

Фокусировка вихревого пучка с круговой поляризацией: спиновый, орбитальный и общий угловой момент

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.М. Телегин²

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

На основе формализма Ричардса–Вольфа получены два разных точных выражения для плотности углового момента света в фокусе оптического вихря с топологическим зарядом n и с правой круговой поляризацией. Одно выражение для плотности углового момента получается как векторное произведение радиус-вектора на вектор Пойнтинга и имеет ненулевое значение в фокусе для произвольного целого числа n . Другое выражение для плотности углового момента равно сумме орбитального углового момента и спинового углового момента и в фокусе рассматриваемого светового поля равно нулю при $n = -1$. Оба эти выражения не равны друг другу в каждой точке пространства, но их трёхмерные интегралы равны. Таким образом, получены точные выражения для плотностей углового момента (УМ), спинового углового момента (СУМ) и орбитального углового момента (ОУМ) в фокусе оптического вихря с правой круговой поляризацией, и показано, что тождество для плотностей $УМ = СУМ + ОУМ$ неверно. Кроме того, показано, что выражения для векторов напряжённости электрического и магнитного полей вблизи острого фокуса, полученные на основе формализма Ричардса–Вольфа, являются точными решениями уравнений Максвелла. Таким образом, теория Ричардса–Вольфа точно описывает поведение света вблизи острого фокуса в свободном пространстве.

Ключевые слова: вихревой пучок, фокусировка; формулы Ричардса–Вольфа; угловой момент; орбитальный угловой момент; спиновый угловой момент; уравнения Максвелла.

Цитирование: Котляр, В.В. Фокусировка вихревого пучка с круговой поляризацией: спиновый, орбитальный и общий угловой момент / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 4. – С. 524–532. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1289.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Focusing a vortex beam with circular polarization: angular momentum. Computer Optics 2023; 47(4): 524–532. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1289.

Введение

Угловой момент (УМ) света является важным свойством непараксиальных световых полей с различным состоянием поляризации [1, 2]. Угловой момент света можно разложить на спиновый угловой момент (СУМ) и орбитальный угловой момент (ОУМ) [3, 4]. Особый интерес представляет изучение УМ в остром фокусе света [5, 6]. Угловому моменту света посвящен недавний обзор [7]. Ряд работ [8–10] посвящен спин-орбитальному преобразованию, присутствующему угловому моменту и особенно заметному в остром фокусе. В остром фокусе проявляются интересные оптические явления, связанные с УМ и со спин-орбитальной конверсией: эффект Холла [11–15], «фотонные колеса» [16], обратный поток энергии [17, 18]. Поведение света в остром фокусе адекватно описывается теорией Ричардса–Вольфа [19]. В [20, 21] показано, что вектор Пойнтинга (поток электромагнитной энергии) представляет собой сумму двух векторов: орбитального потока и спинового потока. Спиновый поток не несёт световой энергии, хотя он формирует вектор СУМ, который может быть передан поглощающей малой частице и вращать её вокруг

своего центра масс. Наличие спиновой составляющей в векторе Пойнтинга объясняет причину обратного потока в фокусе [17]. Если спиновый поток имеет отрицательную продольную составляющую (параллельную оптической оси) и она превосходит по величине орбитальный поток энергии (канонический поток энергии), то в этой области пространства вектор Пойнтинга имеет отрицательную продольную составляющую.

В данной работе на основе формализма Ричардса–Вольфа получены точные выражения для продольных компонент векторов УМ, СУМ и ОУМ в фокальной плоскости оптического вихря с правой круговой поляризацией. Оказалось, что сумма СУМ и ОУМ не равна УМ. Мы нашли в литературе [22] общее выражение для вектора УМ через векторы СУМ и ОУМ. Оказалось, что только полный (проинтегрированный по всему пространству) УМ равен сумме полных моментов СУМ и ОУМ.

1. Компоненты векторов электрического и магнитного полей в фокусе

Рассмотрим начальное световое поле, у которого поперечные компоненты вектора электрической напряжённости описываются следующим вектором Джонса:

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = \frac{A(\theta)}{\sqrt{2}} \exp(in\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где φ – азимутальный угол в плоскости выходного зрачка апланатической оптической системы, θ – полярный угол, описывающий наклон световых лучей к оптической оси, $A(\theta)$ – амплитуда начального светового поля (вещественнозначная функция), радиально симметричная относительно оптической оси, n – топологический заряд оптического вихря (целое число), $(1, i)$ – транспонированный вектор Джонса для правой круговой поляризации. Для начального поля (1), острого сфокусированного апланатической системой (идеальной сферической линзой), формализм Ричардса–Вольфа [19] позволяет получить все компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей вблизи острого фокуса [23]:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i^{n-1}}{\sqrt{2}} e^{in\varphi} (I_{0,n} + e^{2i\varphi} I_{2,n+2}), \\ E_y &= \frac{i^n}{\sqrt{2}} e^{in\varphi} (I_{0,n} - e^{2i\varphi} I_{2,n+2}), \\ E_z &= -\sqrt{2} i^n e^{i(n+1)\varphi} I_{1,n+1}, \\ H_x &= \frac{-i^n}{\sqrt{2}} e^{in\varphi} (I_{0,n} + e^{2i\varphi} I_{2,n+2}), \\ H_y &= \frac{i^{n-1}}{\sqrt{2}} e^{in\varphi} (I_{0,n} - e^{2i\varphi} I_{2,n+2}), \\ H_z &= \sqrt{2} i^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} I_{1,n+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $I_{v,\mu}$ в (2) обозначают следующие интегралы, где первый индекс – тип интеграла ($v=0, 1, 2$), а второй индекс ($\mu=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) равен порядку функции Бесселя $J_\nu(\xi)$ под интегралом:

$$I_{v,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(\xi) d\theta, \quad (3)$$

где $k=2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , f – фокусное расстояние апланатической системы, (r, φ, z) – цилиндрические координаты, θ_0 – максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий числовую апертуру апланатической линзы $NA = \sin(\theta_0)$, $\xi = kr \sin(\theta)$. Выражения (2) позволяют получить выражения для всех основных характеристик света в фокусе (при $z=0$).

2. Интенсивность света, вектор Пойнтинга и вектор спинового углового момента в фокусе

Из уравнения (2) получим выражение для распределения интенсивности в фокусе поля (1):

$$\begin{aligned} I(r, \varphi, z=0) &= |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 = \\ &= I_{0,n}^2 + I_{2,n+2}^2 + 2I_{1,n+1}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Как видно из (4), интенсивность в фокусе не зависит от азимутального угла φ , то есть радиально-симметрична. На оптической оси ($r=0$) интенсивность отлична от нуля только при $n=0, -1, -2$. При других значениях n интенсивность (4) на оптической оси равна нулю, то есть в фокусе имеется световое кольцо.

Далее с помощью уравнения (2) получим выражения для компонент вектора Пойнтинга (потока энергии) в фокусе поля (1). Вектор Пойнтинга \mathbf{P} в общем случае определяется выражением [19]:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}), \quad (5)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} – векторы напряжённости электрического и магнитного полей, знаки «*» и « \times » означают комплексное сопряжение и векторное произведение, Re – действительная часть комплексного числа, а c – скорость света в вакууме. Далее будем опускать константу $c/(2\pi)$. Тогда для компонент вектора потока энергии в фокусе получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_x &= -Q(r) \sin \varphi, \\ P_y &= Q(r) \cos \varphi, \\ P_z &= I_{0,n}^2 - I_{2,n+2}^2, \\ Q(r) &= I_{1,n+1} (I_{0,n} + I_{2,n+2}). \end{aligned} \quad (6)$$

В цилиндрических координатах вектор Пойнтинга в фокусе поля (1) имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} P_r &= 0, \\ P_\varphi &= Q(r), \\ P_z &= I_{0,n}^2 - I_{2,n+2}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно из уравнения (7), поток энергии в поперечной плоскости вращается против часовой стрелки, если $Q(r) > 0$, и по часовой стрелке, если $Q(r) < 0$. Поперечный поток энергии вблизи оптической оси, например, при $n=0$ ($Q(r) > 0$, $kr \ll 1$), поворачивается против часовой стрелки аналогично вращению вектора поляризации исходного поля (1). Интересно, что и при $n=-1$, и при $n=-2$ вблизи оптической оси $Q(r) < 0$ и поперечный поток энергии вращается в противоположном направлении (по часовой стрелке), тогда как при $n=-1$ и при $n=-2$ энергия вблизи оптической оси течет в разные стороны:

$$\begin{aligned} P_{z,-1} &= I_{0,1}^2 - I_{2,1}^2 = \underbrace{(I_{0,1} - I_{2,1})}_{>0} \underbrace{(I_{0,1} + I_{2,1})}_{>0} > 0, \\ P_{z,-2} &= I_{0,2}^2 - I_{2,0}^2 < 0, \quad kr \ll 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Обратный поток энергии в фокусе изучался ранее в [17, 18, 23]. В [17] начальное поле до фокусировки имело круговую поляризацию, а в [18, 23] оно имело поляризационные сингулярности. Далее получим компоненты вектора СУМ в фокусе начального поля (1). Вектор СУМ определяется по формуле [4–6]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi\omega} \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}), \quad (9)$$

где Im обозначает мнимую часть комплексного числа, а ω – угловую частоту света. Далее мы опустим константу $1/(8\pi\omega)$. Тогда выражения для компонент вектора СУМ (9) в фокусе начального поля (1) полностью аналогичны компонентам вектора Пойнтинга (7):

$$\begin{aligned} S_r &= 0, \\ S_\phi &= Q(r), \\ S_z &= I_{0,n}^2 - I_{2,n+2}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно (10), поперечная составляющая вектора СУМ поворачивается в фокусе против часовой стрелки или по часовой стрелке в тех же случаях, что и поперечный поток энергии. Интересно, что при $n = -2$, когда имеется обратный поток энергии ($P_z < 0$) в фокусе на оптической оси, продольная составляющая вектора СУМ (10) также отрицательна: $S_{z,-2} = I_{0,2}^2 - I_{2,0}^2 < 0$. Это означает, что вблизи оптической оси в фокусе вектор поляризации вращается по часовой стрелке (левая круговая поляризация), хотя круговая поляризация в исходной плоскости (1) правая. Такое изменение направления вращения поляризации в фокусе может быть индикатором для обнаружения обратного потока в фокусе. Ненулевой поперечный вектор СУМ в фокусе означает, что в продольных плоскостях (x, z) и (y, z) вблизи фокальной плоскости имеется правая или левая круговая поляризация, то есть векторы поляризации вращаются, напоминая фотонные колёса [16].

3. Угловой момент и орбитальный угловой момент в фокусе

Далее получим продольную составляющую векторов УМ и ОУМ в фокусе поля (1). Вектор УМ задается следующей формулой [24]

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2c} \text{Re}(\mathbf{r} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H})) = \frac{2\pi}{c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{P}), \quad (11)$$

где все обозначения описаны выше. Далее будем опускать константу $2\pi/c^2$. Тогда продольная компонента УМ в фокусе поля (1) равна

$$J_z = rP_\phi = rQ(r). \quad (12)$$

С другой стороны, известно, что вектор УМ представляет собой сумму векторов СУМ и ОУМ [24]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{S} + \mathbf{L} = \frac{1}{8\pi\omega} \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) + \\ &+ \frac{1}{8\pi\omega} \sum_{p=x,y,z} \text{Im}(E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что первая работа по угловому моменту света [24] содержит выражение (13) без вывода из выражения (11).

Далее для краткости будем опускать постоянную $1/(8\pi\omega)$ в уравнении (13). Первое слагаемое в (13) в фокусе уже получено выше, в формуле (10), и теперь получим второе слагаемое в (13). Таким образом, получим продольную составляющую вектора ОУМ в фокусе поля (1):

$$\begin{aligned} L_z &= \text{Im} \left(E_x^* \frac{\partial}{\partial \phi} E_x + E_y^* \frac{\partial}{\partial \phi} E_y + E_z^* \frac{\partial}{\partial \phi} E_z \right) = \\ &= nI_{0,n}^2 + (n+2)I_{2,n+2}^2 + 2(n+1)I_{1,n+1}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Как видно из (14), световое поле (1) в фокусе имеет ненулевую продольную компоненту ОУМ при произвольном значении n . Интересно, что если $n \geq 0$, то ОУМ положительный ($L_z > 0$), а если $n \leq -2$, то ОУМ отрицательный ($L_z < 0$). Если $n = -1$, ОУМ может быть как отрицательным, так и положительным. Даже при $n = 0$, когда оптический вихрь отсутствует и остаётся только круговая поляризация (1), продольная компонента ОУМ отлична от нуля и равна

$$L_{z,0} = 2I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2 \geq 0. \quad (15)$$

Согласно (15), за счет спин-орбитальной конверсии круговая поляризация безвихревого поля (1) генерирует в фокусе неотрицательную продольную компоненту вектора ОУМ. Эта компонента равна нулю только на оптической оси. Уравнение (15) показывает, что в фокусе поперечный поток энергии вращается против часовой стрелки.

С помощью (10) можно получить выражение для продольной составляющей вектора УМ в фокусе поля (1):

$$\begin{aligned} J_z &= S_z + L_z = \\ &= (n+1)(I_{0,n}^2 + I_{2,n+2}^2 + 2I_{1,n+1}^2) = (n+1)I. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) показывает, что продольная компонента УМ в фокусе равна интенсивности света в фокусе, умноженной на сумму топологического заряда n и «спина» начального поля, равного 1. Уравнение (16) также показывает, что в отличие от ОУМ (14) продольная компонента УМ в фокусе не всегда отлична от нуля. Если $n = -1$, угловой момент (16) в фокусе равен нулю. Это означает, что оптический вихрь с топологическим зарядом $n = -1$ компенсирует влияние правой круговой поляризации:

$$J_{z,-1} = 0 = S_{z,-1} + L_{z,-1}, \quad (17)$$

то есть продольная составляющая СУМ равна по величине продольной составляющей ОУМ и направлена в противоположную сторону: $S_{z,-1} = -L_{z,-1} = I_{0,1}^2 - I_{2,1}^2$. Можно показать, что продольная компонента УМ для оптического вихря с левой круговой поляризацией, в отличие от (16), равна

$$J_z = (n-1)(I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + 2I_{1,n-1}^2) = (n-1)I. \quad (18)$$

Сравнение формул (16) и (18) показывает, что продольная компонента УМ в фокусе пропорциональна алгебраической сумме нормированных ОУМ начального поля n и спина $\sigma = \pm 1$.

4. Равен ли УМ сумме ОУМ и СУМ?

В этом параграфе мы рассмотрим некоторое противоречие, которое нам не удалось полностью разрешить и которому мы не нашли объяснения в литературе [6–10]. Дело в том, что уравнение (13) не может быть получено из уравнения (11). Для начального светового поля (1) формула (16) указывает на то, что УМ в фокусе равен нулю при $n = -1$. Однако согласно уравнению (12) УМ в фокусе того же поля (1) при $n = -1$ отличен от нуля: $J_{z,-1} = rI_{1,0}(-I_{0,1} + I_{2,1}) \neq 0$. Действительно, поскольку вектор Пойнтинга \mathbf{P} в (11) можно представить в виде суммы двух потоков [20]: орбитального потока \mathbf{P}_o и спинового потока \mathbf{P}_s ($\mathbf{P} = \mathbf{P}_o + \mathbf{P}_s$), то вместо уравнения (11) получим (опустив константу):

$$\mathbf{J} = (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_o) + (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_s) = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \tag{19}$$

В уравнении (19) орбитальный поток и спиновой поток равны [21]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_o &= \frac{1}{2\omega} \text{Im}(\mathbf{E}^* \cdot (\nabla) \mathbf{E}), \\ \mathbf{P}_s &= \frac{1}{4\omega} \nabla \times \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}), \end{aligned} \tag{20}$$

где ω – угловая (циклическая) частота монохроматического света. Опуская константу $1/(2\omega)$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_o &= \text{Im}(\mathbf{E}^* \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \mathbf{E}) = \\ &= \sum_{p=x,y,z} \text{Im}(E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p), \end{aligned} \tag{21}$$

но мы не смогли показать, что

$$\mathbf{S} = (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_s) = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \nabla \times \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E})) = \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}). \tag{22}$$

Физическая причина заключается в том, что, несмотря на присутствие спинового потока \mathbf{P}_s в выражении для вектора Пойнтинга, он не несет энергии. Поскольку дивергенция ротора равна нулю, спиновый поток \mathbf{P}_s не даёт вклада в дифференциальный закон сохранения световой энергии (без токов и зарядов): $\partial W / \partial t = \text{div } \mathbf{P}$, где W – плотность световой энергии, t – время. Однако спиновый поток \mathbf{P}_s порождает СУМ \mathbf{S} , который входит в выражение для углового момента (19) и может физически наблюдаться при вращении малой поглощающей частицы вокруг своего центра масс. В Интернете мы нашли единственную работу [22], где формально решена вышеуказанная проблема. В [22] показано, что выполняется следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int \text{Re}(\mathbf{r} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H})) dv &= \int \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) dv + \\ &+ \int \sum_{p=x,y,z} \text{Im}(E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p) dv. \end{aligned} \tag{23}$$

Интегралы в (23) вычисляются по всему трёхмерному пространству, так как при выводе уравнения (23) предполагается, что амплитуда светового поля \mathbf{E} стремится к нулю на бесконечности. Действительно, если заменить в (23) магнитное поле на ротор электрического поля, получим

$$\hat{\mathbf{J}} = \text{Im} \iiint (\mathbf{r} \times (\mathbf{E}^* \times \text{rot } \mathbf{E})) d^3 \mathbf{r}. \tag{24}$$

Для разложения общего УМ на СУМ и ОУМ используем следующее векторное тождество

$$\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{B}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \tag{25}$$

где $\nabla_{\mathbf{B}}$ – индекс Фейнмана, означающий дифференцирование только векторного поля \mathbf{B} [25].

Тогда получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}} &= \text{Im} \iiint \left[\sum_{p=x,y,z} E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p - \right. \\ &\left. - (\mathbf{E}^* \cdot \nabla)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) \right] d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{26}$$

Первое и третье слагаемые в этом выражении – это как раз суммарный ОУМ $\hat{\mathbf{L}}$ и суммарный СУМ $\hat{\mathbf{S}}$. Второе слагаемое можно преобразовать интегрированием по частям:

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \text{Im} \iiint [(\nabla \cdot \mathbf{E}^*)(\mathbf{r} \times \mathbf{E})] d^3 \mathbf{r} + \hat{\mathbf{S}}, \tag{27}$$

где

$$\hat{\mathbf{L}} = \iiint \mathbf{L} d^3 \mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \iiint \mathbf{S} d^3 \mathbf{r}. \tag{28}$$

Второе слагаемое под интегралом в (27) для суммарного УМ пропорционально дивергенции электрического поля и, таким образом, равно нулю. Тогда суммарный УМ равен сумме суммарных СУМ и ОУМ, то есть равен выражению (23). Таким образом, второе равенство в (19) для плотности УМ неверно. Вместо этого справедливо только интегральное равенство (23). Правильное выражение для плотности УМ следует из уравнения (26) и имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{Im} \left\{ \sum_{p=x,y,z} E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p - \right. \\ &\left. - (\mathbf{E}^* \cdot \nabla)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) \right\} = \\ &= \mathbf{L} - \text{Im} \{ (\mathbf{E}^* \cdot \nabla)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \} + \mathbf{S}. \end{aligned} \tag{29}$$

Второе слагаемое в (29) не имеет физического смысла, так как обращается в нуль при интегрировании (26).

5. Световое поле в фокусе, полученное по теории Ричардса–Вольфа, является решением уравнений Максвелла

В этом параграфе мы получим выражения для магнитного поля (2) из выражений для электрического поля, используя уравнения Максвелла для монохроматического света. Вектор напряжённости магнитного поля монохроматического света связан с вектором напряжённости электрического поля известным выражением:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \text{rot } \mathbf{E}, \quad (30)$$

где μ_0 и μ – соответственно магнитная проницаемость свободного пространства и среды. Для продольной составляющей магнитного поля получим:

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} (\text{rot } \mathbf{E})_z = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \left[\frac{1}{r} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] = \\ &= \frac{k}{\omega\mu_0\mu} \left[\sqrt{2} i^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} I_{1,n+1} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

При выводе использовались следующие вспомогательные выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (I_{0,n} - I_{2,n+2}) &= \frac{n}{r} I_{0,n} + \frac{n+2}{r} I_{2,n+2} - 2kI_{1,n+1}, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} &= \frac{i^n}{\sqrt{2}} e^{i(n+1)\varphi} \left(\frac{n}{r} I_{0,n} + \frac{n+2}{r} I_{2,n+2} - 2kI_{1,n+1} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично получим выражения для поперечных компонент магнитного поля в полярных, а затем и в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} (\text{rot } \mathbf{E})_r = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{-k}{\sqrt{2}} i^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} (I_{0,n} + I_{2,n+2}), \\ H_\varphi &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} (\text{rot } \mathbf{E})_\varphi = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{k}{\sqrt{2}} i^n e^{i(n+1)\varphi} (I_{0,n} - I_{2,n+2}), \\ H_x &= H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi = \\ &= \frac{k}{\omega\mu_0\mu} \frac{-i^n}{\sqrt{2}} e^{in\varphi} (I_{0,n} + e^{2i\varphi} I_{2,n+2}), \\ H_y &= H_\varphi \cos \varphi + H_r \sin \varphi = \\ &= \frac{k}{\omega\mu_0\mu} \frac{i^{n-1}}{\sqrt{2}} e^{in\varphi} (I_{0,n} - e^{2i\varphi} I_{2,n+2}). \end{aligned} \quad (33)$$

Если опустить постоянный множитель $k/(i\omega\mu_0\mu)$, то последние два выражения в (33) и выражение (31)

совпадают с декартовыми компонентами магнитного поля в (2). Для вывода выражений (33) использовались вспомогательные выражения, аналогичные (32):

$$\frac{\partial}{\partial z} (I_{0,n} - I_{2,n+2}) = ikI_{0,n} + ikI_{2,n+2} - 2i \frac{n+1}{r} I_{1,n+1}. \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (I_{0,n} + I_{2,n+2}) = ikI_{0,n} - ikI_{2,n+2} - 2i \frac{\partial}{\partial r} I_{1,n+1}. \quad (35)$$

Найдём также дивергенцию магнитного поля. В цилиндрических координатах она равна

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{r} H_r + \frac{\partial}{\partial r} H_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Подставляя сюда составляющие (31) и (33), получим:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{H} &= \frac{ki^n e^{i(n+1)\varphi}}{\omega\mu_0\mu\sqrt{2}} \times \\ &\times \left[\frac{n}{r} I_{0,n} - \frac{n+2}{r} I_{2,n+2} - \frac{\partial}{\partial r} (I_{0,n} + I_{2,n+2}) + 2i \frac{\partial}{\partial z} I_{1,n+1} \right]. \end{aligned}$$

С помощью формул для производной функции Бесселя для функций (3) нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial r} (I_{0,n} + I_{2,n+2}) = \frac{n}{r} I_{0,n} - \frac{n+2}{r} I_{2,n+2} + 2i \frac{\partial}{\partial z} I_{1,n+1}.$$

Из него следует, что дивергенция поля (31), (33) равна нулю.

Поскольку компоненты светового поля вблизи фокуса (2), полученные по теории Ричардса–Вольфа, являются точными решениями уравнений Максвелла, то эта теория точно описывает световое поле в остром фокусе в свободном пространстве.

Заметим, что поле в фокусе, рассчитанное по формулам Ричардса–Вольфа [19], заведомо удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако в формуле (2) магнитные составляющие были записаны феноменологически, то есть по аналогии с электрическими составляющими, но умноженными на $-i$, так как вместо вектора Джонса $(1, i)$ у магнитного поля вектор Джонса равен $(-i, 1)$. В данном параграфе мы убедились, что такая замена не нарушает уравнения Максвелла с роторами и что эти компоненты магнитной напряжённости составляют векторное поле с нулевой дивергенцией.

6. Объяснение некоторых экспериментов по вращению микрочастиц

Интересно, что развитая выше теория объясняет эксперимент, описанный в [26]. В этой работе поглощающая микрочастица вращается по световому кольцу в остром фокусе оптического вихря с топологическим зарядом $n = 1$ и с правой круговой поляризацией. При смене правой круговой поляризации на левую

круговую поляризацию частица продолжала вращаться в том же направлении (против часовой стрелки), но с меньшей скоростью. Это явление можно объяснить следующим образом. Для сравнения поперечный поток энергии в фокусе оптического вихря с правой (7) и левой круговой поляризацией имеет вид

$$\begin{aligned} P_{\varphi,R} &= I_{1,n+1} (I_{0,n} + I_{2,n+2}), \\ P_{\varphi,L} &= I_{1,n-1} (I_{0,n} + I_{2,n-2}). \end{aligned} \quad (36)$$

Для топологического заряда $n=1$ вместо уравнения (36) получается

$$\begin{aligned} P_{\varphi,R,1} &= I_{1,2} (I_{0,1} + I_{2,3}) > 0, \\ P_{\varphi,L,1} &= I_{1,0} (I_{0,1} - I_{2,1}) > 0, \quad kr \ll 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно (37), поперечный поток энергии для вихря с левой и с правой круговой поляризацией не меняет знака, то есть световая энергия в фокальной плоскости вращается по кольцу против часовой стрелки, но имеет разную величину. Для левой круговой поляризации поток энергии меньше, чем для правой круговой поляризации. Кроме того, для вихрей с правой и левой круговой поляризацией продольная составляющая СУМ

$$\begin{aligned} S_{z,R} &= I_{0,n}^2 - I_{2,n+2}^2, \\ S_{z,L} &= -(I_{0,n}^2 - I_{2,n-2}^2), \end{aligned} \quad (38)$$

имеет разные знаки при $n=1$: СУМ положителен для правой круговой поляризации и отрицателен для левой круговой поляризации:

$$\begin{aligned} S_{z,R,1} &= I_{0,1}^2 - I_{2,3}^2 > 0, \\ S_{z,L,1} &= -(I_{0,1}^2 - I_{2,1}^2) < 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, в случае левой круговой поляризации ОУМ и СУМ вращают частицу в разные стороны. Однако в эксперименте частица вращается под действием света с левой круговой поляризацией по-прежнему против часовой стрелки. Это означает, что ОУМ света сильнее действует на частицу, чем СУМ. Именно этим объясняется вращение частицы в одном и том же направлении для обеих круговых поляризаций, но со скоростью, меньшей для левой круговой поляризации. Отметим, что в [26] нет столь подробных объяснений результатов эксперимента.

Полученные выше выражения объясняют и другой эксперимент, описанный в [27]. В этой работе в фокусе светового пучка с круговой поляризацией асферическая диэлектрическая микрочастица вращалась вокруг оптической оси. При изменении направленности поляризации (с левой на правую) частица также меняла направление своего вращения (с вращения по часовой стрелке на вращение против часовой стрелки). Это можно объяснить поперечным потоком энергии в фокусе Гауссова пучка с левой и правой поляризациями, который направлен в разные стороны и имеет одинаковую по модулю величину:

$$P_{\varphi,R} = I_{1,1} (I_{0,0} + I_{2,2}), \quad P_{\varphi,L} = -I_{1,1} (I_{0,0} + I_{2,2}). \quad (40)$$

Продольная составляющая СУМ также имеет разный знак для левой и правой круговой поляризации:

$$S_{z,R} = I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2, \quad S_{z,L} = -(I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2). \quad (41)$$

Следовательно, частица в фокусе вращается с одинаковой скоростью, но в разных направлениях для света с левой и правой круговой поляризацией.

7. Моделирование

Численное моделирование проводилось путём вычисления интегралов Дебая в рамках формализма Ричардса-Вольфа. На рис. 1 показаны распределения интенсивности I (4), а также продольных составляющих СУМ S_z (10), ОУМ L_z (14), второго слагаемого в (29) и полного УМ J_z (12) в остром фокусе вихревого поля с правой круговой поляризацией и с однородной единичной начальной амплитудой $A(\theta)=1$ (1) при $n=0, -1, -2$ и при следующих параметрах: длина волны $\lambda=532$ нм, фокусное расстояние линзы $f=10$ мкм, числовая апертура $NA=\sin \theta_0=0,95$, область расчёта – 2×2 мкм. Распределения СУМ, ОУМ, второго слагаемого в (29) и полного УМ нормированы на максимальную интенсивность, и соответствующие максимальные значения каждой величины показаны рядом с цветовой шкалой под каждым рисунком.

Как видно из рис. 1е-к, при $n=-1$ СУМ (10) и ОУМ (14) действительно компенсируют друг друга, их сумма равна нулю, а суммарный УМ (12) состоит только из одной составляющей, равной второму слагаемому в (29). При $n=-2$ (рис. 1л-п) СУМ (10) и ОУМ (14) подобны по форме, но уже не компенсируют друг друга, ОУМ больше по величине и, таким образом, вносит вклад в суммарный УМ вместе с составляющей, определяемой вторым слагаемым в (29). Эта составляющая включает внутреннее световое кольцо с отрицательной плотностью УМ и внешнее кольцо с положительной плотностью УМ. Из-за суммирования с ОУМ внешнее кольцо в суммарном УМ бледнее внутреннего. При $n=0$ (рис. 1а-д) СУМ имеет форму пятна, а ОУМ – форму кольца, и оба они положительны. Составляющая, определяемая вторым слагаемым в (29), содержит центральное пятно с отрицательным УМ и кольцо с положительным УМ. Центральное пятно компенсирует СУМ, тогда как кольцо с положительным УМ суммируется с положительным ОУМ, создавая таким образом кольцевое распределение общего положительного УМ. Таким образом, на рис. 1 показано, что суммарная продольная компонента УМ (проинтегрированная по сечению пучка) положительна при $n=0$ (рис. 1д) и будет вращать частицу размером около 1 мкм с центром на оптической оси против часовой стрелки. Суммарная продольная компонента УМ при $n=-2$ отрицательна (рис. 1п) и будет вращать маленькую частицу по часовой стрелке. Заметим, что начальная поляризация поля (1) – правая, а

вектор поляризации вращается против часовой стрелки. Тем не менее частица в фокусе должна вращаться по часовой стрелке. Суммарная продольная компонента УМ

при $n=-1$ практически равна нулю (рис. 1к), поэтому маленькая частица с центром на оптической оси, помещенная в фокус, не будет вращаться.

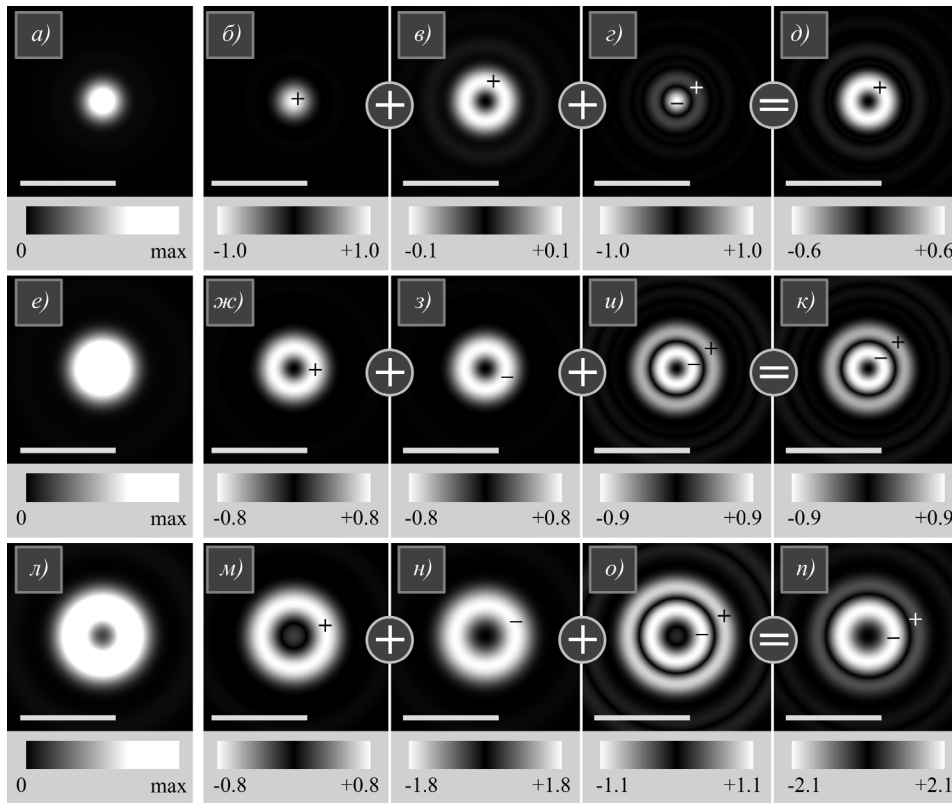


Рис. 1. Распределения интенсивности (а, е, л), а также распределения СУМ (10) (б, ж, м), ОУМ (14) (в, з, н), второго слагаемого в (29) (г, и, о) и общего УМ (12) (д, к, п) в остром фокусе плоского вихревого поля ($A(\theta) = 1$) с правой круговой поляризацией (1) при $n = 0$ (а–д), $n = -1$ (е–к), $n = -2$ (л–п) при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, фокусное расстояние фокусирующей линзы $f = 10$ мкм, числовая апертура $\sin \theta_0 = 0,95$, расчётная область 2×2 мкм. Знаки «+» и «-» означают соответственно положительные и отрицательные значения. Чёрный цвет означает ноль. Числами у цветовой шкалы под каждым рисунком показаны значения, соответствующие самому светлому цвету. Масштабная метка на всех рисунках соответствует 1 мкм

Заключение

Можно показать, что сумма полных (проинтегрированных по сечению пучка) осевых компонент СУМ и ОУМ сохраняется при фокусировке. Из (1) следует, что плотность СУМ (9) в начальной плоскости равна $S_z = 1$, а плотность ОУМ (14) равна $L_z = n$. Для полных моментов будет соответственно: $\hat{S}_z = W$, $\hat{L}_z = nW$, $\hat{S}_z + \hat{L}_z = (n+1)W$, где W – мощность пучка в начальной плоскости. В фокусе для полных СУМ из (10) и ОУМ из (14) следует, что $\hat{S}_{fz} = W_1$, $\hat{L}_{fz} = (n+1)W - W_1$, $\hat{S}_{fz} + \hat{L}_{fz} = (n+1)W$, где W_1 – некоторая часть мощности пучка. Видно, что сумма полных СУМ и ОУМ сохраняется и равна $(n+1)W$. Также видно, что часть СУМ перешла в ОУМ, так как $W_1 < W$. Это сохранение и является причиной возникновения эффекта Холла в фокусе.

В данной работе на основе формализма Ричардса–Вольфа получены простые аналитические выражения (12) для продольной компоненты вектора плотности УМ света в фокусе оптического вихря с топологическим зарядом n и с правой круговой поляризацией.

Кроме того, получены выражения для СУМ (10) и для продольной составляющей ОУМ (14). Показано, что сумма плотностей СУМ и ОУМ не равна плотности УМ. Ранее было показано, что сумма только полных (проинтегрированных по всему пространству) СУМ и ОУМ равна полному УМ светового пучка (23). Также показано в общем виде, что плотность УМ равна сумме трёх слагаемых (29): СУМ, ОУМ и некоего третьего слагаемого, не дающего вклада в общий УМ (23). Кроме того, показано, что выражения (2) для векторов напряжённости электрического и магнитного полей вблизи острого фокуса, полученные с использованием формализма Ричардса–Вольфа, являются точными решениями уравнений Максвелла (31–33). Таким образом, теория Ричардса–Вольфа точно описывает поведение света вблизи острого фокуса в свободном пространстве. Результаты моделирования (рис. 1) согласуются с теоретическими выводами. Полученные результаты могут быть использованы для проектирования оптических ловушек, в которых световое поле должно управлять как движением частиц по некоторым траекториям, так и их вращением

вокруг центров масс. Таким образом, в таких ловушках должны быть правильно сформированы распределения плотности как ОУМ, так и СУМ. Данная работа ограничивается теоретическими исследованиями и численными расчетами. Для экспериментальных подтверждений СУМ можно измерить с помощью поляризаторов [28], а ОУМ можно определить с помощью цилиндрических линз [29, 30] или путём вычисления моментов интенсивности [31, 32].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-12-00137).

References

- [1] Beth RA. Direct detection of the angular momentum of light. *Phys Rev* 1935; 48: 471. DOI: 10.1103/PhysRev.48.471.
- [2] Beth RA. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Phys Rev* 1936; 50: 115-127. DOI: 10.1103/PhysRev.50.115.
- [3] Barnett SM. On the six components of optical angular momentum. *J Opt* 2011; 13: 064010. DOI: 10.1088/2040-8978/13/6/064010.
- [4] Mansuripur M. Spin and orbital angular momenta of electromagnetic waves in free space. *Phys Rev A* 2011; 84: 033838. DOI: 10.1103/physreva.84.033838.
- [5] Zhang X, Shen B, Zhu Z, Rui G, He J, Cui Y, Gu B. Understanding of transverse spin angular momentum in tightly focused linearly polarized vortex beams. *Opt Express* 2022; 30: 5121-5130. DOI: 10.1364/OE.449583.
- [6] Bliokh KY, Bekshaev AY, Nori F. Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum, and angular momentum. *New J Phys* 2013; 15: 033026. DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
- [7] Guo J, Wang W, Cheng T, Lu J. Interaction of spin-orbit angular momentum in the tight focusing of structured light. *Frontiers in Physics* 2022; 10: 1079265. DOI: 10.3389/fphy.2022.1079265.
- [8] Bliokh KY, Alonso MA, Ostrovskaya EA, Aiello A. Angular momenta and spin-orbit interaction of nonparaxial light in free space. *Phys Rev A* 2010; 82: 063825. DOI: 10.1103/physreva.82.063825.
- [9] Bekshaev AY, Bliokh KY, Soskin MS. Internal flows and energy circulation in light beams. *J Opt* 2011; 13: 053001. DOI: 10.1088/2040-8978/13/5/053001.
- [10] Bliokh KY, Bekshaev AY, Nori F. Extraordinary momentum and spin in evanescent waves. *Nat Commun* 2014; 5: 3300. DOI: 10.1038/ncomms4300.
- [11] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA, Zaitsev VD. Spin Hall effect before and after the focus of a high-order cylindrical vector beam. *Appl Sci* 2022; 12(23): 12218. DOI: 10.3390/app122312218.
- [12] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kozlova ES, Butt MA. High-order orbital and spin Hall effects at the tight focus of laser beams. *Photonics* 2022; 9(12): 970. DOI: 10.3390/photonics9120970.
- [13] Ma C, Song T, Chen R, Li H, Li X. Spin Hall effect of fractional order radially polarized beam in its tight focusing. *Opt Commun* 2022; 520: 128548. DOI: 10.1016/j.optcom.2022.128548.
- [14] Ma C, Song T, Chen R, Hu H, Li H, Li X. Vortex-dependent spin angular momentum in tight focusing of power-exponent azimuthal-variant beams. *Appl Phys B* 2022; 128: 182. DOI: 10.1007/s00340-022-07902-y.
- [15] Li H, Ma C, Wang J, Tang M, Li X. Spin-orbit Hall effect in the tight focusing of a radially polarized vortex beam. *Opt Express* 2021; 29: 39419-39427. DOI: 10.1364/OE.443271.
- [16] Graydon O. Photonic wheel. *Nature Photon* 2013; 7: 672. DOI: 10.1038/nphoton.2013.229.
- [17] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Energy density and energy flux in the focus of an optical vortex: reverse flux of light energy. *Opt Lett* 2018; 43(12): 2921-2924. DOI: 10.1364/OL.43.002921.
- [18] Li H, Wang C, Tang M, Li X. Controlled negative energy flow in the focus of a radial polarized optical beam. *Opt Express* 2020; 28: 18607-18615. DOI: 10.1364/OE.391398.
- [19] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc R Soc A* 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [20] Bekshaev AY, Soskin MS. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities. *Opt Commun* 2007; 271: 332-348. DOI: 10.1016/j.optcom.2006.10.057.
- [21] Berry MV. Optical currents. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2009; 11: 094001. DOI: 10.1088/1464-4258/11/9/094001.
- [22] McDonald KT. Orbital and spin angular momentum of electromagnetic fields. March 2009, update October 2021. Source: (<http://kirkmcd.princeton.edu/examples/spin.pdf>).
- [23] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Reverse and toroidal flux of light fields with both phase and polarization higher-order singularities in the sharp focus area. *Opt Express* 2019; 27(12): 16689-16702. DOI: 10.1364/OE.27.016689.
- [24] Humblet J. Sur le moment d'impulsion d'une onde électromagnétique. *Physica* 1943; 10: 585-603. DOI: 10.1016/s0031-8914(43)90626-3.
- [25] Feynman RP, Leighton RB, Sands M. The Feynman lectures on physics. Vol II. Boston: Addison-Wesley; 1964. ISBN 0-8053-9049-9.
- [26] Zhao Y, Edgar JS, Jeffries GDM, McGloin D, Chiu DT. Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam. *Phys Rev Lett* 2007; 99: 073901. DOI: 10.1103/physrevlett.99.073901.
- [27] Kotlyar VV, Nalimov AG, Kovalev AA, Porfirev AP, Stafeev SS. Spin-orbit and orbit-spin conversion in the sharp focus of laser light: Theory and experiment. *Phys Rev A* 2020; 102(3): 033502. DOI: 10.1103/physreva.102.033502.
- [28] Schaefer B, Collett E, Smyth R, Barrett D, Fraher B. Measuring the Stokes polarization parameters. *Am J Phys* 2007; 75: 163-168. DOI: 10.1119/1.2386162.
- [29] Alperin SN, Niederriter RD, Gopinath JT, Siemens ME. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41: 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
- [30] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens. *Appl Opt* 2019; 58: 5748-5755. DOI: 10.1364/AO.58.005748.
- [31] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments. *Opt Express* 2019; 27(8): 11236-11251. DOI: 10.1364/OE.27.011236.
- [32] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YE, Egorov YA. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams. *Computer Optics* 2018; 42(5): 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@ipsiras.ru.

Телегин Алексей Михайлович, в 2009 году окончил СГАУ с дипломом по специальности «Радиотехника», в 2012 году защитил диссертацию, к.ф.-м.н., доцент кафедры конструирования и технологии электронных систем и устройств Самарского университета, с.н.с. Института космического приборостроения Самарского университета. Область научных интересов: космическое приборостроение, сенсоры. E-mail: talex85@mail.ru.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 9 февраля 2023 г. Окончательный вариант – 17 марта 2023 г.

Focusing a vortex beam with circular polarization: angular momentum

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.M. Telegin^{1,2}

¹ IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

² Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

Based on the Richards-Wolf formalism, we obtain two different exact expressions for the angular momentum (AM) density in the focus of a vortex beam with the topological charge n and with right circular polarization. One expression for the AM density is derived as the cross product of the position vector and the Poynting vector and has a nonzero value at the focus for an arbitrary integer number n . The other expression for the AM density is deduced as a sum of the orbital angular momentum (OAM) and the spin angular momentum (SAM). We reveal that at the focus of the light field under analysis, the latter turns zero at $n=-1$. While both these expressions are not equal to each other at each point of space, 3D integrals thereof are equal. Thus, exact expressions are obtained for densities of AM, SAM and OAM at the focus of a vortex beam with right-hand circular polarization and the identity for the densities $AM = SAM + OAM$ is shown to be violated. Besides, it is shown that the expressions for the strength vectors of the electric and magnetic fields near the sharp focus, obtained by adopting the Richards-Wolf formalism, are exact solutions of the Maxwell's equations. Thus, Richards-Wolf theory exactly describes the behavior of light near the sharp focus in free space.

Keywords: vortex beam; focusing; Richards-Wolf formalism; angular momentum; orbital angular momentum; spin angular momentum; Maxwell's equations.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Focusing a vortex beam with circular polarization: angular momentum. *Computer Optics* 2023; 47(4): 524-532. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1289.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No.22-12-00137 (theory). The work was also performed within the State assignment of Federal Scientific Research Center "Crystallography and Photonics" of Russian Academy of Sciences (simulation).

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru.

Aleksey Mikhailovich Telegin, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: talex85@mail.ru.

Received February 9, 2023. The final version – March 17, 2023.
