

## Топологический заряд в дальней зоне оптических вихрей с дробным начальным зарядом: оптические «диполи»

А.Г. Налимов<sup>1,2</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В работе с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда и формулы Берри рассчитан топологический заряд Гауссова оптического вихря с начальным дробным топологическим зарядом. Показано, что при разной дробной части топологического заряда в пучке присутствует разное число винтовых дислокаций, которые определяют топологический заряд всего пучка. При малой дробной части пучок топологического заряда состоит из основного оптического вихря с центром на оптической оси с топологическим зарядом, равным ближайшему целому числу (пусть  $n$ ), и двух краевых дислокаций, расположенных на вертикальной оси (выше и ниже центра). При увеличении дробной части начального топологического заряда из верхней краевой дислокации формируется «диполь», состоящий из двух вихрей с топологическим зарядом  $+1$  и  $-1$ . При дальнейшем увеличении дробной части дополнительный вихрь с топологическим зарядом  $+1$  смещается к центру пучка, а вихрь с топологическим зарядом  $-1$  смещается на периферию. При дальнейшем увеличении дробной части топологического заряда из нижней краевой дислокации формируется другой «диполь», у которого, наоборот, вихрь с топологическим зарядом  $-1$  смещается к оптической оси (к центру пучка), а вихрь с топологическим зарядом  $+1$  смещается на периферию пучка. Когда дробная часть топологического заряда становится равна  $1/2$ , «нижний» вихрь с топологическим зарядом  $-1$ , который смещался к центру пучка, начинает смещаться на периферию, а «верхний» вихрь с топологическим зарядом  $+1$  все ближе и ближе смещается к центру пучка и сливается с основным вихрем при приближении дробной части к 1. Такая динамика дополнительных вихрей с топологическим зарядом  $+1$  сверху и с топологическим зарядом  $-1$  снизу определяет, какой целый топологический заряд будет у пучка ( $n$  или  $n + 1$ ) при разных значениях дробной части из отрезка  $[n, n + 1]$ .

**Ключевые слова:** векторный световой пучок, дробный топологический заряд, оптический вихрь, диполь из двух вихрей.

**Цитирование:** Налимов, А.Г. Топологический заряд в дальней зоне оптических вихрей с дробным начальным зарядом: оптические «диполи» / А.Г. Налимов, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 2. – С. 189-195. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1073.

**Citation:** Nalimov AG, Kotlyar VV. Topological charge of optical vortices in the far field with an initial fractional charge: optical "dipoles". Computer Optics 2022; 46(2): 189-195. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1073.

### Введение

В настоящее время появляется множество работ по генерации и детектированию вихревых лазерных пучков [1–9] с орбитальным угловым моментом, множество обзоров [10–16] и монографий [17–19], отражающих успехи в данной области знаний и широкое применение сингулярной оптики. В основном все эти работы экспериментальные, в них демонстрируются разные способы получения лазерных пучков с орбитальным угловым моментом и топологическим зарядом (ТЗ). И, хотя вихревым пучкам более 40 лет, остаётся еще много нерешенных теоретических проблем, связанных с ними. Например, в пионерской работе Берри [20] были исследованы оптические вихри (ОВ) с начальным

дробным ТЗ. Берри с помощью асимптотик комплексной амплитуды такого поля показал, что в ближнем поле (и в плоскости изображения) у ОВ, кроме основных винтовых дислокаций (фазовых сингулярностей) с центром на оптической оси, формируется множество дополнительных винтовых дислокаций, центры которых лежат выше и ниже горизонтальной оси (если краевая дислокация была на горизонтальной оси) и ТЗ у которых чередуется  $+1$  и  $-1$ . Все вместе эти дополнительные винтовые дислокации составляют «отель Гильберта» [21]. При увеличении дробной части начального ТЗ ближайшая винтовая дислокация из «отеля Гильберта» приближается к основной осевой винтовой дислокации, а остальные дополнительные вихри смещаются на периферию пучка. Возникает вопрос:

какой ТЗ будет у пучка, в котором присутствует такое множество винтовых дислокаций? В [20] на этот вопрос был такой ответ: если дробная часть начального ТЗ меньше 0,5, то ТЗ пучка равен ближайшему целому числу, а если дробная часть больше 0,5, то ТЗ пучка увеличивается на единицу. Такая динамика ТЗ пучка с начальным дробным зарядом была экспериментально подтверждена в ряде работ [22–26]. Но появились работы, в которых также экспериментально было показано, что в зоне дифракции Френеля и в дальнем поле ТЗ оптических вихрей с начальным дробным зарядом ведет себя по-другому [27, 28]. В наших работах [29, 30] была предпринята попытка теоретически объяснить, как формируется ТЗ в зоне дифракции для таких дробных ОВ. Но до конца не было понятно, откуда берутся дополнительные винтовые дислокации в пучке, которые меняют его ТЗ при разной величине дробной части заряда.

В данной работе мы продолжаем исследование того, как формируется в дальнем поле целый ТЗ оптического вихря с начальным дробным ТЗ. Для нахождения дополнительных ОВ, находящихся далеко на периферии пучка, там, где интенсивность света почти нулевая, моделирование проводится с помощью непараксиального интеграла Рэлея–Зоммерфельда [31]. Непараксиальный расчет фазы пучка с радиусом перетяжки 3 мкм (длина волны – 0,633 мкм) на поле радиусом больше 138 мкм позволил определить динамику периферийных фазовых сингулярностей в пучке при изменении дробной части начального ТЗ. Непараксиальный интеграл Рэлея–Зоммерфельда позволяет более точно, чем параксиальный интеграл Френеля, рассчитать амплитуду и фазу на большом удалении от оптической оси. Расчет в дальнем поле ТЗ пучка вдоль окружности с большим (но конечным) радиусом показал, что если дробный ТЗ лежит в диапазоне между 2 и 3, то целый ТЗ пучка скачком меняется от 2 до 3 и от 3 до 2 пять раз, а если дробный ТЗ лежит в диапазоне от 3 до 4, то целый ТЗ пучка скачком меняется от 3 до 4 и от 4 до 3 три раза. В работе показано, чем обусловлены эти переходы значения ТЗ.

Заметим, что постановка задачи в данной работе совпадает с классической постановкой задачи Берри [20], которая рассматривает дифракцию плоской или Гауссовой волны на спиральной фазовой пластинке с дробным (действительное число) топологическим зарядом. Известны и другие постановки задачи [32], которые приводят к появлению «лавины» оптических вихрей и сложному спектру орбитального углового момента.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим начальное световое поле, линейно поляризованное по оси  $x$ , комплексная амплитуда которого описывается Гауссовой экспонентой и

оптическим вихрем с дробным топологическим зарядом  $\mu$  [20]:

$$E_x(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2 + i\mu\varphi). \quad (1)$$

Непараксиальное распространение светового поля (1) будем моделировать с помощью скалярного интеграла Рэлея–Зоммерфельда [31]:

$$E(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma} E(x, y) \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy, \quad (2)$$

где  $E(x, y)$  – начальное поле (1),  $\ell = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$  – расстояние от точки в начальной плоскости до точки наблюдения,  $\Sigma$  – функция, описывающая диафрагму, ограничивающую начальное поле (если есть диафрагма).

Топологический заряд будем рассчитывать по формуле Берри [20]

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Разложим поле (1) в ряд по угловым гармоникам с целым ТЗ, получим:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z=0) &= \exp \left[ -i\mu\varphi - \left( \frac{r}{w} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{e^{i\pi\mu}}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\varphi - r^2/w^2}}{\mu - n}. \end{aligned} \quad (4)$$

При параксиальном рассмотрении поле в зоне дифракции Френеля при любом  $z$  будет равно:

$$\begin{aligned} E(\rho, \theta, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{-iz_0}{q_1 z} \right) \exp \left( \frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu \right) \times \\ &\times \sin(\pi\mu) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m (\text{sgn } m)^{|m|} \frac{e^{im\theta}}{\mu - m} \left[ I_{\frac{|m|-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{|m|+1}{2}}(\xi) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $I_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя, а  $\xi$  равно выражению

$$\xi = \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \left( \frac{\rho}{w} \right)^2 \left( \frac{1}{2q_1} \right), \quad q_1 = 1 - i \frac{z_0}{z}. \quad (6)$$

В дальней зоне  $q_1$  в (6) равен 1 и, вместо (5), получим выражение на фокусном расстоянии  $z = f$ :

$$\begin{aligned} E_F(\rho, \theta) &= \frac{\sin(\pi\mu)}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{-iz_0}{f} \right) \exp(i\pi\mu) \sqrt{x} \exp(-x) \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m|} \frac{e^{im\theta}}{\mu - m} \left[ I_{\frac{|m|-1}{2}}(x) - I_{\frac{|m|+1}{2}}(x) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x = (z_0/f)^2 (\rho/w)^2/2$ . Ряд (7) показывает, что световым полем оптического вихря с начальным дробным ТЗ является суперпозиция бесконечного числа оптических вихрей как с положительными, так и с отрицательными целыми зарядами. И знаменатель в (5) показывает, что наибольший вклад будет давать вихрь с номером  $m$ , ближайшим к дробному  $\mu$ . Из (7) следует, что при  $\mu = n + \alpha$ ,  $\alpha \ll 1$ , ТЗ вихря (7) будет равен  $n$ , а при  $\mu = n + 1 - \alpha$ ,  $\alpha \ll 1$ , ТЗ пучка (7) будет равен  $n + 1$ . Если  $\mu = n + 1/2$  полуцелое, то почти одинаковый вклад будут давать два вихря с номерами  $n$  и  $n + 1$ . Поэтому если начальный ТЗ вихря (1) лежит в диапазоне  $n \leq \mu \leq (n + 1)$ , то ТЗ оптического вихря в зоне дифракции Френеля и в дальней зоне будет скачком меняться между  $n$  и  $n + 1$ .

Чтобы проверить эту гипотезу, проведем моделирование и рассчитаем ТЗ пучка по формуле (3). В (3) ТЗ вычисляется по окружности бесконечного радиуса, но при моделировании мы будем вычислять ТЗ на окружностях разного радиуса, величина которого будет каждый раз указана. Параметры моделирования: размер начального поля –  $8 \times 8$  мкм,  $400 \times 400$  отсчетов, длина волны  $\lambda = 0,532$  мкм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 3$  мкм. Начальный дробный ТЗ пучка (1) менялся в диапазоне  $3 < \mu < 4$ . Начальный Гауссов пучок был умножен на сферическую функцию с радиусом  $f = 10$  мкм. Реальное фокусное расстояние составило  $z = 9,236$  мкм (на данном расстоянии наблюдается максимум интенсивности на оптической оси при  $\mu = 0$ ). Таким образом, в фокусе линзы все значения рассчитаны на этом  $z$ . Поскольку ТЗ пучка рассчитывался по формуле (2) на окружностях больших радиусов (до 140 мкм), которые больше, чем расстояние от перетяжки до плоскости наблюдения (10 мкм), то для получения адекватных значений ТЗ применялся непараксиальный расчет комплексной амплитуды светового поля с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда (2).

На рис. 1 показаны амплитуда и фаза светового поля ( $\mu = 2,2$ ) в ближней зоне на расстоянии  $z = 0,03$  мкм от перетяжки (от начальной плоскости). Уже на этом малом расстоянии ТЗ оптического вихря на рис. 1 имеет целое значение и равен 2.

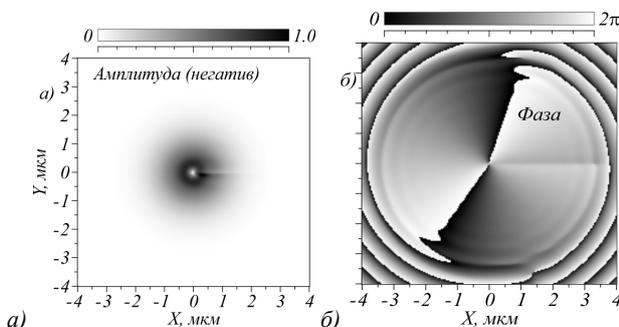


Рис. 1. Амплитуда и фаза пучка (1) при  $\mu = 2,2$  в ближней зоне на расстоянии  $z = 0,03$  мкм. Размер поля –  $8 \times 8$  мкм

## 2. Топологический заряд пучка в дальней зоне при начальном ТЗ $3 < \mu < 4$

Моделирование показало, что изменение ТЗ пучка с начальным дробным ТЗ происходит по-разному, если начальный ТЗ изменяется от нечетного к четному и от четного к нечетному. Поэтому рассмотрим отдельно два случая изменения ТЗ в диапазоне  $\mu$  от 3 до 4 и от 2 до 3.

Далее все расчеты будем проводить на расстоянии  $z = 9,236$  мкм, где формируется фокус при  $\mu = 0$  (дальняя зона). На рис. 2 показана зависимость ТЗ от  $\mu$  с шагом 0,01 в диапазоне  $3 < \mu < 4$ , вычисленный для сравнения на окружностях двух радиусов:  $R = 8$  мкм (непрерывная линия),  $R = 138$  мкм (пунктирная линия).

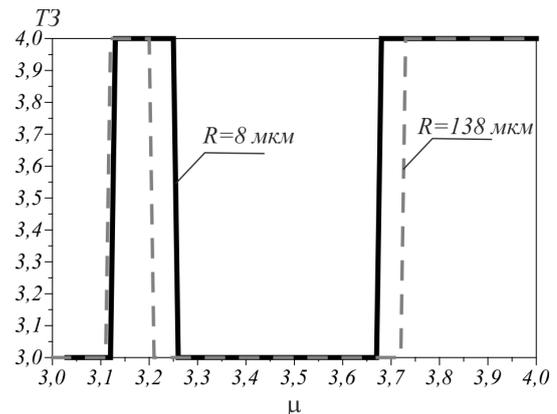


Рис. 2. Зависимость ТЗ от величины дробного заряда  $\mu$  начального поля в диапазоне  $3 < \mu < 4$  при расчете вдоль окружностей двух радиусов:  $R = 8$  мкм (непрерывная линия) и  $R = 138$  мкм (пунктирная линия)

Из рис. 2 видно, что для разных значений  $\mu$  топологический заряд оптического вихря принимает два целых значения – 3 или 4. Переход от 3 к 4 и от 4 к 3 для окружностей разного радиуса происходит при разных значениях  $\mu$ . В табл. 1 приведены точные значения величин  $\mu$ , при которых происходит скачок ТЗ от 3 к 4 и от 4 к 3.

Табл. 1. Значения величины  $\mu$ , при которых происходит переход ТЗ от 3 к 4 и от 4 к 3 на рис. 2

$R = 8$ мкм		$R = 138$ мкм	
$\mu$ (мкм)	ТЗ	$\mu$ (мкм)	ТЗ
3,0–3,12	3	3,0–3,11	3
3,14–3,25	4	3,12–3,2	4
3,26–3,67	3	3,21–3,72	3
3,68–4	4	3,73–4	4

Детальный анализ картин фазы, полученных для разных значений  $\mu$ , позволяет объяснить график на рис. 2. Чтобы понять, какие вихри существуют в поле на больших радиусах, были рассчитаны поля размером  $3000 \times 3000$  отсчетов ( $276 \times 276$  мкм) и по ним составлена табл. 2, в которой описаны все переходы ТЗ от 3 к 4 и от 4 к 3 в диапазоне начального ТЗ  $3 < \mu < 4$ .

Описанные в табл. 2 переходы ТЗ с 3 к 4 и с 4 к 3 для наглядности графически изображены на рис. 3.

Табл. 2. Зависимость ТЗ от  $\mu$  при  $R = 138$  мкм

$\mu$ (мкм)	ТЗ	Комментарий
3,0–3,11	3	На картине фаз виден оптический вихрь в центре на оптической оси с ТЗ 3 и на вертикальной оси при $y > 0$ и при $y < 0$ находятся две краевые дислокации разных знаков. Поэтому ТЗ всего оптического вихря равен 3.
3,11–3,12	3 → 4	Верхняя краевая дислокация ( $y > 0$ ) порождает оптический «диполь» – два близких оптических вихря с зарядами +1 и –1 сверху (с центром в точке $y = 20$ мкм, $x = 0$ ). При этом ТЗ пучка не изменяется и остается равным 3. С ростом $\mu$ верхний вихрь в диполе с ТЗ –1 перемещается за границу рассматриваемого поля ( $y > R = 138$ мкм), а нижний вихрь в диполе с ТЗ +1 опускается к центру. И при $\mu = 3,12$ остается только нижний вихрь с ТЗ +1 с координатой $y = 9,02$ мкм. ТЗ пучка становится равным 4.
3,12–3,18	4	Оставшийся в круге радиуса $R = 138$ мкм оптический вихрь с ТЗ +1 по-прежнему перемещается к центру пучка и ТЗ всего пучка остается равным 4.
3,18–3,21	4 → 3	Теперь нижняя краевая дислокация ( $y < 0$ ) порождает оптический «диполь» – два близких вихря с ТЗ –1 и +1 (с центром в точке $y = -26,1$ мкм, $x = 0$ ). С ростом $\mu$ эти два вихря расходятся в разные стороны: нижний с ТЗ +1 перемещается к границе области ( $y = -138$ мкм), а верхний с ТЗ –1 движется в сторону центра пучка. При $\mu = 3,21$ вихрь с ТЗ +1 уходит за границу поля, и остается только вихрь с ТЗ –1 при $y = -11$ мкм. ТЗ всего пучка опять становится равным 3.
3,21–3,72	3	С ростом $\mu$ вихрь сверху от центра ( $y > 0$ ) с ТЗ +1 продолжает постепенно приближаться к центру. Вихрь снизу ( $y < 0$ ) с ТЗ –1 вначале приближается к центру, а при $\mu > 3,5$ начинает удаляться от центра.
3,72–3,74	3 → 4	Два вихря с ТЗ –1 и +1, которые расходились до значения $\mu = 3,5$ , при $\mu > 3,72$ начинают сближаться. Вихрь с ТЗ –1 уходит вдоль координаты $y < 0$ от центра, а вихрь с ТЗ +1 с периферии пучка смещается к центру. Эти вихри соединяются и взаимно «аннигилируют» примерно на расстоянии $y = -25$ мкм. Остается только дополнительный вихрь с ТЗ +1 сверху ( $y > 0$ ), который практически уже подошел к центру пучка. Поэтому ТЗ всего пучка становится равен 4.
3,74–4,00	4	Дополнительный вихрь с ТЗ +1 сверху пучка ( $y > 0$ ) сливается с изначальными вихрями в центре пучка ТЗ 3. И ТЗ всего пучка остается равен 4.

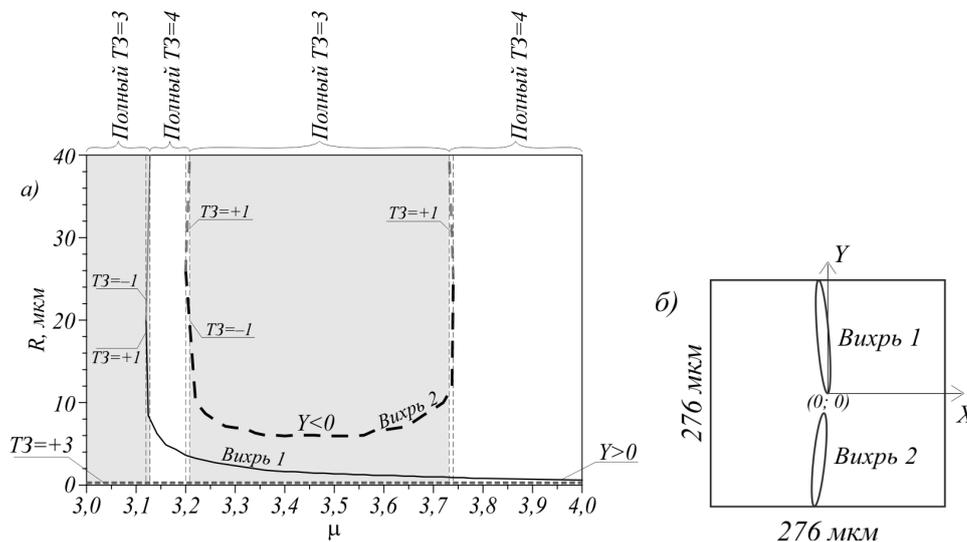


Рис. 3. Зависимость ТЗ пучка от ТЗ отдельных вихрей и радиусы, на которых они располагаются в зависимости от  $\mu$  (а). В центре во всем диапазоне значений  $\mu$  уже находится вихрь с ТЗ = +3, и к нему добавляются оптические «диполи» (пары вихрей с ТЗ +1 и –1), появляющиеся «на изломе» двух краевых дислокаций выше ( $y > 0$ ) и ниже ( $y < 0$ ) центра на радиусах  $R = 20 - 26$  мкм. После того, как один вихрь из каждого «диполя» «уходит» (или «приходит») за радиус наблюдения ( $R = 138$  мкм), меняется ТЗ всего пучка. Ниже (б) схематично изображено расположение этих вихрей на поле

### 3. Топологический заряд пучка в дальней зоне при начальном ТЗ $2 < \mu < 3$

Зависимость ТЗ пучка от  $\mu$ , аналогично рис. 1, рассчитанная вдоль окружности радиуса  $R = 138$  мкм, представлена на рис. 4.

Из сравнения рис. 2 и рис. 4 видно, что в обоих случаях вблизи начального и конечного краёв интервала значений  $\mu$  ТЗ равен значению целого ТЗ на концах отрезков [2, 3] и [3, 4]. А разница в том, для интервала значений  $2 < \mu < 3$  ТЗ переходит от 2 к 3 три раза, а для интервала значений  $3 < \mu < 4$  ТЗ переходит

от 3 к 4 два раза. Как можно предположить из рис. 4, здесь в формировании ТЗ участвуют уже не 2 оптических «диполя», которые порождаются краевыми дислокациями, а 3 оптических «диполя». Эволюция оптических вихрей, входящих в состав «диполей», при изменении начального ТЗ поля (1) в диапазоне  $2 < \mu < 3$  показана на рис. 5.

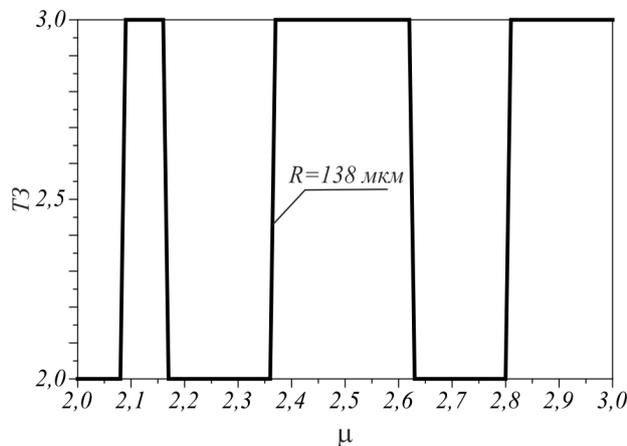


Рис. 4. Зависимость ТЗ пучка от  $\mu$  для диапазона значений  $2 < \mu < 3$ , рассчитанного вдоль окружности радиуса  $R = 138$  мкм

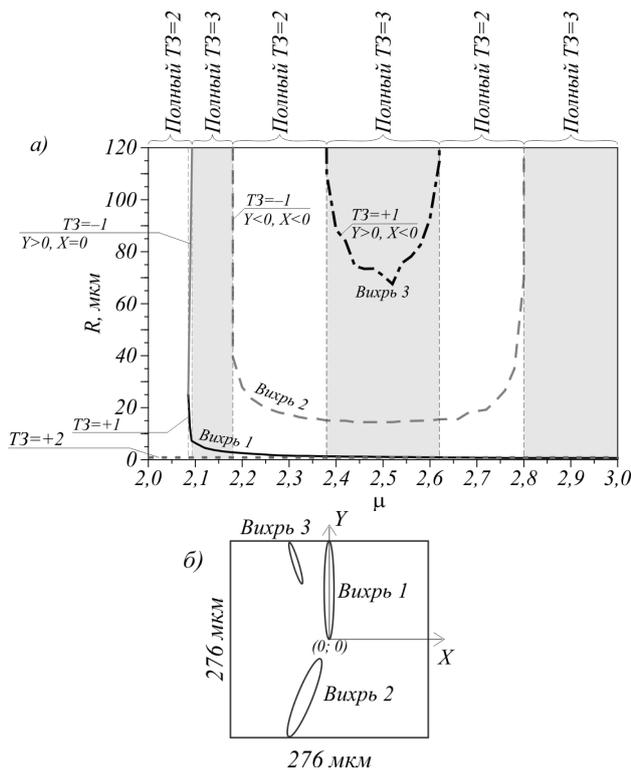


Рис. 5. Распределение трех вихрей с ТЗ +1 и -1, появляющихся в поле при  $2 < \mu < 3$  (а), и их схематичное расположение в поле (б)

Заметим, что, если бы мы определяли ТЗ пучка по окружности радиуса  $R < 20$  мкм, увидели бы только один дополнительный вихрь с ТЗ +1, который бы изменил ТЗ пучка с 2 до 3 при  $\mu > 2,1$ . Если бы мы измеряли ТЗ вдоль окружности радиуса  $R < 60$  мкм, то мы увидели бы только 2 дополнительных вихря с ТЗ

+1 сверху ( $y > 0$ ) и с ТЗ -1 снизу ( $y < 0$ ). На рис. 5 ТЗ пучка измерялся вдоль окружности радиуса  $R = 138$  мкм и поэтому видны три вихря, которые порождаются 3 оптическими «диполями». Эти три вихря (непрерывная, пунктирная и штрихпунктирная кривые на рис. 5) описывают скачки ТЗ пучка в диапазоне  $2 < \mu < 3$ . Из рис. 5 видно, что в диапазоне  $2 < \mu < 2,1$  внутри окружности радиуса  $R = 138$  мкм присутствует только основной вихрь в центре с ТЗ 2. В диапазоне  $2,1 < \mu < 2,2$  в поле расчета появляется дополнительный вихрь с ТЗ +1 и ТЗ всего пучка становится равен 3. При  $2,2 < \mu < 2,37$  в поле расчета попадают два дополнительных вихря с ТЗ +1 и -1, которые взаимно компенсируются, и ТЗ пучка опять становится равным 2. В диапазоне  $2,37 < \mu < 2,63$  в поле присутствуют основной вихрь с ТЗ 2 и три дополнительных, 2 из которых взаимно компенсируют друг друга, и итоговый ТЗ пучка равен 3. В диапазоне  $2,63 < \mu < 2,8$  третий (он же дальний) дополнительный вихрь с ТЗ +1 покидает область расчета (окружность радиуса  $R = 138$  мкм), а оставшиеся два дополнительных вихря взаимно компенсируют свой вклад, и ТЗ пучка становится равен 2. И в диапазоне  $2,8 < \mu < 3$  нижний ( $y < 0$ ) дополнительный вихрь с ТЗ -1 покидает область расчета, в которой остаются центральный вихрь с ТЗ 2 и дополнительный вихрь, почти слившийся с основным, с ТЗ 1, и ТЗ пучка становится равен 3. Заметим, что третий диполь, который наиболее удален от центра пучка, так же как другие два диполя, сформировался из краевой дислокации. Скорее всего, при увеличении радиуса окружности  $R$  можно будет обнаружить и другие оптические «диполи», которые порождаются либо верхней ( $y > 0$ ), либо нижней ( $y < 0$ ) краевыми дислокациями.

### Заключение

В данной работе с помощью расчета поля оптического вихря с начальным дробным топологическим зарядом непараксиальным интегралом Рэлея-Зоммерфельда и с помощью расчета топологического заряда по окружности большого радиуса, проходящей по периферии в сечении пучка, где интенсивность почти равна нулю, определена динамика движения дополнительных вихрей в зависимости от изменения дробной части заряда в двух диапазонах [2, 3] и [3, 4]. Показано, что дополнительные оптические вихри формируются из двух вертикальных краевых дислокаций в виде «диполей», состоящих из пары вихрей с зарядами +1 и -1. При увеличении дробной части топологического заряда от 0 до 1 оптические вихри диполей ведут себя по-разному. В одном диполе вихрь с зарядом +1 смещается к оптической оси и в итоге сливается с основным осевым вихрем, а другой вихрь из диполя с зарядом -1 смещается на периферию и в итоге пропадает на бесконечности. В

другом диполе вихри ведут себя обратным образом: вихрь с зарядом +1 смещается на периферию пучка и уходит на бесконечность, а вихрь с зарядом –1 приближается к центру пучка, пока дробная часть увеличивается от 0 до 0,5. А при дальнейшем увеличении дробной части начального заряда от 0,5 до 1 вихрь с зарядом –1, который смещался к центру пучка, начинает удаляться от центра на периферию пучка. Обнаруженная динамика смещения дополнительных вихрей в пучке определяет скачки целого топологического заряда пучка, например, от 2 к 3 и от 3 к 2, если рассматривается диапазон изменения дробного заряда [2, 3]. Причем в диапазоне [2, 3] таких скачков 5, а в диапазоне [3, 4] таких скачков 3. Это обусловлено тем, что при переходе от четного к нечетному целому заряду в поле пучка формируется не два диполя, а три, и в сечении пучка присутствуют три дополнительных вихря. Таким образом, непараксиальное рассмотрение распределения фазы в пучке с начальным дробным топологическим зарядом позволило более детально проследить изменение (скачки) целого заряда в дальней зоне пучка. Ранее, согласно теории [20] и экспериментам [22–26], учитывался только один «диполь», ближайший к центру пучка. В работах [26, 27] учитывались неявно «два диполя», но движение оптических вихрей, входящих в эти диполи, не было исследовано. А влияние третьего «диполя» на формирование заряда пучка было замечено впервые. Заметим, что если бы была возможность рассчитать амплитуду и фазу в круге бесконечного радиуса, то были бы обнаружены все имеющиеся «диполи», в которых вихри входят парами с зарядами +1 и –1, и поэтому ТЗ поля не претерпевал бы скачков, про которые говорилось в данной работе. Оптические вихри и их диполи, которые рассматриваются в данной работе, находятся далеко от оптической оси, там, где интенсивность почти нулевая, и поэтому нельзя с помощью подсчета вилочек на интерферограмме зарегистрировать в эксперименте эти диполи. Но их физический смысл в том, что они появляются парами с зарядами +1 и –1, и поэтому не меняют ТЗ светового поля. Проще говоря, ТЗ поля определен, только когда он целый, а если он дробный, то возникает «иллюзия», что появляется дополнительный вихрь и меняет ТЗ на 1. Это «иллюзия» потому, что у появившегося дополнительного вихря с ТЗ +1 есть «напарник» с ТЗ –1, который расположен далеко от оптической оси и не учитывается при подсчете числа дислокаций.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Постановка задачи», за счет гранта Самарскому университету на реализацию программы стратегического академического лидерства

«Приоритет-2030 в части «Топологический заряд пучка в дальней зоне при начальном ТЗ  $3 < \mu < 4$ », а также при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Топологический заряд пучка в дальней зоне при начальном ТЗ  $2 < \mu < 3$ ».

### **References**

- [1] Ruffato G. OAM-inspired new optics: the angular metalens. *Light Sci Appl* 2021, 10: 96.
- [2] Guo Y, Zhang S, Luo X. Spin-decoupled metasurface for simultaneous detection of spin and orbital angular momenta via momentum transformation. *Light Sci Appl* 2021; 10: 63.
- [3] Jin Z, Janoschka D, Deng J, Ge L, Dreher P, Frank B, Hu G, Ni J, Yang Y, Li J, Yu C, Lei D, Li G, Xiao S, Mei S, Giessen H, zu Heringdorf FM, Qiu C-W. Phyllotaxis-inspired nanosieves with multiplexed orbital angular momentum. *eLight* 2021; 1: 5.
- [4] Wei D, Cheng Y, Ni R, Zhang Y, Hu X, Zhu S, Xiao M. Generating controllable Laguerre-Gaussian laser modes through intracavity spin-orbital angular momentum conversion of light. *Phys Rev Appl* 2019; 11: 014038.
- [5] Stella V, Grogjeon T, De Leo N, Boarino L, Munzert P, Lakowicz JR, Descrovi E. Vortex beam generation by spin-orbit interaction with Bloch surface waves. *ACS Photonics* 2020; 7: 774-783.
- [6] Arikawa T, Hiraoka T, Morimoto S, et al. Transfer of optical angular momentum of light to plasmonic excitations in metamaterials. *Sci Adv* 2020; 6(24): 253.
- [7] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG, O'Faolain L, Kotlyar MV. A dual-functionality metalens to shape a circularly polarized optical vortex or a second-order cylindrical vector beam. *Photonics Nanostruct* 2021; 43: 100898. DOI: 10.1016/j.photonics.2021.100898.
- [8] Zhu L, Tang M, Li H, Tai Y, Li X. Optical vortex lattice: an exploitation of orbital angular momentum. *Nanophotonics* 2021; 10: 0139.
- [9] Fu S, Zhai Y, Zhang J, Liu X, Song R, Zhou H, Gao C. Universal orbital angular momentum spectrum analyser for beams. *Photonix* 2020; 1: 19.
- [10] Fatkhiev DM, Butt MA, Grakhova EP, Kutluyarov RV, Stepanov IV, Kazanskiy NL, Khonina SN, Lyubopytov VS, Sultanov AK. Recent advances in generation and detection of orbital angular momentum optical vortices – A Review. *Sensors* 2021; 21(15): 4988. DOI: 10.3390/s21154988.
- [11] Zhu L, Wang J. A review of multiple optical vortices generation: methods and applications. *Front Optoelectr* 2019; 12(1): 52-68.
- [12] Andrews DL. Symmetry and quantum features in optical vortices. *Symmetry* 2021; 13: 1368.
- [13] Wang X, Nie Z, Liang Y, Wang J, Li T, Jia B. Recent advances on optical vortex generation. *Nanophotonics* 2018; 7(9): 1533-1556.
- [14] Chen R, Zhou H, Moretti M, Wang X, Li J. Orbital angular momentum waves: generation, detection and emerging applications. *IEEE Commun Surv Tutor* 2020; 22(2): 840-868.
- [15] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. *Nat Photonics* 2021; 15: 253-262.
- [16] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation

- from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 2019; 8: 90.
- [17] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. *Vortex laser beams*. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-1385-4211-2.
- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA. *Accelerating and vortex laser beams*. Boca Raton: CRC Press; 2019. ISBN: 978-0-4293-2161-0.
- [19] Capasso F, Couwenberg D, eds. *Frontiers in optics and photonics*. de Gruyter GmbH; 2021.
- [20] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268.
- [21] Gbur G. Fractional vortex Hilbert's hotel. *Optica* 2016; 3(3): 222-225.
- [22] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chavez-Cerda S. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 053904.
- [23] Mourka A, Baumgartl J, Shanor C, Dholakia K, Wright EM. Visualization of the birth of an optical vortex using diffraction from a triangular aperture. *Opt Express* 2011; 19(7): 5760-5771.
- [24] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [25] Leach J, Yao E, Padgett MJ. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam. *New J Phys* 2004; 6: 71.
- [26] Gotte JB, Franke-Arnold S, Zambrini R, Barnett SM. Quantum formulation of fractional orbital angular momentum. *J Mod Opt* 2007; 54(12): 1723-1738.
- [27] Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS, Hickmann JM. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone. *Opt Lett* 2012; 37(21): 4552-4554.
- [28] Wen J, Wang L, Yang X, Zhang J, Zhu S. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams. *Opt Express* 2019; 27(4): 5893-5904.
- [29] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt Express* 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
- [30] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Porfirev AP. Evolution of an optical vortex with an initial fractional topological charge. *Phys Rev A* 2020; 102(2): 023516. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.023516.
- [31] Nalimov AG, Kotlyar VV, Soifer VA. Modeling of an image forming by a zone plate in X-ray. *Computer Optics* 2011; 35(3): 290-296.
- [32] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Vortex avalanche in the perturbed singular beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36: 1064-1071.

#### Сведения об авторах

**Налимов Антон Геннадьевич**, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 140 работ и 3 патентов. E-mail: [anton@smr.ru](mailto:anton@smr.ru).

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** см. стр. 188 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 19 ноября 2021 г. Окончательный вариант – 13 декабря 2021 г.

---

# Topological charge of optical vortices in the far field with an initial fractional charge: optical "dipoles"

A.G. Nalimov<sup>1,2</sup>, V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

In this work, using the Rayleigh-Sommerfeld integral and the Berry formula, the topological charge (TC) of a Gaussian optical vortex with an initial fractional TC is calculated. It is shown that for different fractional parts of the TC, the beam contains a different number of screw dislocations, which determine the TC of the entire beam. With a small fractional part of the TC, the beam consists of the main optical vortex centered on the optical axis with the TC equal to the nearest integer (let be  $n$ ), and two edge dislocations located on the vertical axis (above and below the center). With an increase in the fractional part of the initial TC, a "dipole" is formed from the upper edge dislocation, consisting of two vortices with TC + 1 and – 1. With a further increase in the fractional part, the additional vortex with TC + 1 is displaced to the center of the beam, and the vortex with TC – 1 is displaced to the periphery. With a further increase in the fractional part of the TC, another "dipole" is formed from the lower edge dislocation, in which, on the contrary, the vortex with TC – 1 is displaced to the optical axis (to the center of the beam), and the vortex with TC + 1 is displaced to the beam periphery. When the fractional part of the TC becomes equal to 1/2, the "lower" vortex with TC – 1, which was displaced to the center of the beam, begins to shift to the periphery, and the "upper" vortex with TC + 1 moves closer and closer to the center of the beam and merges with the main vortex when the fractional part approaches 1. Such dynamics of additional vortices with upper TC + 1 and lower TC – 1 determine the whole TC the beam have ( $n$  or  $n + 1$ ) for different values of the fractional part from the segment  $[n, n + 1]$ .

**Keywords:** vector light beam, fractional topological charge, optical vortex, dipole from two vortices.

**Citation:** Nalimov AG, Kotlyar VV. Topological charge of optical vortices in the far field with an initial fractional charge: optical "dipoles". *Computer Optics* 2022; 46(2): 189-195. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1073.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Science Foundation grant #18-19-00595 (in part definition of the problem), the Samara University grant under the strategic academic leadership program “Priority-2030” (in part “Topological charge of the beam in the far field for initial TC  $3 < \mu < 4$ ”), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the "Crystallography and Photonics" Research Center of the RAS (in part “Topological charge of the beam in the far field for initial TC  $2 < \mu < 3$ ”).

---

## Authors' information

**Anton Gennadyevich Nalimov** (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical modeling and program complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: [anton@smr.ru](mailto:anton@smr.ru).

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

---

Received November 19, 2021. The final version – December 13, 2021.

---