

Оптические пучки с бесконечным числом вихрей

В.В. Котляр^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

При передаче данных с помощью вихревых лазерных пучков носителем информации может являться топологический заряд, теоретическое значение которого не ограничено. Однако, топологический заряд одного отдельного вихря ограничен возможностями его формирования. Поэтому в данной работе проанализированы пучки с неограниченным (счётным) множеством оптических вихрей. Суммарный топологический заряд таких пучков бесконечен. Центры сингулярности фазы (изолированные нули интенсивности) таких пучков, как правило, имеют единичный топологический заряд и расположены эквидистантно (или не эквидистантно) на прямой линии в поперечном сечении пучка. Такие пучки структурно устойчивы и при распространении в пространстве изменяются только масштабно и вращаются. Орбитальный угловой момент таких мультивихревых пучков конечный, так как только конечное число оптических вихрей попадает в область Гауссова пучка с заметной интенсивностью. Остальные центры сингулярности фазы находятся на периферии (и на бесконечности), где интенсивность почти нулевая.

Ключевые слова: оптический вихрь, топологический заряд, структурно устойчивый пучок, мультивихревой пучок, орбитальный угловой момент.

Цитирование: Котляр, В.В. Оптические пучки с бесконечным числом вихрей / В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 4. – С. 490-496. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-858.

Citation: Kotlyar VV. Optical beams with an infinite number of vortices. Computer Optics 2021; 45(4): 490-496. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-858.

Введение

В 1992 г. Л. Аллен [1] показал, что световые поля с винтовым волновым фронтом (оптические вихри) обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Такие поля характеризуются также и другой величиной – топологическим зарядом (ТЗ). В оптической передаче информации данные могут быть закодированы различными ОУМ-состояниями, возможное число которых теоретически не ограничено. На практике, однако, сформировать вихревые пучки с большим ТЗ не просто. Это побудило исследователей изучать световые поля с большими значениями ТЗ и ОУМ, а также методы их формирования, обнаружения, преобразования. В 1997 году было показано, что достигнуть большое значение ОУМ можно даже без оптических вихрей: достаточно пропустить Гауссов пучок через цилиндрическую линзу [2]. Позже, в 2012 году, оптические вихри высокого порядка были сформированы спиральными фазовыми зеркалами [3]. В этой работе были получены высококачественные оптические вихри с ТЗ от 1 до 100 при длине волны 532 нм. В 2015 году оптические вихри были сформированы с помощью цифровых микрзеркал [4]. Применяя бинарные голограммы Ли или бинарное суперпиксельное кодирование, были сформированы оптические вихри до 90-го порядка. В недавней работе [5] использовалась перекрёстная фаза для экс-

периментального формирования пучков Лагерра–Гаусса и измерения их ТЗ вплоть до 200. В [6] формировались цилиндрические векторные пучки с ТЗ до 14, но в компактном твердотельном лазере (Yb:YAG microchip laser). Из работ, посвящённых измерению больших значений ТЗ, можно упомянуть [7–9]. В [7] вихревой пучок расщеплялся цилиндрической линзой в массив световых пятен, что позволило измерить ТЗ до 100. В [8] ТЗ вплоть до 130 измерялся за счёт самоинтерференции пучка в интерферометре Маха–Цендера. В [9] описан метод определения ТЗ с помощью решётки со спиральными спицами с переменным периодом. Продемонстрировано определение ТЗ до 160. В [10] разработан метод для улучшения чистоты мод (подавления нежелательных радиальных мод) вихревых пучков. Были получены высокочистые ОУМ-моды до 100-го порядка. В [11] разработано полое кварцевое фотонно-кристаллическое волокно с кольцевым сердечником, способное переносить 101 ОУМ-моды с сохранением чистоты мод, низкими потерями и большим различием эффективных показателей преломления между соседними модами. Наконец, в [12] с помощью спирального фазового зеркала формировались фотоны с ОУМ больше 10000.

Таким образом, возникает вопрос: насколько больших значений может достигать ТЗ хотя бы теоретически? Может ли он быть бесконечным? Для световых пучков с оптическими вихрями, но без круговой сим-

метрии величины ТЗ и ОУМ различны. В то время как ОУМ зависит от распределения, интенсивности и фазы в поперечной плоскости [2, 13], ТЗ зависит только от фазы [14] и равен сумме порядков всех вихрей в пучке. Гауссовы пучки с множественными оптическими вихрями теоретически исследовались в [15], а в более общем виде структурно устойчивые (инвариантные) Гауссовы пучки изучались в [16, 17].

В данной работе, пользуясь подходом из [16, 17], теоретически исследуются примеры световых полей с бесконечным топологическим зарядом. Первый пример – Гауссов пучок с вихревой косинусной функцией, вторым примером является Гауссов пучок с функцией Бесселя первого рода с вихревым аргументом. Для первого пучка аналитически установлено распределение интенсивности и его ОУМ, который оказался конечен. Оба поля инвариантны к распространению и при определённых параметрах в их поперечном сечении имеется два ярких световых пятна, сопровождаемых «бледными» (невидимыми) локальными максимумами низкой интенсивности. Визуально эти пучки подобны модовым пучкам Эрмита–Гаусса порядка (1,0) [18] и астигматическим Фурье-инвариантным Гауссовым пучкам [19]. Однако пучки Эрмита–Гаусса имеют нулевой ТЗ, а астигматические Фурье-инвариантные Гауссовы пучки имеют конечный ТЗ, тогда как ТЗ исследуемых здесь пучков бесконечен.

1. Структурно устойчивые Гауссовы пучки

В [16, 17] показано (выражение (6.1) в [17]), что любая функция вида

$$E_{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{qw_0}\right), \quad (1)$$

где (x, y, z) – декартовы координаты, w_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка, $q = 1 + iz/z_0$, $f(x \pm iy)$ – произвольная целая аналитическая функция, является решением параксиального уравнения Гельмгольца:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Формула (1) описывает структурно устойчивые световые поля, распределение интенсивности которых при распространении в пространстве сохраняется (с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси).

Формула (1) позволяет аналитически описывать световые поля с произвольным расположением оптических вихрей [15] в начальной плоскости ($z=0$) в точках с декартовыми координатами (a_j, b_j) ($j = 1, \dots, m$):

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{x + iy}{q} - a_j - ib_j\right). \quad (3)$$

Световое поле (3) содержит конечное число m оптических вихрей. Далее мы рассмотрим два световых поля, у которых число оптических вихрей бесконечно. Более того, они все одного знака и потому не

компенсируют друг друга, и поэтому топологический заряд таких полей бесконечен.

2. Гауссов пучок с вихревой косинусной функцией

2.1. Теория

Пусть в комплексной амплитуде (1) взята следующая функция $f(Z)$ (Z – произвольный комплексный аргумент):

$$f(Z) = \cos\left(\frac{w_0}{\alpha_0} Z\right). \quad (4)$$

Тогда поле в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, 0) = \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \quad (5)$$

а в произвольной плоскости на расстоянии z комплексная амплитуда равна

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right). \quad (6)$$

Если повернуть систему координат на угол, равный фазе Гоу [18]:

$$\zeta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (7)$$

то есть ввести новые декартовы координаты:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \sin \zeta \\ -\sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/z_0^2}} \begin{pmatrix} x + \frac{yz}{z_0} \\ y - \frac{xz}{z_0} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

то комплексная амплитуда примет вид:

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w(z)} \cos\left[\frac{x' + iy'}{\alpha(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z)\right], \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\ \alpha(z) &= \alpha_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\ R(z) &= z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее аргумент z у функций (7) и (10) будем для краткости опускать.

Из (9) следует, что ширина Гауссова пучка $w(z)$ и масштаб $\alpha(z)$ косинусной функции умножаются на один и тот же коэффициент, поэтому поле (9) сохраняет свою форму при распространении.

Из (9) легко находятся координаты нулей интенсивности. Все они расположены эквидистантно на прямой $y' = 0$ в точках $x' = \alpha(\pi/2 + \pi p)$, где p – целые числа.

Для определения топологического заряда введём в окрестности произвольного нуля интенсивности локальную полярную систему координат (δ, θ) . Тогда вблизи нуля в точке с координатами $(x' = \alpha(\pi/2 + \pi p) + \delta \cos \theta, y' = \delta \sin \theta)$ фаза вихревой части поля (9) равна:

$$\begin{aligned} \arg \cos \left(\frac{x' + iy'}{\alpha} \right) &= \arg \cos \left[\frac{\alpha(\pi/2 + \pi p) + \delta e^{i\theta}}{\alpha} \right] = \\ &= \arg \cos \left[\frac{\pi}{2} + \pi p + \frac{\delta}{\alpha} e^{i\theta} \right] = \\ &= \arg \left\{ (-1)^{p+1} \sin \left[\frac{\delta}{\alpha} e^{i\theta} \right] \right\} \approx \\ &\approx \arg \left\{ (-1)^{p+1} e^{i\theta} \right\} = \theta + \text{const.} \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку Гауссов пучок не влияет на распределение фазы, топологический заряд оптического вихря вокруг любого нуля интенсивности равен, согласно (11), единице. Так как число нулей бесконечно, то общий топологический заряд поля (9) также бесконечен.

Далее определим вид дифракционной картины поля (9). Распределение интенсивности имеет вид:

$$\begin{aligned} I(x', y', z) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{w^2} \left[\cos \left(\frac{2x'}{\alpha} \right) + \text{ch} \left(\frac{2y'}{\alpha} \right) \right] \exp \left(-2 \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Для поиска максимумов интенсивности приравняем нулю частные производные $\partial I / \partial x'$ и $\partial I / \partial y'$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sin \left(\frac{2x'}{\alpha} \right) = \left[\cos \left(\frac{2x'}{\alpha} \right) + \text{ch} \left(\frac{2y'}{\alpha} \right) \right] \frac{2\alpha x'}{w^2}, \\ \text{sh} \left(\frac{2y'}{\alpha} \right) = \left[\cos \left(\frac{2x'}{\alpha} \right) + \text{ch} \left(\frac{2y'}{\alpha} \right) \right] \frac{2\alpha y'}{w^2}. \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, $(x', y') = (0, 0)$ является решением такой системы. Интенсивность в этой точке равна $I(0, 0, z) = (w_0/w)^2$.

Если $x' \neq 0$ и $y' \neq 0$, то из системы (13) следует, что $-(1/x') \sin(2x'/\alpha) = (1/y') \text{sh}(2y'/\alpha)$. Однако уравнение $-\sin u/u = \text{sh} v/v$ не имеет вещественных решений, в чём легко убедиться графически (правая часть не меньше единицы, а левая – строго меньше). Поэтому все локальные максимумы интенсивности располагаются только на декартовых осях x' и y' .

Если $y' = 0$, а $x' \neq 0$, то из системы (13) следует, что $[\sin(x'/\alpha) + \cos(x'/\alpha)(2\alpha x'/w^2)] \cos(x'/\alpha) = 0$. Случай $\cos(x'/\alpha) = 0$ даёт локальные минимумы, а координаты локальных максимумов находятся из трансцендентного уравнения $\text{tg}(x'/\alpha) = -2\alpha x'/w^2$. Число этих максимумов бесконечно, и интенсивность в каждом из них, согласно

(12), равна $I(x', 0, z) = (w_0/w)^2 \cos^2(x'/\alpha) \exp(-2x'^2/w^2)$ и не превышает $(w_0/w)^2$.

Аналогично, если $x' = 0$, а $y' \neq 0$, то из системы (13) следует, что координаты локальных максимумов находятся из уравнения $\text{th}(y'/\alpha) = 2\alpha y'/w^2$. Это трансцендентное уравнение может иметь либо один корень (в нуле), либо ещё два корня. При условии $\alpha \ll w$ (то есть $\alpha_0 \ll w_0$) два ненулевых корня равны примерно $y' \approx w^2/(2\alpha)$ и интенсивность в них примерно равна $I(0, y', z) = [w_0/(2w)]^2 \exp[w^2/(2\alpha^2)]$ и может намного превышать интенсивность максимума в центре $(w_0/w)^2$. Поэтому при $\alpha_0 \ll w_0$ распределение интенсивности имеет два симметричных глобальных максимума на оси $x' = 0$ и бесконечное число локальных максимумов на оси $y' = 0$, между которыми находятся изолированные нули интенсивности, вокруг которых возникают оптические вихри с топологическим зарядом +1.

При увеличении α (или уменьшении w) два максимума интенсивности сближаются, и при условии $\alpha_0 \geq w_0/\sqrt{2}$ уравнение $\text{th}(y'/\alpha) = 2\alpha y'/w^2$ имеет только один корень в нуле. В этом случае вместо двух световых пятен на дифракционной картине имеется одно пятно в центре и множество второстепенных максимумов небольшой интенсивности.

Несмотря на бесконечное число оптических вихрей в пучке (9), его ОУМ конечен. Это объясняется тем, что лишь небольшое число вихрей располагается вблизи областей высокой интенсивности. Найдём далее мощность и ОУМ пучка (9) по известным формулам [2, 13]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy, \tag{14}$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) E(x, y) dx dy. \tag{15}$$

Представляя косинус в (9) в виде суммы двух экспонент и используя справочные интегралы 2.4.15.3 и 2.5.36.5 из [20], после подстановки (9) в (14) и (15) получим:

$$J_z = \frac{\pi w_0^4}{4\alpha_0^2} \text{sh} \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right), \tag{16}$$

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2} \text{ch} \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right). \tag{17}$$

Тогда нормированный ОУМ (ОУМ, делённый на мощность) равен

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right) \text{th} \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right), \tag{18}$$

и при $\alpha_0 \ll w_0$ его можно оценить простым выражением $J_z/W \approx (w_0/\alpha_0)^2/2$.

Если ввести определение линейной плотности оптических вихрей в пучке (9) как число вихрей на единицу длины:

$$\rho_0 = 1/\pi\alpha_0, \tag{19}$$

то при большой плотности вихрей ($\alpha_0 \ll w_0$) ОУМ примерно равен $J_z/W = (\pi w_0 \rho_0)^2/2$, то есть возрастает с плотностью квадратично.

2.2. Численное моделирование

Согласно теории, распределение интенсивности состоит либо из двух ярких световых пятен (при $\alpha_0 \ll w_0$), либо из одного центрального яркого пятна ($\alpha_0 \geq w_0/\sqrt{2}$). В данном подпараграфе приведены результаты численного моделирования обоих случаев.

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (рис. 1а, б) вычислены по формуле (5), а на расстоянии от неё – по формуле (9) (рис. 1в, г) и с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки с использованием быстрого преобразования Фурье (рис. 1д, е). Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\alpha_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (рис. 1а, б) и $R = 3$ мм (рис. 1в–е). На рис. 1 видно совпадение распределений, полученных теоретически, по формуле (9), и численно с помощью преобразования Френеля. Также видно, что все оптические вихри располагаются на одной прямой, которая при распространении поворачивается против часовой стрелки, и что согласно теории действительно на картине интенсивности имеется два световых пятна, расположенных на прямой, перпендикулярной прямой с оптическими вихрями. Согласно выбранным параметрам, нормированный ОУМ светового поля на рис. 1 должен быть равен $J_z/W = 8$. Численно получены следующие значения: 7,990329 (рис. 1в, г) и 7,988885 (рис. 1д, е). Для демонстрации бесконечного топологического заряда его надо вычислить по нескольким окружностям. Для этого рассчитаем распределение фазы (рис. 1з) в более широкой области $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм (рис. 2).

При расчёте топологического заряда по окружностям радиусов $R_1 = 3$ мм, 6 мм и 9 мм были получены соответственно значения $TC = 12, 26, 38$ (11,98, 25,87 и 37,60).

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (рис. 3а, б) вычислены по формуле (5), а на расстоянии от неё – по формуле (9) (рис. 3в, г) и с помощью численного преобразования Френеля (рис. 3д, е). Параметры расчёта те же самые, что на рис. 1, но масштабный множитель косинусной функции равен $\alpha_0 = w_0$, то есть согласно теории на дифракционной картине должно получиться одно световое пятно.

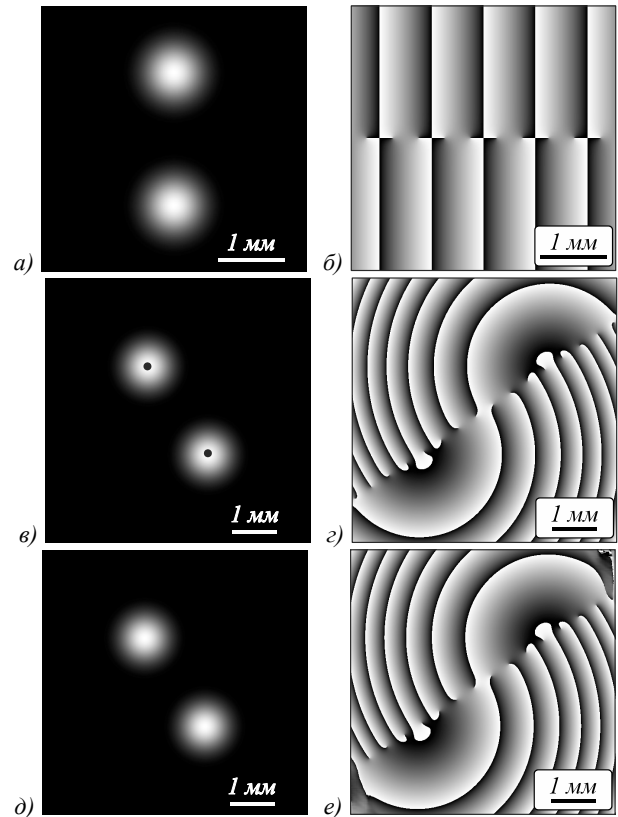


Рис. 1. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) пучка (9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (а, б) вычислены по формуле (5), а на расстоянии от неё – по формуле (9) (в, г) и с помощью численного преобразования Френеля (д, е). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\alpha_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (а, б) и $R = 3$ мм (в–е). Чёрные точки (в) показывают положения максимумов интенсивности, вычисленные по приближённой формуле $y' \approx w^2 / (2\alpha)$

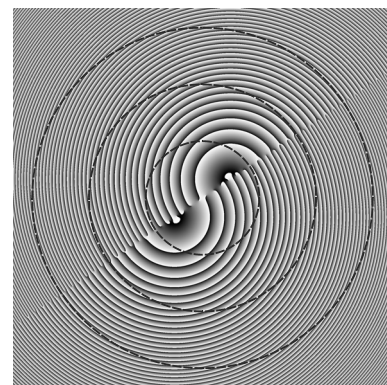


Рис. 2. Распределение фазы пучка с рис. 1 в более широкой области, рассчитанное по формуле (9)

Из рис. 3 также видно совпадение распределений, полученных теоретически, по формуле (9), и численно с помощью преобразования Френеля. На рис. 3г, е также видно четыре вихря, расположенных на одной прямой, и одно эллиптическое световое пятно на рас-

пределении интенсивности. Согласно выбранным параметрам, нормированный ОУМ светового поля на рис. 3 должен быть равен $J_2/W = 0,5 \text{th}(0,5) \approx 0,231$. Численно получены следующие значения: 0,231 (рис. 3в, з) и 0,228 (рис. 3д, е). Для демонстрации бесконечного топологического заряда также рассчитаем распределение фазы с рис. 3з в более широкой области $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 10$ мм) (рис. 4) и вычислим топологический заряд по нескольким окружностям.

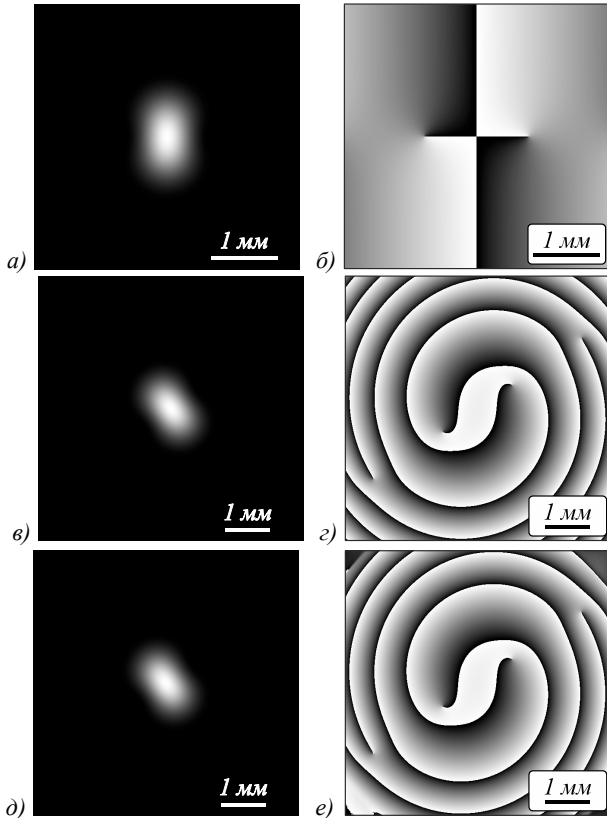


Рис. 3. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) пучка (9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (а, б) вычислены по формуле (5), а на расстоянии от неё – по формуле (9) (в, г) и с помощью численного преобразования Френеля (д, е). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\alpha_0 = w_0$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (а, б) и $R = 3$ мм (в–е)

При расчёте топологического заряда по окружностям радиусов $R_1 = 3$ мм, 6 мм и 9 мм были получены соответственно значения ТЗ=4, 6, 10 (3,99, 5,97 и 9,89), то есть ТЗ возрастает с увеличением радиуса окружности, по которой он рассчитан.

3. Гауссов пучок с вихревой функцией Бесселя

3.1. Теория

Пусть теперь в комплексной амплитуде (1) выбрана другая функция $f(Z)$ (Z – произвольный комплексный аргумент):

$$f(Z) = J_m((w_0/\alpha_0)Z), \tag{20}$$

где $J_m()$ – функция Бесселя первого рода m -го порядка.

Тогда в произвольной поперечной плоскости комплексная амплитуда равна:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) J_m\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right). \tag{21}$$

Перепишем комплексную амплитуду (21) в повернутой системе координат (8):

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w} J_m\left(\frac{x' + iy'}{\alpha}\right) \times \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2} + \frac{ik}{2R}(x'^2 + y'^2) - i\zeta\right], \tag{22}$$

где величины w, α, R, ζ зависят от расстояния z и определяются выражениями (7), (10).

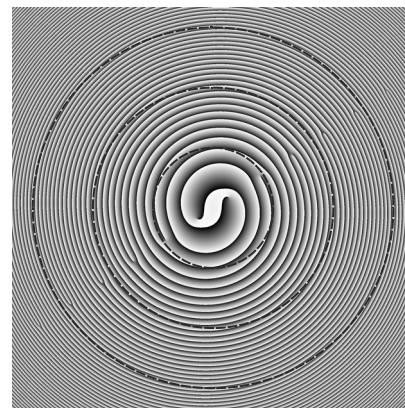


Рис. 4. Распределение фазы пучка с рис. 3 в более широкой области, рассчитанное по формуле (9)

Известно, что все нули функции Бесселя вещественны. Из (22) следует, что, как и у пучка (9), нули располагаются на одной прямой, но в отличие от пучка (9) они не эквидистантны и располагаются в точках с координатами $(x', y') = (\pm \alpha \gamma_{m,p}, 0)$, где $\gamma_{m,p}$ – p -й нуль функции Бесселя m -го порядка. Кроме того, центральный ноль интенсивности имеет m -й порядок, поскольку нулевой корень функции Бесселя m -го порядка имеет также m -й порядок. Аналогично пучку (9) можно показать, что все остальные нули интенсивности имеют порядок +1 и потому ТЗ всего пучка бесконечен.

3.2. Численное моделирование

На рис. 5 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (22) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения вычислены по формуле (22) (рис. 5а–г) и с помощью численного преобразования Френеля (рис. 5д, е). Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, порядок функции Бесселя $m = 3$, масштабный множитель вихревой функции Бесселя $\alpha_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (рис. 5а, б) и $R = 3$ мм (рис. 5в–е).

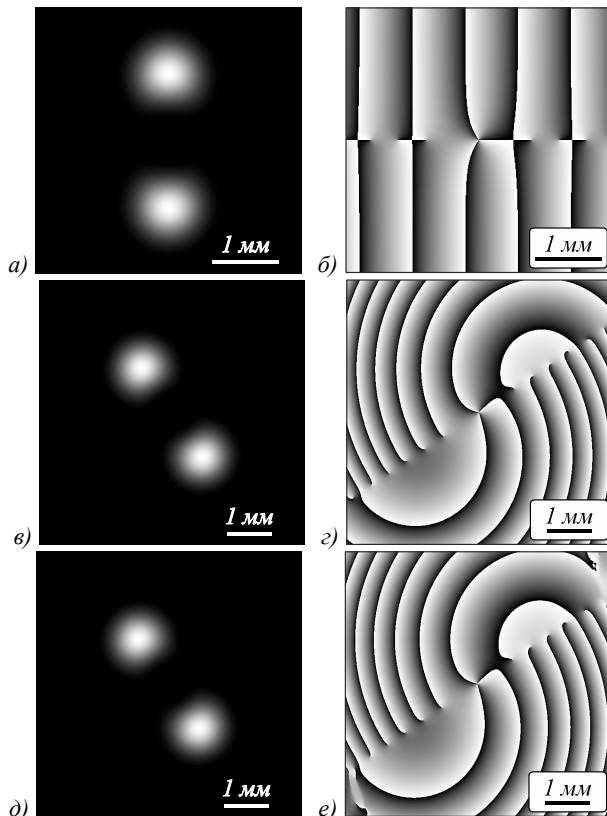


Рис. 5. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) пучка (22) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения вычислены по формуле (22) (а–г) и с помощью численного преобразования Френеля (д, е). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, порядок функции Бесселя $m = 3$, масштабный множитель вихревой функции $a_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (а, б) и $R = 3$ мм (в–е)

На рис. 5 видно совпадение распределений, полученных теоретически, по формуле (22), и численно с помощью преобразования Френеля (кроме областей вблизи углов). Также видно, что все оптические вихри располагаются на одной прямой, которая при распространении поворачивается против часовой стрелки. Распределение интенсивности имеет тот же вид, что и у пучка с косинусной функцией (9), однако нули располагаются уже не эквидистантно и в центре ноль имеет не первый, а третий порядок. При вычислении ТЗ по трём разным окружностям (радиусов $R_1 = 3$ мм, 6 мм и 9 мм) на распределении фазы (рис. 6) были получены значения, возрастающие с радиусом: 13, 25, 37 (12,98, 24,88, 36,62), то есть ТЗ пучка (22) бесконечен. При этом ОУМ пучка (22) конечен и равен примерно 8,14.

Заключение

В этой работе мы рассмотрели ОВ с бесконечным ТЗ. Такие ОВ имеют счетное число центров сингулярности фазы (изолированных нулей интенсивности), как правило, с единичным ТЗ, которые распо-

ложены эквидистантно (или не эквидистантно) на прямой линии в поперечном сечении пучка. Такие ОВ структурно стабильные и при распространении в пространстве изменяются масштабно и вращаются. Орбитальный угловой момент таких ОВ конечный, так как только конечное число винтовых дислокаций попадает в область Гауссова пучка с заметной интенсивностью. Остальные же центры сингулярности фазы находятся на периферии (и на бесконечности), где интенсивность почти нулевая. На практике сформировать такие пучки можно с помощью SLM, но применяя алгоритмы кодирования амплитудно-фазовых функций $\cos(x + iy)$ или $J_m(x + iy)$ только в фазовую функцию.

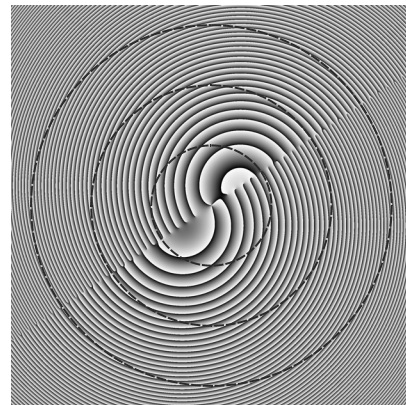


Рис. 6. Распределение фазы пучка с рис. 5 в более широкой области $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 10$ мм), рассчитанное по формуле (22)

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Гауссов пучок с вихревой косинусной функцией», Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Гауссов пучок с вихревой функцией Бесселя», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Структурно устойчивые Гауссовы пучки».

Литература

1. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189.
2. **Courtial, J.** Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1997. – Vol. 144. – P. 210-213.
3. **Campbell, G.** Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors / G. Campbell, B. Hage, B. Buchler, P. Lam // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51. – P. 873-876.
4. **Chen, Y.** Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device / Y. Chen, Z. Fang, Y. Ren, L. Gong, R. Lu // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54. – P. 8030-8035.

5. **Wang, C.** Generation and measurement of high-order optical vortices by using the cross phase / C. Wang, Y. Ren, T. Liu, C. Luo, S. Qiu, Z. Li, H. Wu // *Applied Optics*. – 2020. – Vol. 59. – P. 4040-4047.
6. **Chen, D.** High-order cylindrical vector beams with tunable topological charge up to 14 directly generated from a microchip laser with high beam quality and high efficiency / D. Chen, Y. Miao, H. Fu, H. He, J. Tong, J. Dong // *APL Photonics*. – 2019. – Vol. 4. – P. 106106.
7. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
8. **Kumar, P.** Modified Mach-Zehnder interferometer for determining the high-order topological charge of Laguerre-Gaussian vortex beams / P. Kumar, N. Nishchal // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2019. – Vol. 36. – P. 1447-1455.
9. **Li, Y.** Measuring the topological charge of vortex beams with gradually changing-period spiral spoke grating / Y. Li, Y. Han, Z. Cui // *IEEE Photonics Technology Letters*. – 2020. – Vol. 32, Issue 2. – P. 101-104.
10. **Nape, I.** Enhancing the modal purity of orbital angular momentum photons / I. Nape, B. Sephton, Y.-W. Huang, A. Vallés, C.-W. Qiu, A. Ambrosio, F. Capasso, A. Forbes // *APL Photonics*. – 2020. – Vol. 5. – P. 070802.
11. **Hong, S.** Hollow silica photonic crystal fiber guiding 101 orbital angular momentum modes without phase distortion in C+ L band / S. Hong, Y.S. Lee, H. Choi, C. Quan, Y. Li, S. Kim, K. Oh // *Journal of Lightwave Technology*. – 2020. – Vol. 38, Issue 5. – P. 1010-1018.
12. **Fickler, R.** Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10010 / R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P.K. Lam, A. Zeilinger // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. – 2016. – Vol. 113, Issue 48. – P. 13642-13647.
13. **Serna, J.** Orbital angular momentum of partially coherent beams / J. Serna, J. Movilla // *Optics Letters*. – 2001. – Vol. 26. – P. 405-407.
14. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268.
15. **Indebetouw, G.** Optical Vortices and Their Propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40, Issue 1. – P. 73-87.
16. **Abramochkin, E.G.** Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1996. – Vol. 125, Issues 4-6. – P. 302-323.
17. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: Физматлит, 2010.
18. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – University Science, 1986.
19. **Kotlyar, V.V.** Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 2. – P. 657-666. – DOI: 10.1364/OE.27.000657.
20. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука, 1983.

Сведения об авторе

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 30 декабря 2020 г. Окончательный вариант – 16 апреля 2021 г.

Optical beams with an infinite number of vortices

V.V. Kotlyar^{1,2}

¹*IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,*

²*Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

Abstract

In optical data transmission with using vortex laser beams, data can be encoded by the topological charge, which is theoretically unlimited. However, the topological charge of a single separate vortex is limited by possibilities of its generating. Therefore, in this work, we analyze light beams with an unbounded (countable) set of optical vortices. The summary topological charge of such beams is infinite. Phase singularities (isolated intensity nulls) in such beams typically have a unit topological charge and reside equidistantly (or not equidistantly) on a straight line in the beam cross section. Such beams are form-invariant and, on propagation in space, change only in scale and rotate. Orbital angular momentum of such multivortex beams is finite, since only a finite number of optical vortices fall into the area, where the Gaussian beam has a notable intensity. Other phase singularities are located in the periphery (and at the infinity), where the intensity is almost zero.

Keywords: optical vortex, topological charge, shape-invariant beam, multivortex beam, orbital angular momentum.

Citation: Kotlyar VV. Optical beams with an infinite number of vortices. *Computer Optics* 2021; 45(4): 490-496. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-858.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under project No. 18-29-20003 (Section "Gaussian beam with a vortex-argument cosine envelope function"), the Russian Science Foundation under project No. 18-19-00595 (Section "Gaussian beam with a vortex-argument Bessel envelope function"), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a government project of FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Section "Shape-invariant Gaussian beams").

References

- [1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189.
 - [2] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144: 210-213.
 - [3] Campbell G, Hage B, Buchler B, Lam P. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors. *Appl Opt* 2012; 51: 873-876.
 - [4] Chen Y, Fang Z, Ren Y, Gong L, Lu R. Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device. *Appl Opt* 2015; 54: 8030-8035.
 - [5] Wang C, Ren Y, Liu T, Luo C, Qiu S, Li Z, Wu H. Generation and measurement of high-order optical vortices by using the cross phase. *Appl Opt* 2020; 59: 4040-4047.
 - [6] Chen D, Miao Y, Fu H, He H, Tong J, Dong J. High-order cylindrical vector beams with tunable topological charge up to 14 directly generated from a microchip laser with high beam quality and high efficiency. *APL Photonics* 2019; 4: 106106.
 - [7] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
 - [8] Kumar P, Nishchal N. Modified Mach-Zehnder interferometer for determining the high-order topological charge of Laguerre-Gaussian vortex beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36: 1447-1455.
 - [9] Li Y, Han Y, Cui Z. Measuring the topological charge of vortex beams with gradually changing-period spiral spoke grating. *IEEE Photon Technol Lett* 2020; 32(2): 101-104.
 - [10] Nape I, Sephton B, Huang YW, Vallés A, Qiu CW, Ambrosio A, Capasso F, Forbes A. Enhancing the modal purity of orbital angular momentum photons. *APL Photon* 2020; 5: 070802.
 - [11] Hong S, Lee YS, Choi H, Quan C, Li Y, Kim S, Oh K. Hollow silica photonic crystal fiber guiding 101 orbital angular momentum modes without phase distortion in C+ L band. *J Lightw Technol* 2020; 38(5): 1010-1018.
 - [12] Fickler R, Campbell G, Buchler B, Lam PK, Zeilinger A. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10010. *Proc Natl Acad Sci USA* 2016; 113(48): 13642-13647.
 - [13] Serna J, Movilla J. Orbital angular momentum of partially coherent beams. *Opt Lett* 2001; 26: 405-407.
 - [14] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268.
 - [15] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87.
 - [16] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt Commun* 1996; 125(4-6): 302-323.
 - [17] Abramochkin EG, Volostnikov VG. *Modern optics of Gaussian beams* [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2010.
 - [18] Siegman AE. *Lasers*. University Science; 1986.
 - [19] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams. *Opt Express* 2019; 27(2): 657-666. DOI: 10.1364/OE.27.000657.
 - [20] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Special Functions*. New York: Gordon and Breach; 1981.
-

Author's information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Received December 30, 2020. The final version – April 16, 2021.
