

Управление всплесками орбитального углового момента в астигматических структурированных пучках в рамках ABCD матричных преобразований

А.В. Воляр¹, М.В. Брецько¹, С.И. Халилов¹, Я.Е. Акимова¹

¹ КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

Аннотация

Разработан и экспериментально воплощен ABCD матричный формализм для описания структурных преобразований и орбитального углового момента структурированных Лагерр–Гауссовых пучков в астигматической оптической системе, содержащей цилиндрическую и корректирующую сферическую линзу. Показано, что матричный формализм не только хорошо согласуется с методом интегральных астигматических преобразований, но и значительно расширяет область его применения. Выявлено, что корректирующая сферическая линза способна не только разделять вихревую и астигматическую составляющие орбитального углового момента, но и превращать структурно неустойчивый астигматический Лагерр–Гауссов пучок после цилиндрической линзы в структурно устойчивый, при условии сохранения формы быстрых осцилляций и всплесков орбитального углового момента.

Ключевые слова: вихревые пучки, ABCD-матрица, структурированный свет, орбитальный угловой момент.

Цитирование: Воляр, А.В. Управление всплесками орбитального углового момента в астигматических структурированных пучках в рамках ABCD матричных преобразований / А.В. Воляр, М.В. Брецько, С.И. Халилов, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 2. – С. 171-179. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1411.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Orbital angular momentum burst control in astigmatic structured beams in ABCD-matrix transforms. Computer Optics 2024; 48(2): 171-179. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1411.

Введение

Наглядность и относительная математическая простота унитарных ABCD матричных преобразований, открытых еще в начале 70-х годов прошлого века [1, 2], оказывается сейчас наиболее удобным инструментом для инженерного моделирования сложных оптических устройств и систем на основе структурированных когерентных и частично когерентных пучков [3–8]. Основным элементом в этом подходе является унитарная ABCD-матрица вида

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где $\det M = AD - BC = 1$ для отдельного элемента системы, так что вся оптическая система описывается последовательным произведением этих матриц. Как правило, такие матричные преобразования используются для вычисления комплексного параметра $q(z)$ фундаментального Гауссова пучка, включающего в себя радиус кривизны волнового фронта $R(z)$ и радиус поперечного сечения пучка $w(z)$ как $1/q(z) = 1/R(z) - i2/kw^2(z)$, где k – волновое число. Однако, когда приходится работать с пучками Эрмита–Гаусса (ЭГ-), Лагерр–Гаусса (ЛГ-) или другими типами пучков высших порядков, обращаются к интегралу Коллинза [9], записанному для когерентных параксиальных пучков как

$$\Psi(r, z) = \frac{k}{2\pi i B(z)} \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(\mathbf{p}) \exp\left\{-i \frac{k}{2B(z)} [A(z)|\mathbf{p}|^2 - 2(\mathbf{p}\mathbf{r}) + D(z)|\mathbf{r}|^2]\right\} d^2\mathbf{p}, \quad (1)$$

где $\Psi(\mathbf{p})$ – комплексная амплитуда пучка на входе оптической системы, $\mathbf{p} = (\xi, \eta)$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ – элементы ABCD-матрицы.

Используя этот интеграл, Сейгман [2], а затем Беленджер [10] наметили общий подход для описания единичных ЭГ- и ЛГ-пучков в простейших оптических системах, содержащих сферические линзы. Аналогичный расчет для единичного ЛГ-пучка был выполнен Таше [11]. Алиева и Бастианс [12, 13], рассматривающие пучки ЭГ- и Эрмита–Лагерр–Гаусса (ЭЛГ-) в оптических системах первого рода с каскадом линз, усилителем и ортосимплектической системой (система, которая является одновременно упрощенной и ортогональной), используют подход на основе 4×4 симплектических матриц. Преобразование ЭГ-пучков в более сложных системах – конверторах оптических вихрей, содержащих астигматические элементы, авторы статей [14, 15] применили скорее искусственный, чем стандартный ABCD-подход, в то время как Хонина и соавторы [16] рассмотрели различные типы астигматических модовых конвертеров, используя для моделирования стандартные дифракционные методы. Дело в том, что, если в оптической системе присутствуют астигматические элементы

(например, цилиндрические линзы), ее анализ значительно усложняется. Теперь любой цилиндрический пучок должен быть представлен в базе собственных ЭГ-мод, горизонтальные и вертикальные оси которых направлены по осям цилиндрической линзы с соответствующим масштабированием координат [17–21], а в сложной астигматической системе они могут перепутываться.

Ситуация значительно усложняется при использовании методов ABCD-матриц для структурированных пучков, которые в настоящее время широко используются в различных областях науки и техники, требующих удобных математических подходов для проектирования оптических систем [22]. Прежде всего, это связано с тем, что в простейшем случае требуется представить ЛГ-моду в терминах ЭГ-мод в собственной системе координат цилиндрической линзы. Это выглядит так [17, 18]:

$$LG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} (\pm 2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) HG_{2n+\ell-j, j}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(\cdot)$ – многочлен Якоби, n и ℓ – радиальное и азимутальное числа. Если оси ЭГ-мод повернуты на угол $\pi/4$ относительно оси астигматизма линзы, то следует использовать разложение в виде

$$HG_{n,n+\ell}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} 2^j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) HG_{2n+\ell-j, j}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

а ABCD-преобразование осуществляется для каждого направления x и y осей астигматического элемента.

В более сложном случае произвольной ориентации осей пучка относительно осей линз необходимо

использовать громоздкие базисные преобразования, полученные Алиевой и Бастиансом [23]. Разработка оптической системы с единичным астигматическим преобразованием структурированных пучков требует применения этих базисных преобразований к каждой моде пучка, и в то же время необходимо внимательно следить за амплитудами и фазами мод, возникающих в результате преобразований. Когда речь идет об оптической системе, содержащей последовательность астигматических элементов с различной ориентацией осей, для каждого элемента следует использовать базисные преобразования. В результате основной подход к астигматическим преобразованиям структурированных пучков был сосредоточен на анализе траекторий на 2D-сфере с использованием унитарности астигматических преобразований [17, 24, 25]. Но здесь исследователь сталкивается с длиной последовательностью громоздких нестандартных вычислений, что не оптимально для инженерного моделирования. Таким образом, для инструментальной реализации устройств, преобразующих неустойчивый астигматический структурированный пучок в структурно устойчивый без потери его уникальных свойств, требуется разработка базисных методов ABCD-матриц.

В данной статье мы теоретически и экспериментально обсудим ABCD-преобразования в одной астигматической системе, которая наиболее важна для практической инженерии. Система содержит цилиндрическую линзу, формирующую всплески орбитального углового момента (ОУМ) и корректирующую сферическую линзу, позволяющую разделять астигматическую и вихревую компоненту ОУМ, а также преобразующую структурно неустойчивый астигматический структурированный пучок в устойчивый без потери его уникальных свойств.

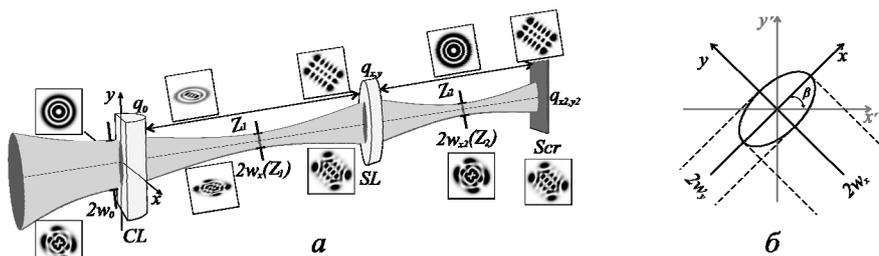


Рис. 1. (а) Эскиз астигматической системы с цилиндрической (CL) и сферической (SL) линзой; (б) взаимная ориентация поперечного сечения астигматического пучка в координатах цилиндрической линзы (x, y) и лабораторных координат (x', y')

1. Правило ABCD для астигматических структурированных ЛГ-пучков (простой астигматизм)

Основной целью этого параграфа является поиск оптимальных условий для сохранения формы всплесков и быстрых осцилляций ОУМ, подчеркивающих вклад радиального числа n при распротранении структурированного Лагерр–Гауссова (сЛГ-) пучка

через цилиндрическую линзу и разделении вихревого и астигматического ОУМ после корректирующей сферической линзы. Схема оптической системы показана на рис. 1а. Мы предполагаем, что структурированный $sLG_{n,\ell}$ -пучок [24] с радиальным числом n , азимутальным числом ℓ и комплексным параметром $q(z) = z - iz_0$ (где $z_0 = kw_0^2 / 2$ – длина Рэлея) падает на цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f_x , расположенную в плоскости $z=0$, так что начальный

комплексный параметр равен $q_0 = -iz_0$ и с радиусом перетяжки w_0 Гауссова пучка. Сферическая линза выполняет преобразование Фурье и позволяет не только разделить вихревую и астигматическую составляющие ОУМ, но и преобразовать структурно неустойчивый пучок в структурно устойчивый без потери всплеска ОУМ при изменении параметров оптической системы. В целом, сложную оптическую систему удобно представлять в виде произведения матриц каждого оптического элемента [2]. Однако, поскольку преобразование структурированных сЛГ-пучков астигматическим элементом ранее не рассматривалось, мы сначала подробно рассмотрим преобразование сЛГ-луча на цилиндрической линзе, определив его комплексные параметры $q_x(z)$ и $q_y(z)$, а затем используем их для анализа распространения пучка через остальные оптические элементы.

2. Структура сЛГ-пучка после единственной цилиндрической линзы

Подчеркнем, что цилиндрическая линза вводит различный масштаб по собственным координатам (x, y) (см. рис. 1б). Предположим, что оси цилиндрической линзы и лабораторные координаты совпадают, что соответствует случаю так называемого простого астигматизма [17, 18, 19]. Поскольку ЭГ-пучки являются собственными модами астигматического элемента, представим структурированный сЛГ-пучок в терминах стандартных ЭГ-мод в выражении (2), но с различным масштабом по координатам (x, y) (см. также формулу (3.8) из монографии [19])

$$sLG_{n,\pm\ell}(r, z_1) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \times \sum_{j=0}^{2n+\ell} (\pm 2i)^j Q_j (1 + \varepsilon e^{i\theta}) P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) \times H_{2n+\ell-j} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x(z_1)} \right) H_j \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_y(z_1)} \right) \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{x^2}{q_x(z_1)} + \frac{y^2}{q_y(z_1)} \right) \right], \quad (4)$$

где $H_n(\sqrt{2}x)$ – многочлен Эрмита, Q_n – амплитуда ЭГ-моды, которая в рамках ABCD-правила равна [2]

$$Q_{x,y} = \left(\sqrt{\frac{q_{0,x,y}}{A_{x,y} \cdot q_{0,x,y} + B_{x,y}}} \right)^n. \quad (5)$$

Очевидно, что в общем случае нам придется использовать две группы матриц ABCD для направлений x и y , которые задают комплексные параметры

$$q_x = \frac{A_x q_0(z_1 = 0) + B_x}{C_x q_0(z_1 = 0) + D_x}, q_y = \frac{A_y q_0(z_1 = 0) + B_y}{C_y q_0(z_1 = 0) + D_y}. \quad (6)$$

Однако цилиндрическая линза не изменяет масштаб в направлении y , то есть в области $(0, z_1)$, и мы можем написать

$$q_y(z_1) = z_1 - iz_0. \quad (7)$$

В направлении x действует матрица цилиндрической линзы и смещение на длину z , которое записывается в виде

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ -\frac{1}{f_x} & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Откуда q_x параметр получаем в виде

$$q_x(z) = z_0 \frac{[Z_1(\kappa_x^2 + 1) - \kappa_x] - i}{\kappa_x^2 + 1}, \quad (9)$$

где

$$Z_1 = \frac{z_1}{z_0}, \kappa_x = \frac{z_0}{f_x}. \quad (10)$$

Полученные результаты позволяют найти радиусы пучков для x и y направлений следующим образом

$$\Re \left(\frac{ik}{2q_x(z_1)} \right) = -\frac{1}{w_x^2(z_1)} \Rightarrow w_x^2(Z_1) = w_0^2 [(1 - Z_1 \kappa_x)^2 + Z_1^2],^2 \quad (11)$$

$$w_y^2(Z_1) = w_0^2 (1 + Z_1^2),^2 \quad (12)$$

в то время как фазы Γ и мод равны [2]

$$\Gamma_x(Z_1) = \arg \sqrt{\frac{q_x}{A \cdot q_x + B}} = \frac{1}{2} \arg(1 - \kappa_x Z_1 + i Z_1), \quad (13)$$

$$\Gamma_y(Z_1) = \frac{1}{2} \arg(1 + i Z_1). \quad (14)$$

Таким образом, после подстановки (9)–(14) в выражение (4) и последующих преобразований получаем комплексную амплитуду астигматического сЛГ- (асЛГ-) пучка после цилиндрической линзы в виде

$$asLG_{n,\ell}(x, y, Z_1 | \varepsilon, \theta) = \frac{1}{\sqrt{w_x(Z_1)w_y(Z_1)}} \times \exp\{-i[(2n + \ell + 1/2)\Gamma_x(Z_1) + \Gamma_y(Z_1)]\} \times \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} (2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-\ell)}(0) (1 + \varepsilon e^{i\theta}) \times H_{2n+\ell-j} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x(Z_1)} \right) H_j \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_y(Z_1)} \right) \times \exp(ij\Gamma_{xy}(Z_1)) \exp\left(i\left[\frac{x^2}{q_x(Z_1)} + \frac{y^2}{q_y(Z_1)}\right]\right), \quad (15)$$

где $\Gamma_{xy}(Z_1) = \Gamma_y(Z_1) - \Gamma_x(Z_1)$, $w_0 = \sqrt{2z_0/k}$, $x \rightarrow x/w_0$, $y \rightarrow y/w_0$,

$$\frac{-i}{q_x(Z_1)} = \frac{[Z_1(\kappa_x^2 + 1) - \kappa_x] - i}{\kappa_x^2 + 1}. \quad (16)$$

Заметим, что комплексная амплитуда (15) совпадает с амплитудой, полученной Бекшаевым и др. в работе [26] для простейшего случая с нулевым радиальным

числом $n=0$. Компьютерное моделирование и экспериментальные результаты эволюции картин интенсивности ($a-e$) стандартной ЛГ-моды и ($z-e$) сЛГ-пучка вдоль направления распространения Z_1 показаны на рис. 2. Как и ожидалось, ЛГ-пучок (рис. 2а) преобразуется в ЭГ-пучок на длине $z_1=2f_x$ ($Z_1=1$), а количество нулей интенсивности вдоль осей x и y позволяет определить топологический заряд ЛГ-пучка [27, 28]. Эволюция картины интенсивности структурированного пучка иллюстрирует по крайней мере один интересный эффект (рис. 2з). Вблизи $Z_1=1$ картина интенсивности асЛГ-пучка превращается в почти типичную картину

ЭГ-моды. Однако, как мы покажем ниже, ОУМ пучка испытывает резкий всплеск. Следует также отметить, что полученные результаты хорошо согласуются с картинками интенсивности, полученными методом интегральных преобразований в статье [24]. Однако метод интегральных преобразований позволяет получать достоверные результаты только в дальней зоне дифракции или в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. В то же время представленные результаты, основанные на матричном ABCD-подходе, значительно упрощают вычисления, приводящие к оптимальной форме комплексной амплитуды.

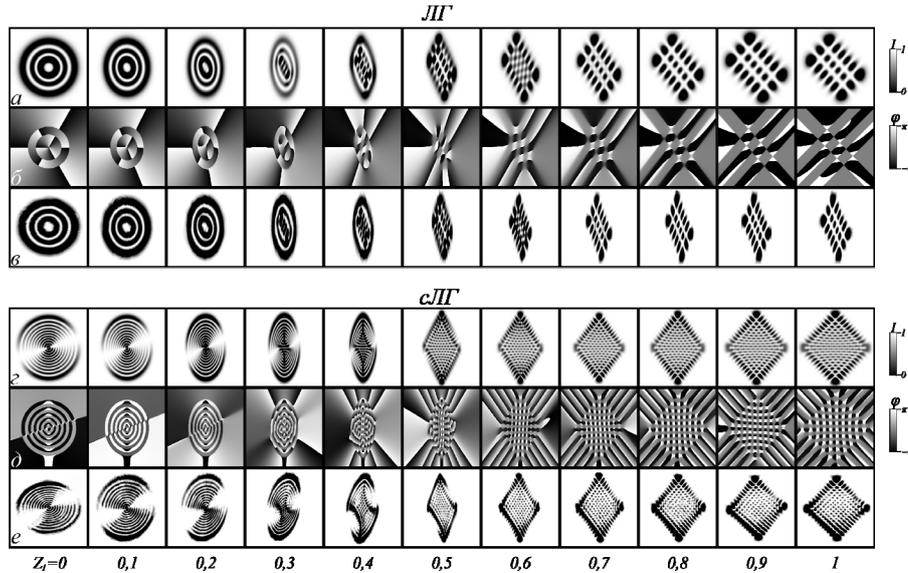


Рис. 2. Распределение интенсивности: (а,з) теория и (в,е) эксперимент, (б, д) фазы, эволюции ЛГ- (а-в) $n = 2, \ell = 3$ и астигматического сЛГ- (з-е) $n = 10, \ell = 1, \varepsilon = 1, \theta = 0,99\pi$ пучка, с $z_0 = 1$ м, $f_x = 0,5$ м

3. Преобразования ОУМ сЛГ-пучка после цилиндрической линзы

Орбитальный угловой момент структурированно-го пучка в базисе ЭГ-мод удобно представить как

$$L_z = \Im \int_{\mathbb{R}^2} \Psi^*(r)(x\partial_y - y\partial_x)\Psi(r)dx dy. \quad (17)$$

Очевидно, что основной вклад в ОУМ вносят амплитуды мод, которые мы находим из выражения (15) в виде

$$c_j(z_1) = (2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-\ell)}(0)(1 + \varepsilon e^{i\theta}) \exp(ij\Gamma_{xy}(z_1)). \quad (18)$$

Чтобы найти удельный ОУМ, вычислим поток энергии в направлении распространения пучка по формуле

$$S_z = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(r)\Psi^*(r)dx dy, \quad (19)$$

так что удельный ОУМ равен

$$\ell_z = L_z / S_z. \quad (20)$$

Используя выражения (17–20), получаем

$$L_z = 2^{2n+\ell} \pi \sum_{j=0}^{2n+\ell-1} (j+1)!(2n+\ell-j)!\Im(c_{j+1}c_j^*), \quad (21)$$

$$S_z = 2^{2n+\ell-1} \pi \sum_{j=0}^{2n+\ell} j!(2n+\ell-j)!c_j c_j^*. \quad (22)$$

Мы обнаружили, что полученные выражения могут быть сведены к выражениям (8), полученным Котляром и др. в [27], несмотря на то, что в их расчетах масштабирование комплексной амплитуды одинаково по осям x и y . Полученные результаты для ОУМ представлены на рис. 3 в виде быстрых осцилляций ОУМ при изменении управляющего параметра θ в различных поперечных сечениях Z_1 пучка. Мы видим возникновение и подавление быстрых осцилляций ОУМ по мере смещения Z_1 вдоль пучка, в то время как вблизи $\theta=0,98\pi$ зарождается и растет всплеск ОУМ. Второй всплеск ОУМ с противоположным знаком возникает вблизи $\theta=1,02\pi$. Важно, что ОУМ при $Z_1=1$ хорошо согласуется с результатами нашей работы [24], использующей метод интегральных преобразований, но ABCD матричный метод позволяет проследить эволюцию быстрых осцилляций и всплесков ОУМ по всей длине Z_1 пучка. Мы также видим, что всплески ОУМ

незначительно изменяются в дальнейшей зоне дифракции. Такое сохранение максимума всплеска ОУМ наглядно проиллюстрировано на рис. 4а. ОУМ достигает своего максимального значения при $Z_1=1$, не-

смотря на то, что картина интенсивности пучка значительно деформирована (см. рис. 4б–д), в то время как ОУМ стремится к половине радиального числа $\ell_z \rightarrow n/2$ в дальней зоне дифракции.

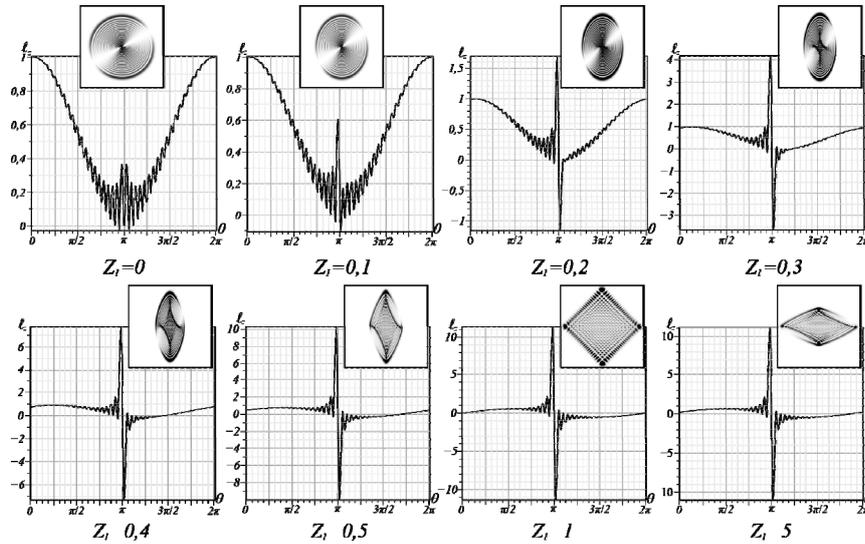


Рис. 3. Осцилляции ОУМ $\ell_z(\theta)$ при вариации θ -управляющего параметра асЛГ-пучка с $n = 20$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$ на различных длинах пучка Z_1 . Выводы: картины интенсивности для первого всплеска ОУМ

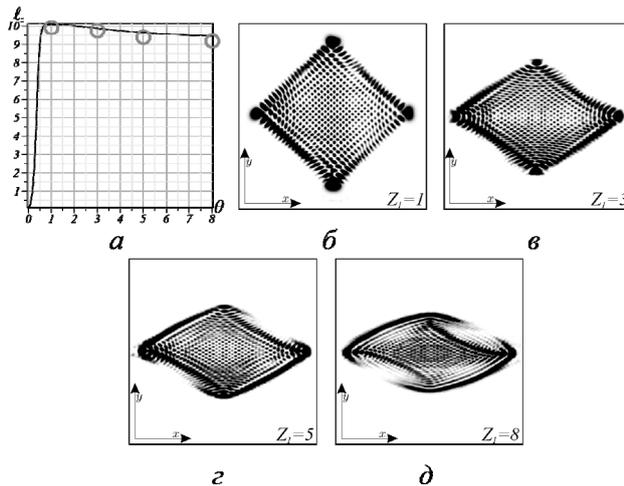


Рис. 4. (а) ОУМ $\ell_z(Z_1)$ вдоль асЛГ-пучка с $n = 20$, $\ell = 1$, $z_0 = 1$ м, $\varepsilon = 1$, $\theta = 0,098\pi$; (б)–(д) картины интенсивности в различных сечениях пучка

4. Цилиндрическая и корректирующая сферическая линза

Еще в начале 90-х годов Ананьев и Бекшаев предсказали в [29], что ОУМ сингулярного пучка имеет астигматическую и вихревую составляющие, которые можно разделить с помощью обычной сферической линзы в плоскости, где радиусы w_x и w_y сфокусированного пучка вдоль направлений x и y становятся одинаковыми. Их анализ был основан на методе моментов интенсивности второго порядка. В дальнейшем этот подход был реализован для анализа как простых [21], так и структурированных сингулярных пучков [30]. В этом параграфе мы не будем углубляться в математику моментов интенсивности, а про-

сто проанализируем условия разделения вихревой и астигматической составляющих на основе ABCD матричного подхода.

Стоит отметить, что согласование радиусов пучков $w_x = w_y$ происходит и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы, однако здесь не происходит разделения ОУМ на вихревую и астигматическую составляющие. Для этого необходимо также согласование Γ_x и Γ_y фаз. Эту операцию делает сферическая линза при условии, что она выполняет Фурье-преобразование. Это значит, что плоскость наблюдения преобразованного пучка после цилиндрической линзы должна располагаться в плоскости заднего фокуса сферической линзы, как показано на рис. 1. Для расчета мы используем матрицу (8), в которой выполняется замена $f_x \rightarrow f_{sh}$, $z \rightarrow z_2$. Тогда q_x – комплексный параметр пучка определяется по рекуррентной формуле

$$q_{x2} = \frac{z_0 \bar{q}_x}{-(z_0/f_{sh}) \bar{q}_x + 1} + z_0 Z_2 = z_0 \bar{q}_{x2}, \quad (23)$$

где

$$\bar{q}_x = \frac{1 + i[Z_1 + \kappa_x(-1 + Z_1 \kappa_x)]}{1 + \kappa_x^2}, \quad (24)$$

$$\bar{q}_{x2} = \frac{\bar{q}_x + Z_2[-\kappa_{sh} \bar{q}_x + 1]}{1 - \kappa_{sh} \bar{q}_x},$$

и $\kappa_{sh} = z_0/f_{sh}$, $Z_2 = z_2/z_0$. Теперь находим x -радиус асЛГ-пучка следующим образом

$$\frac{1}{w_{x2}^2} = -\Re\left(\frac{ik}{2q_{x2}}\right) = -\frac{1}{w_0^2} \Re\left(\frac{i}{q_{x2}}\right). \quad (25)$$

а x -фазу Гуй определяем как [2]

$$\Gamma_{x2} = \arg \sqrt{\frac{1}{q_{x2}}} \quad (26)$$

Из правила ABCD находим q_v комплексный параметр

$$q_{y2} = z_0 \frac{(1 - Z_2 \kappa_{sh})(Z_1 - i) + Z_2}{1 + i \kappa_{sh}(iZ_1 + 1)} = z_0 \bar{q}_{y2}, \quad (27)$$

радиус w_y и фазу Гуй

$$\frac{1}{w_{y2}^2} = -\Re\left(\frac{ik}{2q_{y2}}\right) = -\frac{1}{w_0^2} \Re\left(\frac{i}{q_{y2}}\right), \quad (28)$$

$$\Gamma_{y2} = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{q_{y2}}}\right). \quad (29)$$

Теперь комплексная амплитуда пучка записывается в виде

$$asLG_{n,\ell}(x, y, z | \varepsilon, \theta) = \frac{1}{\sqrt{w_{x2}(z)w_{y2}(z)}} \times \exp\{-i[(2n + \ell + 1/2)\Gamma_x(z) / 2 + \Gamma(z) / 2]\} \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \times \sum_{j=0}^{2n+\ell} (2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0)(1 + \varepsilon e^{i\theta}) \exp(ij\Gamma_{k2}(z)) \times H_{2n+\ell-j}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_{x2}(z)}\right) H_j\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_{y2}(z)}\right) \exp\left(i\left[\frac{x^2}{q_{x2}(z)} + \frac{y^2}{q_{y2}(z)}\right]\right), \quad (30)$$

где $\Gamma_{k2} = \Gamma_{x2} - \Gamma_{y2}$.

Кривые на рис. 5 определяют условия, при которых происходит разделение вихревой и астигматической составляющих ОУМ, а также преобразование неустойчивого асЛГ-пучка в устойчивый пучок. Кривые (а, с) задают условия $w_x(Z_1, Z_2) = w_y(Z_1, Z_2)$, при которых астигматическая составляющая ОУМ исчезает и только вихревая составляющая вносит основной вклад в ОУМ [21]. Можно показать, что эти условия выполняются при любом соотношении фокусных расстояний цилиндрических и сферических линз. Однако это не означает, что асЛГ-пучок становится структурно устойчивым после сферической линзы. Все же необходимо выполнить два дополнительных условия. Первое из них требует, чтобы разница между радиусами в направлениях x и y $w_x(Z_1, Z_2) - w_y(Z_1, Z_2) = const$ оставалась неизменной, как показано на рис. 5б, д. Это требование накладывает ограничение на неизменность астигматического компонента при прохождении через сферическую линзу (см. рис. 5в, е). Например, условия структурной устойчивости выполняются для всех пучков с параметрами, указанными на рис. 5с–е, однако структурно устойчивые пучки с параметрами, указанными на рис. 5в, е $Z_2 \gg 1$, не допускают супервсплесков ОУМ (см. также рис. 6 и рис. 7). Вторым дополнительным

условием является требование к положению сферической линзы

$$Z_1 = 2f_x + f_{sh}, \quad (31)$$

что выполняется для кривых на рис. 5е. Теперь посмотрим, как преобразуются всплески ОУМ после корректирующей линзы.

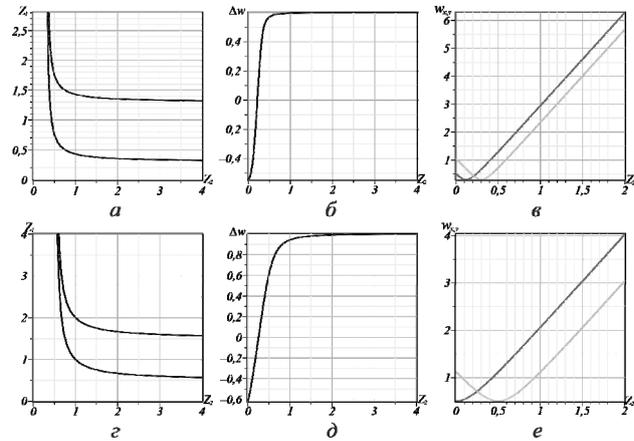


Рис. 5. Теоретические зависимости (а, с)

$w_x(Z_1, Z_2) = w_y(Z_1, Z_2)$; (б, д) $\Delta w = w_x - w_y$; (в–е) $w_x(Z_2)$ (темная кривая), $w_y(Z_2)$ (светлая кривая), для различных фокусных расстояний: (а–в) $-f_x = 0,5$ и $f_{sh} = 0,3$; (с–е) $-f_x = 0,5$ и $f_{sh} = 0,3$; (б, в) $-Z_1 = 0,3$, (д, е) $-Z_1 = 0,5$; (а–е) $-z_0 = 1$ м

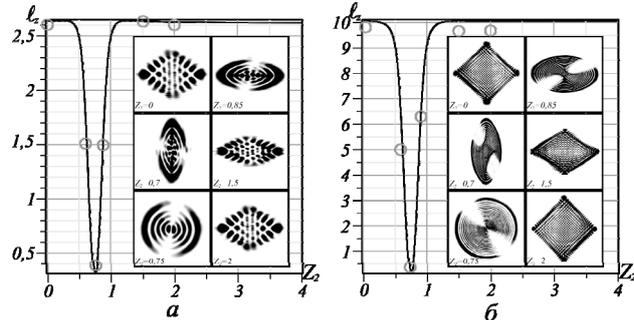


Рис. 6. Зависимость ОУМ $l_z(\theta)$ от управляющего параметра θ асЛГ-пучка с (а) $n = 4$, $\ell = 1$, (б) $n = 20$, $\ell = 1$ на длине $Z_1 = 2f_x + f_{sh}$ м, $f_x = 0,5$ м, $z_0 = 1$ м

5. ОУМ сЛГ-пучка после корректирующей линзы

Для того чтобы рассчитать ОУМ, мы используем описанный выше подход. Для этого достаточно записать амплитуды ЭГ-мод из уравнения (30) в виде

$$c_j(z_1, z_2) = (2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) \times (1 + \varepsilon e^{i\theta}) \exp(ij\Gamma_{k2}(z_1, z_2)). \quad (32)$$

После подстановки уравнения (30) в уравнения (21) и (22) получаем ОУМ на фотон в виде многопараметрической функции $l_z = l_z(Z_1, Z_2, f_x, f_{sh}, \varepsilon, \theta, n, \ell)$. Мы сосредоточимся на оптической системе, в которой сферическая линза расположена в соответствии с условием (31). Рассмотрим особые точки в зависимости ОУМ $l_z(Z_2)$ от смещения вдоль асЛГ-пучка в состоянии с малым $n = 4$ и большим $n = 20$ радиальными

числами и минимальным азимутальным числом $\ell=1$, в то время как фазовый параметр θ соответствует всплеску ОУМ в двойном фокусе $Z_1=2f_x$ асЛГ-пучка. Кривая ОУМ на рис. 6, окруженная картинами интенсивности, имеет резкий провал в точках $w_x=w_y$: (а) $Z_2=0,74$, $n=4$, $\ell=1$ и (б) $Z_2=0,74$, $n=20$, $\ell=1$, соответствующих условию коррекции астигматического пучка. Сферическая линза, выполняющая преобразование Фурье пучка со всплеском ОУМ превращает асЛГ-пучок в неастигматический пучок сЛГ-, соответствующий пучку на входе цилиндрической линзы. Как известно [24], максимум ОУМ в структурированном сЛГ-пучке не может превышать азимутальное число $\ell=1$, в то время как максимальный ОУМ астигматического асЛГ-пучка превышает половину радиального числа $\ell > n/2$. Ширина провала ОУМ зависит от фокусного расстояния f_{sh} и быстро уменьшается с уменьшением фокусного расстояния. Затем

ОУМ резко возрастает до своего первоначального значения, и его величина не меняется при смещении плоскости наблюдения вдоль пучка, его структура интенсивности также не меняется. Пучок становится структурно устойчивым вплоть до масштабирования и вращения. Структурная стабильность распространяется как на быстрые колебания, так и на всплески ОУМ. На рис. 7 показаны изменения формы осцилляций ОУМ вдоль пучка после сферической линзы. Если непосредственно за сферической линзой форма осцилляций ОУМ точно соответствует колебаниям в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы, то в плоскости согласования x и y радиусов пучков характер осцилляций резко меняется и принимает форму осцилляций ОУМ перед астигматическими преобразованиями [24]. Небольшое смещение от этой плоскости вдоль пучка возвращает форму осцилляций к исходной форме, содержащей всплески ОУМ.

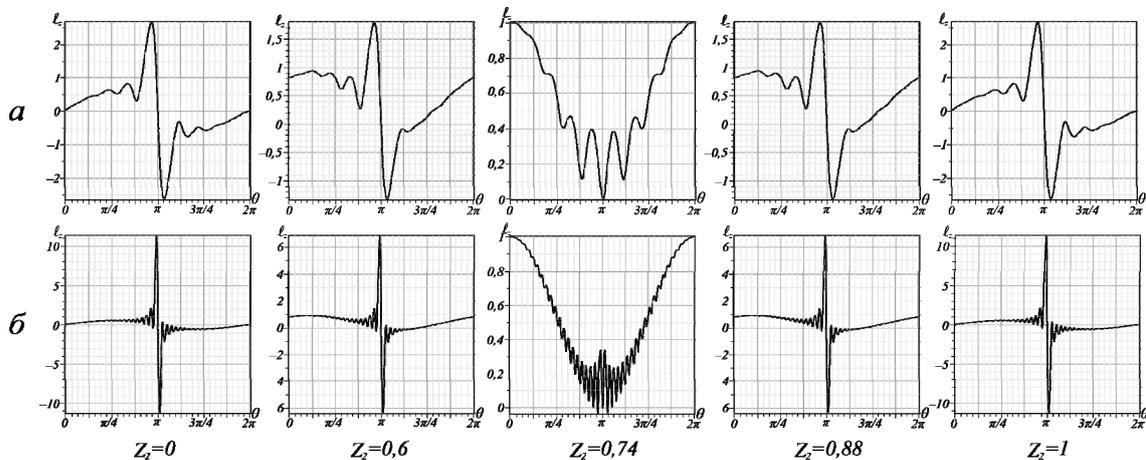


Рис. 7. Эволюция всплесков ОУМ асЛГ-пучка с (а) $n=4$, $\ell=1$, $\theta_c=0,98\pi$ и (б) $n=20$, $\ell=1$, $\theta_c=0,99\pi$ после корректирующей сферической линзы ($f_{sh}=0,5$ м, $z_0=1$ м, $Z_1=2f_x+f_{sh}$). Выводы: картины интенсивности, соответствующие характерным областям (указанным на рисунке) всплесков ОУМ

Выводы

Использование ABCD матричного подхода, рассмотренного в статье, значительно упростило и расширило математическое описание астигматических преобразований структурированных пучков по сравнению с интегральными преобразованиями [24]. Мы продемонстрировали эффективность использования матриц ABCD для преобразования ЭГ-мод высокого порядка в структурированных сЛГ-пучках. Было показано, что астигматическое преобразование приводит к возникновению всплесков ОУМ, амплитуда которых превышает половину радиального числа асЛГ-пучка с минимальным азимутальным числом. Более того, в отличие от метода интегральных преобразований, мы продемонстрировали эволюцию тонкой структуры интенсивности и ОУМ по всей длине пучка. Было показано, что ОУМ незначительно изменяется в дальней области дифракции цилиндрической линзы, несмотря на то, что сЛГ-пучок теряет свою структурную устойчивость.

Исследуя трансформацию асЛГ-пучка в системе цилиндрических и сферических линз, мы не только подтвердили предсказание Ананьева и Бекшаева о разделении вихревой и астигматической составляющих ОУМ после сферической линзы [21], но и показали, что сферическая линза способна превратить структурно неустойчивый асЛГ-пучок в структурно устойчивый в дальней области дифракции сферической линзы при условии, что сферическая линза выполняет преобразование Фурье асЛГ-пучка в двойном фокусе цилиндрической линзы. Мы обнаружили, что в асЛГ-пучке наблюдается резкий провал ОУМ, где радиусы пучков $w_x(Z_2)=w_y(Z_2)$ совпадают, что соответствует подавлению астигматической составляющей ОУМ, так что основной вклад в ОУМ вносят оптические вихри пучка. Корректируемый пучок преобразуется в свою первоначальную форму сЛГ-пучка перед астигматическим преобразованием. Небольшое смещение плоскости наблюдения из этой области приводит к резкому увеличению ОУМ. Астигматический пучок становится структурно устойчивым

вплоть до масштабирования и вращения, сохраняя при этом форму осцилляций и всплесков ОУМ. Экспериментальные исследования хорошо согласуются с нашим компьютерным моделированием.

Благодарности

Авторы благодарят Е.Г. Абрамочкина за полезную дискуссию.

References

- [1] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. *Appl Opt* 1966; 5(10): 1550-1567. DOI: 10.1364/AO.5.001550.
- [2] Siegman AE. *Lasers*. Mill Valley, CA: University Science Books; 1986. ISBN: 0-935702-11-5.
- [3] Soifer VA, Golub MA. *Laser beam mode selection by computer-generated holograms*. Boca Raton: CRC Press; 1994. ISBN: 0-8493-2476-9.
- [4] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. *Vortex laser beams*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group LLC; 2019. DOI: 10.1201/9781351009607.
- [5] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. *Nat Photonics* 2021; 15: 253-262. DOI: 10.1038/s41566-021-00780-4.
- [6] Shen Y, Yang X, Naidoo D, Fu X, Forbes A. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser. *Optica* 2020; 7(7): 820-831. DOI: 10.1364/OPTICA.382994.
- [7] Fadeyeva T, Rubass A, Egorov Y, Swartzlander JrG. Quadrefringence of optical vortices in a uniaxial crystal. *J Opt Soc Am A* 2008; 25(7): 1634-1641. DOI: 10.1364/JOSAA.25.001634.
- [8] Fadeyeva T, Alexeyev C, Rubass A, Volyar A. Vector erf-Gaussian beams: Fractional optical vortices and asymmetric TE and TM modes. *Opt Lett* 2012; 37(9): 1397-1399. DOI: 10.1364/OL.37.001397.
- [9] Collins SA. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J Opt Soc Am* 1970; 60(9): 1168-1177. DOI: 10.1364/JOSA.60.001168.
- [10] Bélanger PA. Beam propagation and the ABCD ray matrices. *Opt Lett* 1991; 16(4): 196-198. DOI: 10.1364/OL.16.000196.
- [11] Taché JP. Derivation of ABCD law for Laguerre-Gaussian beams. *Appl Opt* 1987; 26(14): 2698-2700. DOI: 10.1364/AO.26.002698.
- [12] Alieva T, Bastiaans MJ. Alternative representation of the linear canonical integral transform. *Opt Lett* 2005; 30(24): 3302-3304. DOI: 10.1364/OL.30.003302.
- [13] Alieva T, Bastiaans MJ. Mode mapping in paraxial lossless optics. *Opt Lett* 2005; 30(12): 1461-1463. DOI: 10.1364/OL.30.001461.
- [14] Beijersbergen MW, Allen L, van der Veen HELO, Woerdman JP. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Opt Commun* 1993; 96(1): 123-132. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90535-D.
- [15] Courtial J, Padgett MJ. Performance of a cylindrical lens mode converter for producing Laguerre-Gaussian laser modes. *Opt Commun* 1999; 159(1): 13-18. DOI: 10.1016/S0030-4018(98)00599-9.
- [16] Khonina SN, Karpeev SV, Ustinov AV. Functional enhancement of mode astigmatic converters on the basis of application of diffractive optical elements [In Russian]. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* 2009; 11(5): 13-23.
- [17] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [18] Abramochkin E, Razueva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite-Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
- [19] Abramochkin E, Volostnikov V. *Modern optics of Gaussian beams* [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
- [20] Wada A, Ohtani T, Miyamoto Y, Takeda M. Propagation analysis of the Laguerre-Gaussian beam with astigmatism. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(12): 2746-2755. DOI: 10.1364/JOSAA.22.002746.
- [21] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. *J Opt Soc Am A* 2003; 20(8): 1635-1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
- [22] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 2019; 8(90): 90. DOI: 10.1038/s41377-019-0194-2.
- [23] Alieva T, Bastiaans MJ. Orthonormal mode sets for the two-dimensional fractional Fourier transformation. *Opt Lett* 2007; 32(10): 1226-1228. DOI: 10.1364/OL.32.001226.
- [24] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Y, Bretsko M. Astigmatic-invariant structured singular beams. *Photonics* 2022; 9(11): 842. DOI: 10.3390/Photonics9110842.
- [25] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Khalilov S, Akimova Y. General astigmatism of structured LG beams: Evolution and transformations of the OAM super-bursts. *Photonics* 2023; 10(7): 727. DOI: 10.3390/Photonics10070727.
- [26] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens. *Opt Commun* 2004; 241(4): 237-247. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
- [27] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(6): 1061-1065. DOI: 10.1364/JOSAA.457660.
- [28] Volyar A, Abramochkin E, Egorov Yu, Bretsko M, Akimova Ya. Fine structure of perturbed Laguerre-Gaussian beams: Hermite-Gaussian mode spectra and topological charge. *Appl Opt* 2020; 59(25): 7680-7687. DOI: 10.1364/AO.396557.
- [29] Anan'ev YuA, Bekshaev AY. Theory of intensity moments for arbitrary light beams. *Opt Spectrosc* 1994; 76(4): 558-568.
- [30] Fadeyeva TA, Rubass AF, Aleksandrov RV, Volyar AV. Does the optical angular momentum change smoothly in fractional-charged vortex beams? *J Opt Soc Am B* 2014; 31(4): 798-805. DOI: 10.1364/JOSAB.31.000798.

Сведения об авторах

Воляр Александр Владимирович – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика.
E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Брецько Михаил Владимирович – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика. E-mail: mihailbretcko4@gmail.com

Халилов Сервер Искандарович – ассистент кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Акимова Яна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: aklmoova.yana@yandex.ru

ГРНТИ:29.31.15

Поступила в редакцию 16 августа 2023 г. Окончательный вариант – 13 сентября 2023 г.

Orbital angular momentum burst control in astigmatic structured beams in ABCD-matrix transforms

A.V. Volyar¹, M.V. Bretsko¹, S.I. Khalilov¹, Y.E. Akimova¹
*¹ Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4*

Abstract

We developed and experimentally implemented an ABCD matrix formalism for describing structural transformations and orbital angular momentum of structured Laguerre-Gaussian beams in an astigmatic optical system containing cylindrical and corrective spherical lenses. It was shown that the matrix formalism not only agrees well with the method of integral astigmatic transformations, but also significantly expands the scope of its application. It was found that a corrective spherical lens is capable of not only separating the vortex and astigmatic components of the orbital angular momentum, but also transforming a structurally unstable astigmatic Laguerre-Gaussian beam after a cylindrical lens into a structurally stable one, provided that the form of fast oscillations and bursts of the orbital angular momentum is preserved.

Keywords: vortex beams; ABCD-matrix, structured light; orbital angular momentum.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Orbital angular momentum burst control in astigmatic structured beams in ABCD-matrix transforms. *Computer Optics* 2024; 48(2): 171-179. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1411.

Acknowledgements: the authors thank E. Abramochkin for the useful discussion.

Authors' information

Alexander Vladimirovich Volyar, (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.

E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Mikhail Vladimirovich Bretsko, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. He is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics.

E-mail: mihailbretcko4@gmail.com

Server Iskandarovich Khalilov, (b. 1994) assistant of Business Informatics and Mathematical Modeling department of the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky. Research interests: singular optics, laser physics. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Yana Evgenievna Akimova, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her Ph. D. in Physics in 2022. She is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics.

E-mail: aklmova.yana@yandex.ru

Received August 16, 2023. The final version – September 13, 2023.
