствует случаю  $N=0$  в (10), мы можем изменить направление течения линий тока на противоположное простым переключением знака топологического заряда во всех модах спирального пучка.

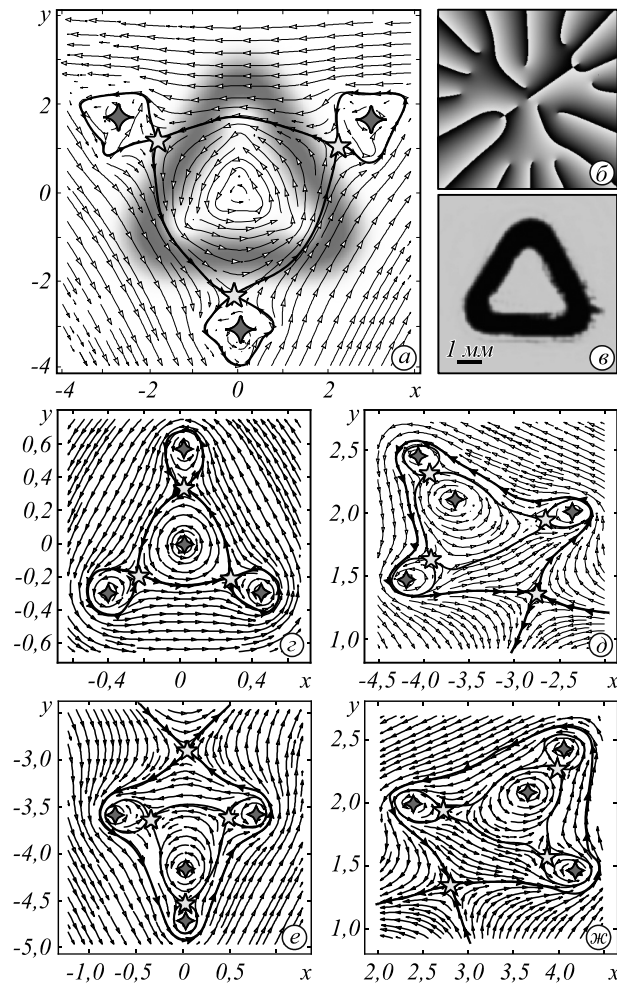


Рис. 1. Спиральный пучок  $F_{-1}(\mathbf{r}|\Delta_7)$ : (а) линии тока на фоне распределения интенсивности, (б) распределение фазы, (в) интенсивность (эксперимент) для  $z=0$ , линии тока во внутренней (д) и внешней (е-ж) области треугольника. Критические точки двух типов – центр  $\blacklozenge$  и седло  $\blackstar$ ; среди других линий сепаратриса выделяется толщиной

Теперь рассмотрим математический формализм описания линий тока для общего случая  $N \geq 0$  спиральных пучков в базисе ЛГ-мод. При дифференцировании полиномов Лагерра воспользуемся формулой (1.22.1.3) из [22]:  $\partial_x L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \partial_x F(\mathbf{r}) &= -2xF(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) - 4xV(\mathbf{r}), \\ \partial_y F(\mathbf{r}) &= -2yF(\mathbf{r}) + iU(\mathbf{r}) - 4yV(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \exp(-r^2) \sum_{n \geq 1} f_n n (x + iy)^{n-1} L_{Nn}^n(2r^2), \\ V(\mathbf{r}) &= \exp(-r^2) \sum_{n \geq 1} f_n (x + iy)^n L_{Nn-1}^{n+1}(2r^2) \end{aligned} \quad (14)$$

(для случая  $N=0$  функция  $V(\mathbf{r})$  тождественно равна нулю), и мы приходим к общему выражению для поперечной проекции линий тока спиральных пучков

$$\mathbf{J} = (\text{Im}\{F^*(U - 4xV), F^*(iU - 4yV)\}). \quad (15)$$

Линии тока на рис. 2 иллюстрируют устойчивую сингулярную структуру смещённого Гауссова пучка в исходной плоскости  $z=0$ . Группа оптических вихрей (справа от центра) задаёт сложный узор критических точек. Почти вся центральная темная область пучка на рис. 2а, плотно покрытая сетью связанных между собой «зубчатых» фазовых сингулярностей (рис. 2б), смещает яркое световое пятно на периферию.

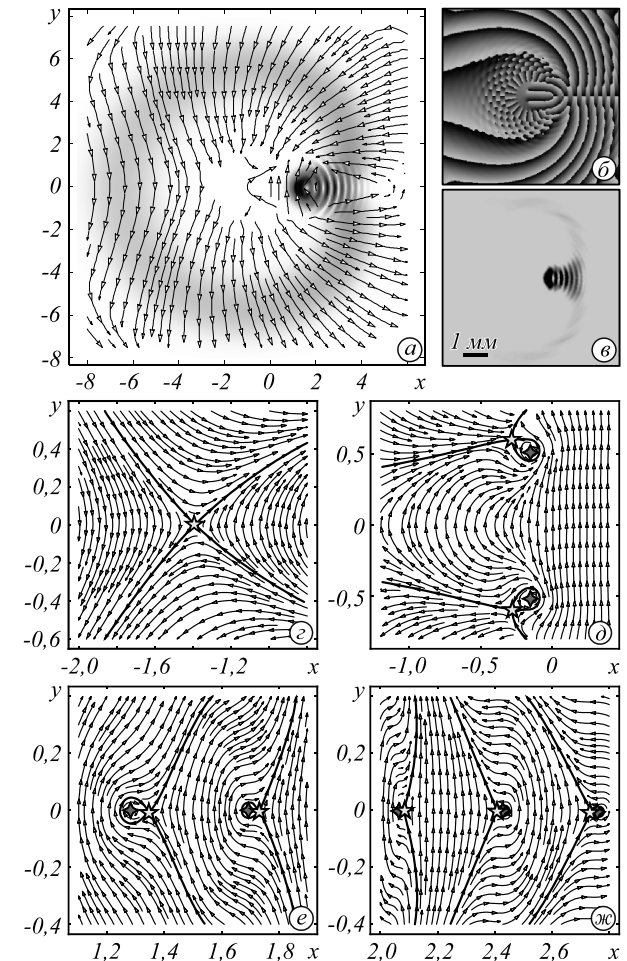


Рис. 2. Псевдогауссов пучок  $F_{-3}(\mathbf{r}|c=1,8)$ : (а) линии тока на фоне распределения интенсивности, (б) фаза спирального пучка, (в) интенсивность (эксперимент) для  $z=0$ , (г-ж) картины линий тока в отдельных фрагментах вдоль оси абсцисс. Критические точки те же, что и на рис. 1

Именно такой *смещенный пучок* и служит основой для построения сложных спиральных пучков (см. рис. 3). При распространении вдоль оси  $z$  вся картина линий тока поворачивается на угол  $3\pi/2$ . В наших численных экспериментах мы использовали формулы (4) и (5), заменяя ряды конечными суммами с  $0 \leq n \leq 30$  и  $0 \leq n \leq 6$  соответственно.

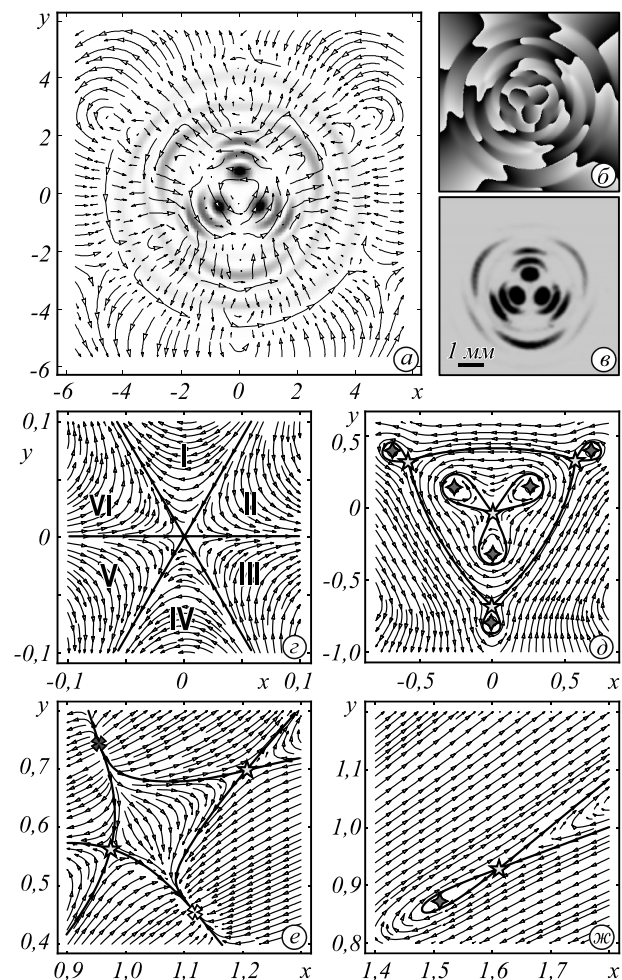


Рис. 3. Спиральный пучок  $F_{-3}(r) \dots, R=1, 6$ : (а) линии тока на фоне распределения интенсивности, (б) фаза спирального пучка, (в) интенсивность (эксперимент) для  $z = 0$ , (г-ж) картины линий тока в отдельных фрагментах первого квадранта. Кроме критических точек типа «центр» и «седло», появляются устойчивый узел  $\diamond$  и неустойчивый узел  $\blacklozenge$

**Эксперимент**

Экспериментальное решение проблемы пространственной эволюции спиральных пучков затрагивает два аспекта измерений. Волновая функция спиральных пучков содержит множество ЛГ-мод высших порядков с различными радиальными и азимутальными числами, поэтому SLM-модулятор и детекторы должны иметь достаточно большую разрешающую способность. Кроме того, полученные результаты должны позволить рассчитать орбитальный угловой момент (ОУМ), информационную энтропию (меру беспорядка, возникающую при распространении), то-

пологический заряд и возможность осуществлять соответствующую коррекцию возмущенного пучка.

Разрешающую способность экспериментальной установки мы оценим позже, а сейчас укажем, что всеми необходимыми требованиями к процессу измерений обладает метод моментов интенсивностей, подробно описанный в недавних статьях [23, 24].

Эскиз экспериментальной установки представлен на рис. 4. Гауссов пучок от He-Ne лазера (Thorlabs HNL100RB,  $\lambda=0,6328 \mu\text{m}$ ) после пространственного фильтра L1-L2, отражаясь от SLM-модулятора (Thorlabs EXULUS-4K1/M), превращался в спиральный пучок. Далее делительная призма BS расщепляла пучок на два оптических плеча. В первом плече спиральный пучок посредством сферической линзы L3 ( $f=15 \text{ см}$ ) проецировался на входное окно металл-оксид-полупроводникового детектора CMOS1 (Michrome 20). Детектор закреплялся на оптическом столике, снабженном 3D-микровинтами, осуществляющим продольный сдвиг с точностью 0,1 мм в области фокусировки пучка. После цифровой обработки данных вычислялись моменты интенсивности и спектр мод Лагерра-Гаусса (или Эрмита-Гаусса), которые выводились на экран монитора. Аналогичные операции осуществлялись во втором оптическом плече, где на входное окно CMOS2 детектора спиральный пучок проецировался с помощью цилиндрической линзы CL ( $f'=30 \text{ см}$ ). Эти дополнительные измерения позволяют измерять фазы мод в случае, когда в пучке содержатся ЛГ-моды как с положительным, так и с отрицательным топологическим зарядом. Разрешающая способность экспериментальной установки задается CMOS-детектором и SLM-модулятором с размером каждой ячейки порядка 4  $\mu\text{m}$ . Такая разрешающая способность позволяет воспроизводить и детектировать пучки, содержащие более 150 ЛГ мод (см. также [25]).

Спектры мод для различных типов спиральных пучков иллюстрирует рис. 5. Результаты эксперимента немного отличаются от предсказаний теории, но не более чем на 6 %, и попадают в интервал ошибки эксперимента. В реальном эксперименте мы измеряем как обычные, так и нормированные спектры амплитуд, что позволяет не только сравнивать с теорией, но также рассчитывать ОУМ, топологический заряд и другие параметры пучка.

Особое внимание мы уделили исследованию эволюции спиральных пучков высших порядков вдоль оси распространения  $z$ , которая позволяет оценить некоторые аспекты структурной устойчивости.

Наша экспериментальная установка может регистрировать картину интенсивности вдоль пучка в окрестности фокуса с точностью до 0,5 мм и рассчитывать преобразования линий тока и положения критических точек. Но при подготовке эксперимента особое внимание следует уделить качеству голографических решеток на рабочем элементе SLM-

модулятора (см. рис. 6). Если пучки не обладают осевой симметрией, то их интенсивность неравномерно распределена по площади голографической решетки. Поэтому важно аккуратно центрировать пучок на голограмме. Кроме того, дополнительное вращение передают локальные изгибы интерференционных полос на месте кольцевых дислокаций на рис. 6б, з. Всё это требует тонкой подстройки как направления лазерного излучения, падающего на голограмму, так и SLM-модулятора с помощью микровинтов.

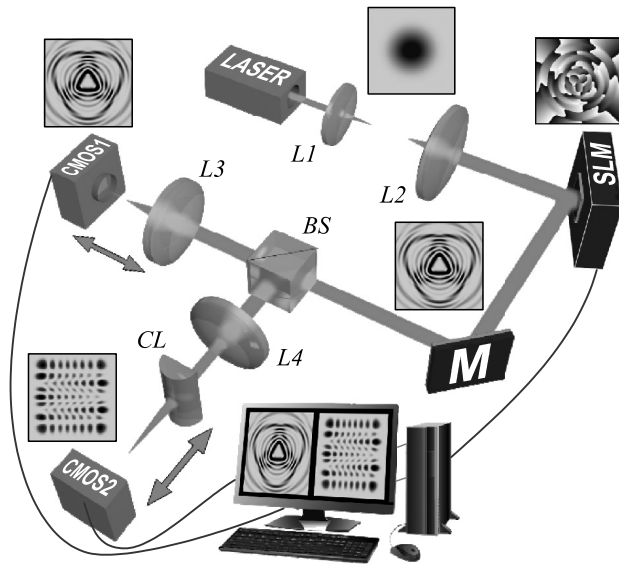


Рис. 4. Схема экспериментальной установки. LASER – He-Ne лазер, SLM – пространственный модулятор света, L1-L4 – сферические линзы, CL – цилиндрическая линза, BS – делительная призма, CMOS1, CMOS2 – детекторы, M – зеркало

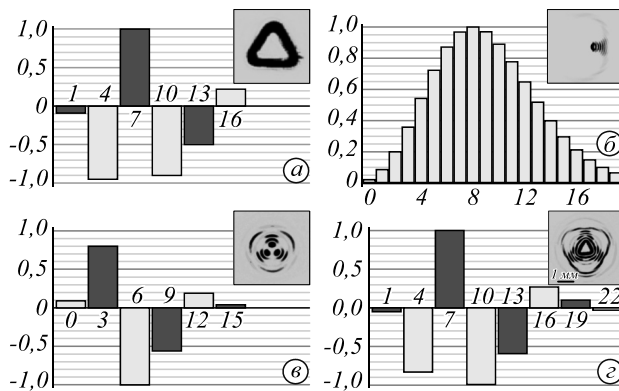


Рис. 5. Коэффициенты разложения  $A_{n,l}f_n$  спиральных пучков по базису ЛГ-мод в зависимости от  $n$ : (а) треугольный пучок  $F_{-3}(r|\Delta 7)$ , (б) смещенный псевдогауссов пучок  $F_{-3}(r|c=0,5)$ , (в) комбинация трёх смещенных псевдогауссовых пучков  $F_{-3}(r|.,R=1,6)$ , (г) треугольный пучок  $F_{-3}(r|\Delta 7)$ . Все коэффициенты вещественны или чисто мнимы (соответствующие столбцы закрашены светлым или тёмным цветом) и отмасштабированы по модулю максимума. В правом верхнем углу каждого кадра показано экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности для  $z=0$

Картины интенсивности на рис. 6 приведены для триплета смещенных псевдогауссовых пучков,  $F_{-3}(r|.,R=1,6)$ , и пучка  $F_{-3}(r|\Delta 7)$ . Более простая форма триплета псевдогауссовых пучков практически не разрушается при вращении (рис. 7а), но более сложная структура треугольного пучка (рис. 7б) испытывает искажения треугольного обрамления в виде появления спиральных рукавов в области длины Рэлея ( $z=1$ ) при сохранении формы центральной части пучка. Конечно, такое искажение можно объяснить неточностями юстировки оптической системы. Однако подобная частичная потеря структурной устойчивости при продольных смещениях характерна для сложных волновых конструкций. Поэтому прежде чем перейти к детальному исследованию проблемы структурной устойчивости, мы решили дать простое феноменологическое объяснение этому процессу.

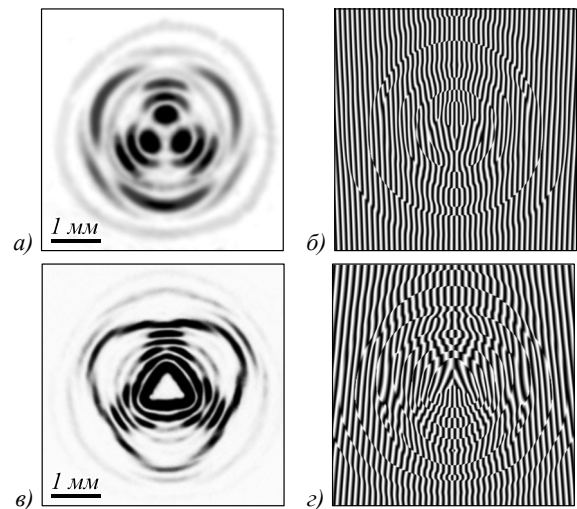


Рис. 6. Экспериментальные распределения интенсивности для  $z=0$  (а, в) и дифракционные решетки (б, г) для пучков  $F_{-3}(r|.,R=1,6)$  и  $F_{-3}(r|\Delta 7)$

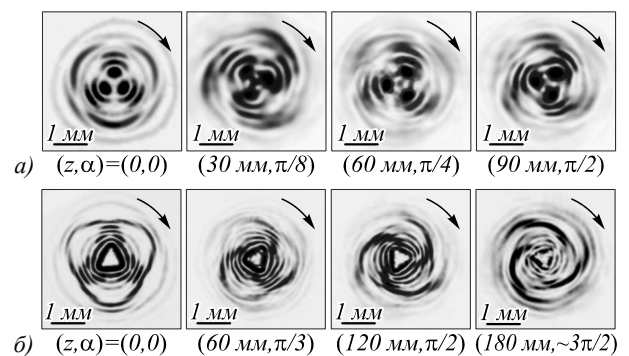


Рис. 7. Эволюция быстро вращающихся спиральных пучков при распространении вдоль оси  $z$  (мм), угол поворота распределения интенсивности обозначен  $\alpha$ : (а)  $F_{-3}(r|.,R=1,6)$  и (б)  $F_{-3}(r|\Delta 7)$

Хорошо известно [26], что ЛГ-пучки с комплексным аргументом быстро теряют свою исходную форму при распространении. Обобщенная форма ЛГ-пучков, зависящая от параметра  $a$ , который может быть комплексным, была предложена в работе [27]:

$$gLG_{p,\ell}(\mathbf{r}, z | a) = C_{p,\ell}(a) \times \left( \frac{1-a\sigma}{(1-a)\sigma} \right)^p \cdot \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma}\right) \left( \frac{re^{i\varphi}}{\sigma} \right)^\ell L_p^\ell\left(\frac{r^2}{\sigma(1-a\sigma)}\right)$$

(при  $a = 1/2$  получаются стандартные ЛГ-моды).

Наш предварительный анализ показал, что использование таких ЛГ-пучков в формуле (2) дает появление спиральных рукавов в пучке  $F_{-3}(\mathbf{r} | \Delta_7)$ , при этом сохраняя внутренний треугольник. Поэтому мы предложили модель, осуществив в (2) замену

$$LG_{p,\ell}(\mathbf{r}, z) \rightarrow gLG_{p,\ell}(\mathbf{r}, z | \frac{1}{2} + \varepsilon)$$

(очевидно, что ряд (2) после такой замены удовлетворяет параксиальному уравнению). Для построения было выбрано значение  $\varepsilon = 0,04$ , при котором эксперимент хорошо согласуется с моделью (см. рис. 8). В области длины Рэлея ( $z = 60$  мм) возникает разрушение треугольного обрамления, которое развивается, образуя три спиральных рукава. Однако феноменологическая модель не связывает параметр  $\varepsilon$  с конкретными возмущениями пучка на эксперименте, но только намечает направление дальнейших исследований проблемы структурной устойчивости спиральных пучков.

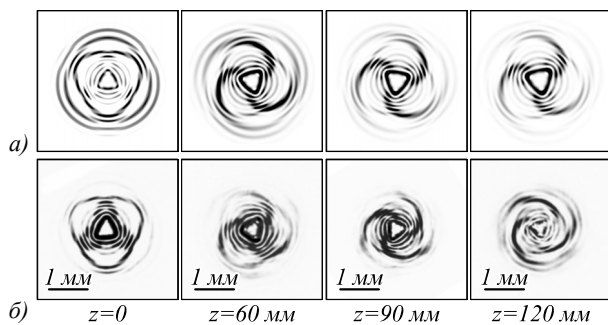


Рис. 8. Сравнение экспериментальных распределений интенсивности (б) с теоретической моделью (а),  $\varepsilon = 0,04$

### Заключение

Мы показали, что структура спиральных пучков поддерживается комплексным распределением потоков с характерным расположением пар точек «центр – седло» и триад «стабильный узел – седло – нестабильный узел», связанных сетью сепаратрис, что определяет характерную форму пучка. Численные эксперименты показали, что огибающие линий потока треугольных спиральных пучков также имеют треугольную форму, что доказывает каустическую природу максимумов интенсивности спиральных пучков. Мы экспериментально зафиксировали вращение при распространении спиральных пучков с разными параметрами поворота, но в тексте мы зафиксировали только поведение наиболее характерных пучков: линейную композицию трёх псевдогауссовых пучков и треугольного пучка. Мы обнаружили, что критические точки суммы трёх псевдогауссовых пучков следуют за распределением интенсивности и сохраняют их структурную устойчивость при распро-

странении. Абсолютно другой сценарий реализуется для треугольных пучков. Если при распространении пучка на расстояние длины Рэлея форма пучка сохраняется, то при дальнейшем распространении внешний треугольник разрушается и превращается в спираль, тогда как внутренний треугольник поворачивается на угол  $3\pi/2$  без потери формы.

Мы рассмотрели простую теоретическую модель устойчивости формы пучка, добавляя небольшое возмущение в полином Лагерра. Численное моделирование показало хорошее согласие между теорией и экспериментом. Мы считаем, что небольшие отклонения от формы комплексной амплитуды спиральных пучков объясняются погрешностями при реализации голографической решётки SLM-модулятора. Однако это предположение требует более глубокого теоретического и экспериментального исследования.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Совета министров Республики Крым (проекты № 20-47-910002 в части «Теоретические результаты», № 20-37-90066, № 19-29-01233 в части «Методы измерения спектра оптических вихрей», № 20-37-90068 в части «Экспериментальные результаты»).

### Литература

1. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1996. – Vol. 125. – P. 302-323. – DOI: 10.1364/OPN.31.6.000024.
2. **Forbes, A.** Structured light tailored for purpose / A. Forbes // Optics & Photonics News. – 2020. – Vol. 6. – P. 24-31. – DOI: 10.1364/OPN.31.6.000024.
3. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1974. – Vol. 336. – P. 165-190. – DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
4. **Baranova, N.B.** Wave-front dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation / N.B. Baranova, A.Y. Mamaev, N.F. Pilipetsky, V.V. Shkunov, B.Ya. Zel'dovich // Journal of Optical Society of America. – 1983. – Vol. 73, Issue 5. – P. 525-528. – DOI: 10.1364/JOSA.73.000525.
5. **Баженов, В.Ю.** Лазерные пучки с винтовыми дислокациями волнового фронта / В.Ю. Баженов, М.В. Васнецов, М.С. Соскин // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 52. – С. 1037-1039.
6. **Soskin, M.S.** Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Progress in Optics. – 2001. – Vol. 42. – P. 219-276.
7. **Rubinsztein-Dunlop, H.** Roadmap on structured light / H. Rubinsztein-Dunlop, A. Forbes, M.V. Berry, M.R. Dennis, D.L. Andrews, M. Mansuripur, C. Denz, C. Alpmann, P. Banzer, T. Bauer, E. Karimi, L. Marrucci, M. Padgett, M. Ritsch-Martel, N.M. Litchinitser, N.P. Bigelow, C. Rosales-Guzmán, A. Belmonte, J.P. Torres, T.W. Neely, M. Baker, R. Gordon, A.B. Stilgoe, J. Romero, A.G. White, R. Fickler, A.E. Willner, G. Xie, B. McMorrin, A.M. Weiner. // Journal of Optics. – 2017. – Vol. 19. – 013001. – DOI: 10.1088/2040-8978/19/1/013001.
8. **Shen, Y.** Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities / Y. Shen,

- X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – 90. – DOI: 10.1038/s41377-019-0194-2.
9. **Abramochkin, E.G.** Application of spiral laser beams for beam shaping problem / E.G. Abramochkin, E.V. Razuева, V.G. Volostnikov // *Current Research in Optics and Photonics: Selected Papers from the International Conference on Advanced Optoelectronics & Lasers (LFNM-2005)*. – 2006. – Vol. 6. – P. 275-278. DOI: 10.1109/LFNM.2006.252042.
  10. **Afanasiev, K.N.** Vortical laser tweezers with predetermined intensity structure / K.N. Afanasiev, E.G. Abramochkin, A.V. Korobtsov, S.P. Kotova, N.N. Losevsky, E.V. Razuева, V.G. Volostnikov // *Proceedings of SPIE*. – 2007. – Vol. 6644. – 664410. – DOI: 10.1117/12.733864.
  11. **Grover, G.** Real-time adaptive drift correction for super-resolution localization microscopy / G. Grover, W. Mohrman, R. Piestun // *Optics Express*. – 2015. – Vol. 23. – P. 23887-23898.
  12. **Rodrigo, J.A.** Shaping of light beams along curves in three dimensions / J.A. Rodrigo, T. Alieva, E. Abramochkin, I. Castro // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21. – P. 20544-20555. – DOI: 10.1364/OE.21.020544.
  13. **Dennis, M.R.** Isolated optical vortex knots / M.R. Dennis, R.P. King, B. Jack, K. O'Holleran, M.J. Padgett // *Nature Physics*. – 2010. – Vol. 6. – P. 118-121. – DOI: 10.1038/nphys1504.
  14. **Абрамочкин Е.Г.** Спиральные пучки света / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников // *Успехи физических наук*. – 2004. – Т. 47, № 12. – P. 1273-1300. – DOI: 10.3367/UFNr.0174.200412a.1273.
  15. **Razuева, E.** Multiple-twisted spiral beams / E. Razuева, E. Abramochkin // *Journal of Optical Society of America A*. – 2019. – Vol. 36, Issue 6. – P. 1089-1097. – DOI: 10.1364/JOSAA.36.001089.
  16. **Pääkkönen P.** Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics / P. Pääkkönen, J. Lautanen, M. Honkanen, M. Kuittinen, J. Turunen, S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, A.T. Friberg // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45, Issue 11. – P. 2355-2369. – DOI: 10.1080/09500349808231245.
  17. **Berry, M.V.** Optical currents / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2009. – Vol. 11. – 094001. – DOI: 10.1088/1464-4258/11/9/094001.
  18. **Berry, M.V.** Curvature of wave streamlines / M.V. Berry // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2013. – Vol. 46. – 395202. – DOI: 10.1088/1751-8113/46/39/395202.
  19. **Арнольд, В.И.** Топологические методы в гидродинамике / В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. – М.: МЦНМО, 2007.
  20. **Berry, M.V.** Stream function for optical energy flow / M.V. Berry, M.R. Dennis // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13. – 064004. – DOI: 10.1088/2040-8978/13/6/064004.
  21. **Постон Т.** Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, Й. Стюарт. – М.: Мир, 1980.
  22. **Брычков, Ю.А.** Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы / Ю.А. Брычков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – ISBN: 5-9221-0705-4.
  23. **Volyar, A.** Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 2. – P. 5635-5638. – DOI: 10.1364/OL.43.005635.
  24. **Volyar, A.** Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Applied Optics*. – 2019. – Vol. 58. – P. 5748-5755. – DOI: 10.1364/AO.58.005748.
  25. **Volyar, A.** Fine structure of perturbed Laguerre-Gaussian beams: Hermite-Gaussian mode spectra and topological charge / A. Volyar, E. Abramochkin, Yu. Egorov, M. Bretsko, Ya. Akimova // *Applied Optics*. – 2020. – Vol. 59. – P. 7680-7687. – DOI: 10.1364/AO.396557.
  26. **Siegman, A.E.** Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical beam eigenfunctions / A.E. Siegman // *Journal of Optical Society of America*. – 1973. – Vol. 63, Issue 9. – P. 1093-1094. – DOI: 10.1364/JOSA.63.001093.
  27. **Wünsche A.** Generalized Gaussian beam solutions of paraxial optics and their connection to a hidden symmetry / A. Wünsche // *Journal of Optical Society of America A*. – 1989. – Vol. 6, Issue 9. – P. 1320-1329. – DOI: 10.1364/JOSAA.6.001320.

### Сведения об авторах

**Воляр Александр Владимирович** – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Абрамочкин Евгений Григорьевич** – доктор физико-математических наук (2006), ведущий научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Разуева Евгения Вадимовна** – кандидат физико-математических наук (2015), старший научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Область научных интересов: структурно устойчивые световые поля и решения паракиального уравнения. E-mail: [dev@fian.smr.ru](mailto:dev@fian.smr.ru).

**Акимова Яна Евгеньевна** – аспирант третьего курса кафедры общей физики Физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Брещко Михаил Владимирович** – аспирант третьего курса кафедры общей физики Физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 2 марта 2021 г. Окончательный вариант – 12 апреля 2021 г.



## Structural stability of spiral beams and fine structure of an energy flow

A.V. Volyar<sup>1</sup>, E.G. Abramochkin<sup>2</sup>, E.V. Razueva<sup>2</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Physics and Technology Institute (Academic Unit) of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Academician Vernadsky 4, Simferopol, Republic of Crimea, 295007, Russia;

<sup>2</sup>Lebedev Physical Institute, Novo-Sadovaya 221, Samara, 443034, Russia

### Abstract

The problem of structural stability of wave systems with great numbers of degrees of freedom directly concerns the issue of redistribution of energy fluxes in structured vortex beams that ensure their stability under propagating and focusing. A special place in this variety is occupied by spiral vortex beams capable of mapping complex figures, letters and even words. Spiral beams contain an infinite set of Laguerre-Gauss beams with a strong sequence of topological charges and radial numbers, their amplitudes and phases are tightly matched. Therefore, the problem of structural stability plays a special role for their applications.

Using a combination of theory and computer simulation, supported by experiment, we analyzed the structure of critical points in energy flows for two main types of spiral beams: triangular beams with zero radial number and triangular beams with complex framing of their faces with both quantum numbers. Structural stability is provided by triads of critical points, both inside and outside the triangle, which direct the light flux along the triangular generatrix and hold the framing when rotating the beam. The experiment showed that a simple triangular spiral beam turns out to be stable even with small alignment inaccuracies, whereas a complex triangular beam with a framing requires careful alignment.

**Keywords:** optical vortices, twisting paraxial beams, optical currents.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Razueva EV, Akimova YaE, Bretsko MV. Structural stability of spiral beams and fine structure of an energy flow. *Computer Optics* 2021; 45(4): 482-489. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-885.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Ministry Council of the Republic of Crimea under project No. 20-47-910002 (Section "Basic and symmetrical spiral beams"), project No. 20-37-90066 (Section "Fine structure of optical currents"), and projects Nos. 20-37-90068 and 19-29-01233 (Section "Experiment").

### References

- [1] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt Commun* 1996; 125: 302-323. DOI: 10.1364/OPN.31.6.000024.
- [2] Forbes A. Structured light tailored for purpose. *Opt Photon News* 2020; 6: 24-31. DOI: 10.1364/OPN.31.6.000024.
- [3] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proc R Soc Lond A* 1974; 336: 165-190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
- [4] Baranova NB, Mamaev AY, Pilipetsky NF, Shkunov VV, Zel'dovich BYa. Wave-front dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation. *J Opt Soc Am* 1983; 73(5): 525-528. DOI: 10.1364/JOSA.73.000525.
- [5] Bazhenov VYu, Vasnetsov MV, Soskin MS. Laser beams with screw dislocations in their wavefronts. *JETP Lett* 1990; 52: 429-431.
- [6] Soskin MS, Vasnetsov MV. Singular optics. *Prog Opt* 2001; 42: 219-276.
- [7] Rubinsztein-Dunlop H, Forbes A, Berry MV, Dennis MR, Andrews DL, Mansuripur M, Denz C, Alpmann C, Banzer P, Bauer T, Karimi E, Marrucci L, Padgett M, Ritsch-Marte M, Litchinitser NM, Bigelow NP, Rosales-Guzmán C, Belmonte A, Torres JP, Neely TW, Baker M, Gordon R, Stilgoe AB, Romero J, White AG, Fickler R, Willner AE, Xie G, McMorran B, Weiner AM. Roadmap on structured light. *J Opt* 2017; 19: 013001. DOI: 10.1088/2040-8978/19/1/013001.
- [8] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light: Science & Appl* 2019; 8: 90. DOI: 10.1038/s41377-019-0194-2.
- [9] Abramochkin EG, Razueva EV, Volostnikov VG. Application of spiral laser beams for beam shaping problem. *Current Research in Optics and Photonics: Selected Papers from Int Conf Adv Optoelectronics & Lasers 2006*; 6: 275-278. DOI: 10.1109/LFNM.2006.252042.
- [10] Afanasiev KN, Abramochkin EG, Korobtsov AV, Kotova SP, Losevsky NN, Razueva EV, Volostnikov VG. Vortical laser tweezers with predetermined intensity structure. *Proc SPIE* 2007; 6644: 664410. DOI: 10.1117/12.733864.
- [11] Grover G, Mohrman W, Piestun R. Real-time adaptive drift correction for superresolution localization microscopy. *Opt Express* 2015; 23: 23887-23898.
- [12] Rodrigo JA, Alieva T, Abramochkin E, Castro I. Shaping of light beams along curves in three dimensions. *Opt Express* 2013; 21: 20544-20555. DOI: 10.1364/OE.21.020544.
- [13] Dennis MR, King RP, Jack B, O'Holleran K, Padgett MJ. Isolated optical vortex knots. *Nat Phys* 2010; 6: 118-121. DOI: 10.1038/nphys1504.
- [14] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral light beams. *Physics–Uspekhi* 2004; 47(12): 1177-1203. DOI: 10.1070/PU2004v047n12ABEH001802.
- [15] Razueva E, Abramochkin E. Multiple-twisted spiral beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(6): 1089-1097. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001089.

- 
- [16] Pääkkönen P, Lautanen J, Honkanen M, Kuittinen M, Turunen J, Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Friberg AT. Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics. *J Mod Opt* 1998; 45(11): 2355-2369. DOI: 10.1080/09500349808231245.
- [17] Berry MV. Optical currents. *J Opt A-Pure Appl Opt* 2009; 11: 094001. DOI: 10.1088/1464-4258/11/9/094001.
- [18] Berry MV. Curvature of wave streamlines. *J Phys A Math Theor* 2013, 46: 395202.
- [19] Arnold VI, Khesin BA. Topological methods in hydrodynamics. New York: Springer; 1998.
- [20] Berry MV, Dennis MR. Stream function for optical energy flow. *J Opt* 2011; 13: 064004. DOI: 10.1088/2040-8978/13/6/064004.
- [21] Poston T, Stewart I. Catastrophe theory and its applications. London: Pitman; 1978.
- [22] Brychkov YuA. Handbook of special functions: derivatives, integrals, series and other formulas. Boca Raton FL: CRC Press; 2008.
- [23] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
- [24] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens. *Appl Opt* 2019; 58: 5748-5755. DOI: 10.1364/AO.58.005748.
- [25] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Fine structure of perturbed Laguerre-Gaussian beams: Hermite-Gaussian mode spectra and topological charge. *Appl Opt* 2020; 59(25): 7680-7687. DOI: 10.1364/AO.396557.
- [26] Siegman AE. Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical beam eigenfunctions. *J Opt Soc Am* 1973; 63(9): 1093-1094. DOI: 10.1364/JOSA.63.001093.
- [27] Wünsche A. Generalized Gaussian beam solutions of paraxial optics and their connection to a hidden symmetry. *J Opt Soc Am A* 1989; 6(9): 1320-1329. DOI: 10.1364/JOSAA.6.001320.
- 

#### *Authors' information*

**Alexander Vladimirovich Volyar** (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962) graduated from Kuibyshev State University (1984), majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor's Degree in Physics in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests include complex analysis, special functions, and mathematical physics equations. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Evgeniya Vadimovna Razueva** (b. 1978), graduated (2000) from Samara State University. She received her Candidate's Degree in Physics in 2016. She is a senior researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. Her current research interests are structurally stable light fields and the paraxial equation solutions. E-mail: [dev@fian.smr.ru](mailto:dev@fian.smr.ru).

**Yana Evgenievna Akimova** (b. 1994). Since 2012, a student of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the third-year postgraduate student of the General Physics department, Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Scope of scientific interests – singular optics, diffraction optics. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** (b. 1994). Since 2012, a student of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the third-year postgraduate student of the General Physics department, Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Scope of scientific interests – singular optics, processing of graphic images, and programming. E-mail: [mikhailbretcko4@gmail.com](mailto:mikhailbretcko4@gmail.com).

---

*Received March 2, 2021. The final version – April 12, 2021.*

---